Εκθέτης
Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας
Φύλλο 20, 1 Ιουνίου 2019
ISSN 2241-3367
Εκδίδεται στην Αθήνα.
Διανέμεται και αναπαράγεται ελεύθερα.
Δικτυακός Τόπος:
www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm
Επιμέλεια: Ν.Σ. Μαυρογιάννης
Μαθηματικός, MSc, PhD
Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ανισότητες στο Ολοκλήρωμα.

Μπάμπης Στεργίου, Μάκης Πολλάτος

1 Οι ανισότητες στο ολοκλήρωμα

Οι ανισότητες με ολοκληρώματα παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και παρουσιάζονται συχνά στις εξετάσεις . Θα δούμε μερικές χαρακτηριστικές περιπτώσεις για να φανεί ότι στην ουσία πρόκειται για μέσης δυσκολίας ερωτήσεις που μπορούν να αντιμετωπιστούν κάπως ομοιόμορφα, αν βέβαια δεν ανήκουν σε κάποια ιδιάζουσα και δύσκολη περίπτωση. Στην περίπτωση που το ολοκλήρωμα εκφράζει εμβαδόν, έχουμε την επιπλέον πληροφορία ότι το ολοκλήρωμα είναι θετικός αριθμός.

Στις οδηγίες διαχείρισης της ύλης δίνεται για άμεση χρήση από τους μαθητές, χωρίς δηλαδή να χρειάζεται απόδειξη, η παρακάτω **βασική πρόταση** που στην ουσία καλύπτει το μεγαλύτερο μέρος ερωτημάτων αυτού του είδους:

Η βασική πρόταση.

Η βασικότερη πρόταση, στην οποία χτίζονται ερωτήματα ανισοτήτων που περιέχουν ολοκλήρωμα είναι η παρακάτω:

Πρόταση 1. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$.*

- *Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε*
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0.$$
- *Αν η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε*
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx>0.$$

Από την πρόταση αυτή προκύπτουν άμεσα τα παρακάτω συμπεράσματα, που χρησιμοποιούνται για την απόδειξη άλλων ανισοτήτων:

Πρόταση 2.
- *Αν οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\leq g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, τότε:*
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$
- *Αν μάλιστα η ισότητα δεν ισχύει παντού στο $[\alpha,\beta]$, τότε η διάταξη είναι γνήσια, δηλαδή:*
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Θα ασχοληθούμε μόνο με συνεχείς συναρτήσεις σε όλη την έκταση του πρώτου μέρους αυτού του κειμένου. Άλλες περιπτώσεις δεν εμπίπτουν στην ύλη της Γ' Λυκείου. Ανάμεσα λοιπόν στις πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις ανισοτήτων με ολοκληρώματα είναι οι παρακάτω:

1.1 Ανισότητες της μορφής

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx\ \geq\ A.$$

Αντιμετώπιση

$\boxed{\text{i)}}$ Σε προηγούμενα ερωτήματα έχουν ίσως βρεθεί τα ακρότατα της f. Εκμεταλλευόμενοι τον ορισμό του ολικού ακροτάτου γράφουμε, π.χ. (για ολικό ελάχιστο)

- $f(x)\geq f(x_0)=k$ για κάθε $x\in D_f$
- $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq\int_\alpha^\beta kdx=k(\beta-\alpha)=\text{A}$

Επειδή συνήθως το ίσον δεν ισχύει παντού παρά μόνο σε ένα σημείο, το $x=x_0$ ή σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, η ανισότητα είναι γνήσια, δηλαδή:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx>\int_\alpha^\beta kdx=k(\beta-\alpha)=\text{A}.$$

$\boxed{\text{ii)}}$ Αν δεν εξυπηρετούν για τη λύση τα ολικά ακρότατα της f, βρίσκουμε το ελάχιστο m και το μέγιστο M της f στο διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση δεν είναι σταθερή ή που το ίσον δεν ισχύει παντού, γράφουμε :

- $m\leq f(x)\leq M$, $x\in[\alpha,\beta]$
- $\int_\alpha^\beta mdx<\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta Mdx\Leftrightarrow$
$$m(\beta-\alpha)<\int_\alpha^\beta f(x)dx<M(\beta-\alpha)$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Βασιζόμαστε στη μονοτονία της f στο διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$. Έστω π.χ. ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Γράφουμε τότε:

- $\alpha\leq x\leq\beta\Rightarrow f(\alpha)\leq f(x)\leq f(\beta)$, $x\in[\alpha,\beta]$
- $\int_\alpha^\beta f(\alpha)dx<\int_\alpha^\beta f(x)dx<\int_\alpha^\beta f(\beta)\,dx\Leftrightarrow$
$$f(\alpha)(\beta-\alpha)<\int_\alpha^\beta f(x)dx<f(\beta)(\beta-\alpha)$$

μια και το ίσον δεν ισχύει παντού, παρά μόνο στα άκρα α,β.

$\boxed{\textbf{iv)}}$ Με βάση τη δοσμένη συνάρτηση και τη βοήθεια άλλων γνωστών ανισοτήτων όπως π.χ. οι :

$$e^x \geq x+1,\ \ln x \leq x-1,\ |\eta\mu x| \leq |x|$$

ή ακόμα τις ανισότητες

$$|\eta\mu x| \leq 1\,,\ |\sigma\upsilon\nu x| \leq 1$$

καταλήγουμε βήμα-βήμα σε μια ανισότητα της μορφής $f(x) \geq g(x)$ ή $f(x) \leq g(x)$, για κάποια συνεχή συνάρτηση g. Στη συνέχεια και αφού διαπιστώσουμε ότι δεν ισχύει παντού η ισότητα, ολοκληρώνουμε στο $[\alpha,\beta]$ και παίρνουμε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx = A$$

$\boxed{\textbf{v)}}$ Για κυρτές συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$ και από τη θέση εφαπτομένης - γραφικής παράστασης καταλήγουμε στη σχέση:

$$f(x) \geq y_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) \geq f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)$$

όπου

$$y_\varepsilon = f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)$$

είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο $A(\gamma, f(\gamma))$ και γ είναι κατάλληλα επιλεγμένος αριθμός (για τον οποίο έχουμε πληροφορίες). Το γ μπορεί να είναι και κάποιο από τα άκρα α,β του διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την ανισότητα που προκύπτει στο $[\alpha,\beta]$. Η ανισότητα που θα προκύψει είναι γνήσια, διότι το ίσον ισχύει μόνο σε ένα σημείο και συγκεκριμένα στο σημείο επαφής:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta (f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)) = A$$

Αντίστοιχα εργαζόμαστε και για κοίλες συναρτήσεις.
Πριν ολοκληρώσουμε, προσέχουμε ιδιαίτερα τα άκρα ολοκλήρωσης διότι αν το κάτω άκρο είναι μεγαλύτερο από το πάνω, η φορά θα αλλάξει!

Σχολιο 1. Αν την σχέση

$$f(x) \geq y_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) \geq f'(\gamma)(x-\gamma)+f(\gamma)$$

την πολλαπλασιάσουμε με μια μη αρνητική συνάρτηση $g(x)$, όχι ίση με μηδέν, παίρνουμε :

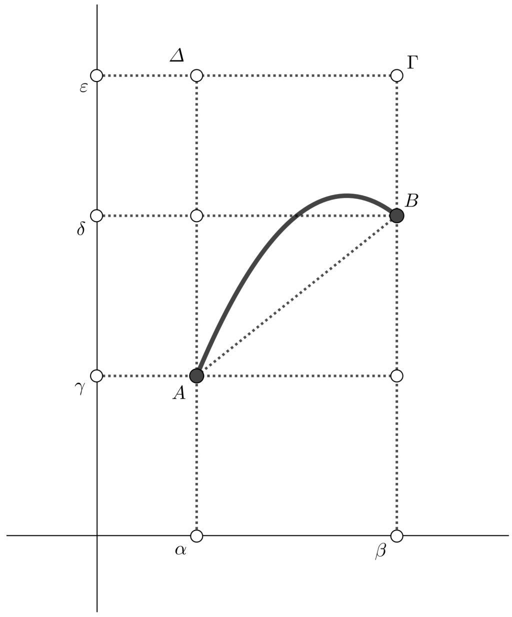
$$f(x)g(x) \geq y_\varepsilon g(x).$$

Από τη σχέση αυτή, με ολοκλήρωση στο $[\alpha,\beta]$ προκύπτει ότι

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx > \int_\alpha^\beta y_\varepsilon g(x)dx = A$$

$\boxed{\textbf{vi)}}$ Η ανισότητα μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά, αρκεί να έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης . Ιδιαίτερη και εδώ σημασία μπορεί να έχει η κυρτότητα.

♦ Αν η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική παράσταση είναι πάνω από τη χορδή AB.



Έτσι με βάση τον τύπο για το εμβαδόν τραπεζίου παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = \frac{\gamma+\delta}{2}(\beta-\alpha)$$

Η ίδια σχέση προκύπτει επίσης αν βρούμε την εξίσωση της ευθείας AB: $y = kx+m$ και γράφουμε :

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta (kx+m)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha).$$

Στην παραπάνω περίπτωση βλέπουμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα $I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ (ως εμβαδόν) είναι μικρότερο από το εμβαδόν του σχεδιασμένου ορθογωνίου (μια πλευρά είναι η $\Gamma\Delta$) του οποίου φυσικά το εμβαδόν υπολογίζεται γεωμετρικά.

Συνήθως το ύψος του ορθογωνίου είναι όσο το μέγιστο της f στο $[\alpha,\beta]$. Αν όμως θεωρήσουμε το ορθογώνιο με ύψος $f(\alpha) = \gamma$ μήκος βάσης $\beta-\alpha$ που βρίσκεται κάτω από τη C_f και εμβαδόν E, τότε προκύπτει ανισότητα της μορφής

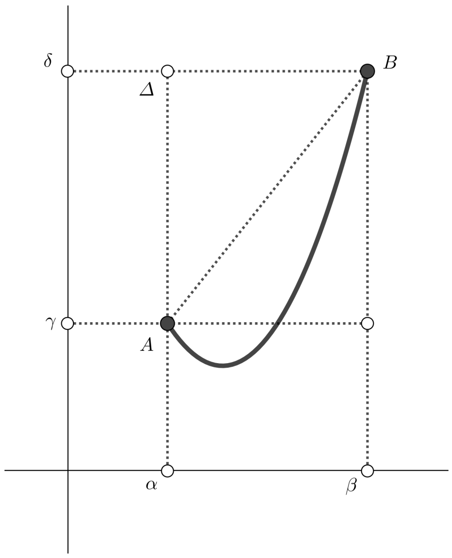
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \mathrm{E}$$

♦ Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[\alpha,\beta]$, τότε η γραφική παράσταση είναι κάτω από τη χορδή AB και έτσι με βάση τον τύπο για το εμβαδόν τραπεζίου παίρνουμε

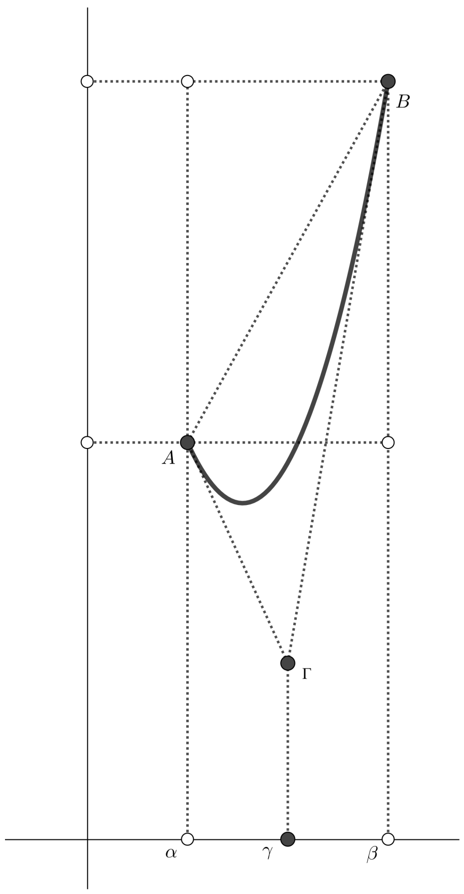
$$\int_\alpha^\beta f(x)dx < \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha) = \frac{\gamma+\delta}{2}(\beta-\alpha)$$

Η ίδια σχέση προκύπτει επίσης αν βρούμε την εξίσωση της ευθείας AB: $y = kx + m$ και γράψουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \int_{\alpha}^{\beta} (kx+m)dx = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}(\beta-\alpha).$$



Μια ιδιαίτερη περίπτωση



Αν έχουμε μια κυρτή συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ και τις εφαπτομένες στα A, B που τέμνονται στο Γ, τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\gamma} y_{\mathrm{A\Gamma}}dx + \int_{\gamma}^{\beta} y_{\mathrm{\Gamma B}}dx,$$

όπου

$$y_{\mathrm{A\Gamma}} = kx + m\,,\; y_{\mathrm{\Gamma B}} = cx + d$$

είναι οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία A και B. Παίρνοντας λοιπόν τις δύο εφαπτομένες και όχι μόνο τη μία, η ανισότητα γίνεται όπως είναι αναμενόμενο πιο σφιχτή.

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και με μια κοίλη συνάρτηση, μόνο που τώρα η φορά στις ανισότητες που θα προκύψουν έχουν αντίθετη φορά. Είναι προφανές ότι όσες περισσότερες εφαπτομένες έχουμε (ή άλλες κατάλληλες ευθείες, που προσεγγίζουν τη γραφική παράσταση της f), τόσο πιο σφιχτή ανισότητα δημιουργούμε .

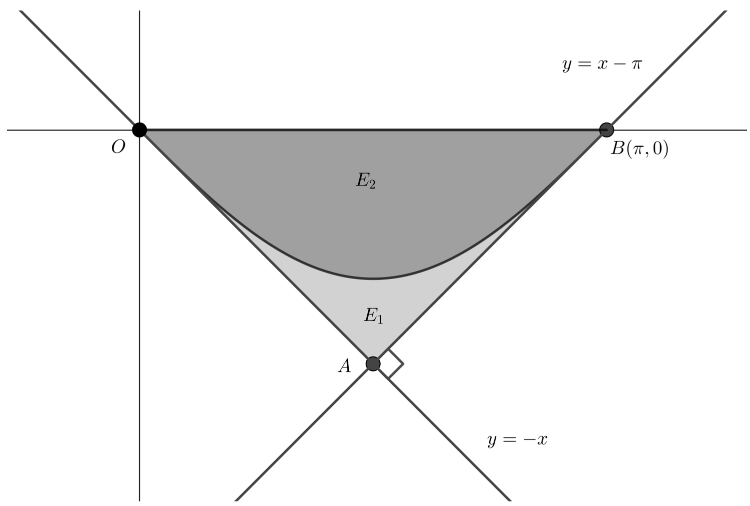
Εφαρμογη 1.1.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0,\ \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες (ε_1), (ε_2) της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A, τις οποίες και να βρείτε.
Έστω $(\varepsilon_1) : y = -x$ και $(\varepsilon_2) : y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος Γ1.

Γ2. Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi.$$

Υποδειξη



Γ2 Από το σχήμα παίρνουμε ότι

$$f(x) \geq x - \pi \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \geq 1 - \frac{\pi}{x}$$

και το ίσον ισχύει μόνο για $x = \pi$. Άρα, διαιρώντας με $0 < x \leq \pi$ και ολοκληρώνοντας στο $[1, e]$, παίρνουμε:

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > \int_1^e dx - \pi\int_1^e \frac{1}{x}dx \Rightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > (e-1) - \pi [\ln x]_1^e \Rightarrow$$

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e - 1 - \pi.$$

Εφαρμογη 1.1.2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\eta\mu x}{x} + \alpha, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0,\ 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε:

Δ2. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ3. Να μελετήσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1$.

Υποδειξη **Δ4.** Έχουμε:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{2} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} (x^3 - 3x^2 + 2)dx =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x\right]_0^2 =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx$$

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx + 0 < \frac{3\pi}{2} - 1.$$

Για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$ έχουμε:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \geq f(x) \geq f(0) \Rightarrow$$

$$\boxed{2 \leq f(x) \leq 3 - \frac{2}{\pi}} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} 2dx < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2} < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \left(3 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\pi < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)dx < \frac{3\pi}{2} - 1.$$

Η φορά στην ανισότητα που προκύπτει είναι γνήσια, διότι στη σχέση (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα.

1.2 Ανισότητες της μορφής

$$\int_\alpha^\beta g(x)dx \ \geq \ \mathrm{A}$$

Αντιμετωπιση.

Στην κατηγορία αυτή, στο εμφανιζόμενο ολοκλήρωμα δεν έχουμε τη συνάρτηση f, που έχει δοθεί για μελέτη στον κορμό του θέματος, αλλά μια άλλη συνάρτηση g. Η συνάρτηση αυτή, γενικά, πρέπει με κάποιο τρόπο να είναι συνδεδεμένη ή να συνδέεται με την f. Η δυσκολία λοιπόν του ερωτήματος, αν υπάρχει, είναι να δημιουργήσουμε τη συνάρτηση g ξεκινώντας όμως από πληροφορίες για την f και έχοντας ως οδηγό τη μορφή της g. Θα είναι λοιπόν αδόκιμο να αγνοήσουμε τελείως τη συνάρτηση f και να ξεκινήσουμε να μελετάμε τη g, σκεφτόμενοι όπως στην παράγραφο Α.

Θα ξεκινήσουμε λοιπόν με τη συνάρτηση f, θα εξετάσουμε μήπως η g είναι κάποιος όρος που υπάρχει στον τύπο της f ή δημιουργείται από την f και με βάση τις πληροφορίες που έχουμε για την f θα φτιάξουμε μια ανισότητα της μορφής $g(x) \geq \alpha$ ή $g(x) \leq \alpha$. Μπορούμε ακόμα να εντοπίσουμε μια ανισότητα για την f (που προκύπτει πχ είτε από το ακρότατο, είτε από την κυρτότητα, είτε από τη μονοτονία, είτε από το σύνολο τιμών της f στο $[\alpha, \beta]$, είτε με κάποια αντικατάσταση, είτε ακόμα με κάποια μέθοδο υπολογισμού ολοκληρώματος και να προσπαθήσουμε να φτιάξουμε από αυτήν την ανισότητα μια νέα ανισότητα (πχ πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με κάποια (μη) αρνητική ή (μη) θετική παράσταση), της οποίας το ένα το μέλος είναι η συνάρτηση g. Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε κατάλληλα κλπ. Αν στην ανισότητα που προκύπτει πριν την ολοκλήρωση δεν ισχύει παντού η ισότητα, τότε η διάταξη στην ανισότητα που παίρνουμε με την ολοκλήρωση είναι γνήσια.

Μερικές φορές είναι χρήσιμο να δούμε μήπως το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta g(x)dx$ και γενικά η ανισότητα μπορούν να πάρουν μια ισοδύναμη μορφή (πχ μετά από κάποια αντικατάσταση ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή εφαρμογή κάποιας ιδιότητας), ώστε να εμφανιστεί η συνάρτηση f και να αξιοποιήσουμε τις ιδιότητες που γνωρίζουμε ή έχουμε αποδείξει για αυτή.

Εφαρμογη 1.2.1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln(\sigma\upsilon\nu x),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

Β. Να αποδείξετε ότι

$$2\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx > 1.$$

Υποδειξη:

Α. Η f έχει ολικό μέγιστο το $f(0)=0$.

Β. Η συνάρτηση κάτω από το ολοκλήρωμα πρέπει να συνδεθεί με την f. Είναι:

$$f(x)\le 0 \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}\ge \ln(\sigma\upsilon\nu x)\,,\, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

Η σχέση αυτή δίνει :

$$e^{-\frac{x^2}{2}}\ge e^{\ln(\sigma\upsilon\nu x)}=\sigma\upsilon\nu x$$

και το ίσον δεν ισχύει παντού(ισχύει μόνο για $x=0$). Επομένως:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx>\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sigma\upsilon\nu x dx=[\eta\mu x]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{2}$$

Εφαρμογη 1.2.2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\int_0^{\pi}\left(f(x)+f''(x)\right)\cdot\eta\mu x dx=\pi$,
- $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$,
- $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(\pi)=\pi$ και $f'(0)=1$.

Δ2.α) Να αποδείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

Υποδειξη

Δ3. Στο ολοκλήρωμα

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx$$

θέτουμε $u=\ln x$, οπότε $du=\frac{1}{x}dx$. Επομένως:

$$x=1\Rightarrow u=0 \text{ και } x=e^\pi\Rightarrow u=\pi.$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi}f(u)\,du \;(1).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0,\pi]$, και ισχύει $f(0)=0$, $f(\pi)=\pi$, θα είναι:

$$0\le u\le\pi\Rightarrow f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(u)\le\pi.$$

Έτσι, ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα, αφού το ίσον δεν ισχύει παντού, παίρνουμε:

$$0<\int_0^{\pi}f(u)\,du<\int_0^{\pi}\pi du=\pi^2\Rightarrow$$

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2.$$

Εφαρμογη 1.2.3. Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο ορθογώνιο ΟΒΓΑ με Ο$(0,0)$, Α$(1,0)$, Β$(0,2)$ και δεν διέρχεται από τις κορυφές Ο και Γ. Να αποδείξετε ότι:

α) Η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΟΓ σε εσωτερικό της σημείο.

β) Η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΑΒ.

γ) $\int_0^1 f(x)dx<2$.

δ) $\int_0^1 f^2(x)dx<2\int_0^1 f(x)dx$.

Υποδειξη

α) Επειδή $\lambda_{O\Gamma}=\frac{2}{1}=2$, η διαγώνιος ΟΓ έχει εξίσωση $y=2x$. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_1\in(0,\,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2x_1$. Θεωρούμε, όπως είναι λογικό, τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x)-2x,\;\; x\in[0,\;1].$$

- Η g είναι συνεχής στο $[0,\;1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $g(0)=f(0)>0$, διότι η C_f δεν περνάει από το O και η C_f βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο.
- $g(1)=f(1)-2<0$, διότι η C_f δεν διέρχεται από το Γ, αφού βρίσκεται μέσα στο ορθογώνιο, οπότε $f(1)<2$. Άρα, $g(0)g(1)<0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_1\in(0,\,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)=0\Leftrightarrow f(x_1)=2x_1$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

β) Θα βρούμε πρώτα την εξίσωση της διαγωνίου AB.

- $\lambda_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{2-0}{0-1}=-2$.
- (ΑΒ): $y-y_A=\lambda_{AB}(x-x_A)\Leftrightarrow y-0=-2(x-1)\Leftrightarrow y=-2(x-1)$.

Για να τέμνει λοιπόν η C_f τη διαγώνιο ΑΒ αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_2\in[0,\;1]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(x_2)=-2(x_2-1).$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x)=f(x)+2(x-1)\;\; x\in[0,\;1].$$

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.
- $h(0) = f(0) - 2 \leq 0$, αφού $0 < f(0) \leq 2$.
- $h(1) = f(1) \geq 0$.

Είναι επομένως $h(0)h(1) \leq 0$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
i) Αν $h(0)h(1) = 0 \Leftrightarrow (h(0) = 0$ ή $h(1) = 0)$ επιλέγουμε $x_2 = 0$ και έτσι η C_f τέμνει την ΑΒ στο Β ή στο Α αντίστοιχα.
ii) Αν $h(0)h(1) < 0$, τότε από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_2 \in (0,\ 1)$ τέτοιο ώστε:

$$h(x_2) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = -2(x_2 - 1).$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν υπάρχει $x_2 \in [0,\ 1]$, ώστε

$$f(x_2) = -2(x_2 - 1).$$

Άρα η C_f τέμνει τη διαγώνιο ΑΒ.
γ) Επειδή $0 \leq f(x) \leq 2$, χωρίς όμως να ισχύει παντού το ίσον (αφού $f(0) > 0$ και $f(1) < 2$), παίρνουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx < \int_0^1 2dx = 2.$$

δ) Από τη σχέση $0 \leq f(x) \leq 2$, παίρνουμε

$$f(x) \leq 2 \Leftrightarrow f(x) - 2 \leq 0,$$

οπότε:

$$f(x)\left(f(x) - 2\right) \leq 0 \Leftrightarrow f^2(x) \leq 2f(x),$$

χωρίς να ισχύει παντού το ίσον. Επειδή η f είναι επιπλέον συνεχής, παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 f^2(x)dx < 2\int_0^1 f(x)dx.$$

Σημειωση

Για το σημείο x_1 είναι $f(x_1) = 2x_1$ και $x_1 \in (0,\ 1)$. Άρα $f(x_1) \neq 0$ και $f(x_1) - 2 < 0$, αφού $2x_1 < 2$.

Εφαρμογη 1.2.4. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2e^{x-2} - x^2 \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx > -\frac{32}{15}.$$

Υποδειξη Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[2, 3]$, διότι

$$f''(x) = 2(e^{x-2} - 1)$$

και έτσι βρίσκουμε γενικότερα την κυρτότητα στο πεδίο ορισμού της. Στο σημείο $A\left(2, f(2)\right)$ η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη

$$(\varepsilon):\ y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y + 2 = -2(x-2) \Leftrightarrow$$
$$y = -2x + 2$$

Αλλά η f είναι κυρτή στο διάστημα $[2, +\infty)$, οπότε:

$$f(x) \geq -2x + 2 \Rightarrow f(x)\sqrt{x-2} \geq (-2x+2)\sqrt{x-2}$$

για κάθε $x \in [2, 3]$ και το ίσον ισχύει μόνο για $x = 2$. Επομένως:

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > \int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx$$

Θέτουμε $y = x - 2 \Rightarrow dy = dx$. Βρίσκουμε τα νέα άκρα ολοκλήρωσης:

$$x = 2 \to y = 0,\ \ x = 3 \to y = 1$$

Επομένως είναι :

$$\int_2^3 (-2x+2)\sqrt{x-2}dx = \int_0^1 (-2y-2)\sqrt{y}dy =$$

$$-2\left[\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -4\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{32}{15}.$$

Άρα

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx > -\frac{32}{15}.$$

Άλλες περιπτώσεις

$\boxed{\textbf{iv)}}$ Μελετάμε τη συνάρτηση $G(x) = F(x) - F(\alpha)$, όπου F είναι μια παράγουσα της f και σε αυτή εφαρμόζουμε τον ορισμό της μονοτονίας $(\beta > \alpha)$ ή του ακροτάτου.
$\boxed{\textbf{v)}}$ Την τακτική αυτή εφαρμόζουμε ακόμα και στην περίπτωση που θέλουμε να βρούμε πρόσημο τιμών συνάρτησης (για να κάνουμε πχ Bolzano), αλλά παρουσιάζονται ορισμένα ολοκληρώματα (με γνωστά άκρα), τα οποία θέλουμε να συγκρίνουμε με αριθμητικές τιμές. Αν για παράδειγμα θέλουμε να βρούμε το πρόσημο του

$$F(2) = 8 - \int_1^3 f(t)dt,$$

και ξέρουμε ότι η f είναι κυρτή, τότε βρίσκουμε την εξίσωση μιας εφαπτομένης, π.χ. στο 1 και αν αυτή είναι η $\varepsilon : y = 2x$, τότε από τη σχέση

$$f(x) \geq 2x\ \ (1)$$

παίρνουμε:

$$\int_1^3 f(t)dt > \int_1^3 2tdt = 8$$

διότι στην (1) δεν ισχύει παντού η ισότητα. Επομένως

$$F(2) = 8 - \int_1^3 f(t)dt < 0.$$

vi) Ορισμένες φορές ξεκινάμε από μια βασική ανισότητα που προκύπτει από τα δεδομένα ή τα άλλα υποερωτήματα, ολοκληρώνουμε, κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και το αρχικό ολοκλήρωμα επανεμφανίζεται.
vii) Κάνουμε δύο ΘΜΤ χωρίζοντας κάποιο διάστημα στη μέση και εργαζόμαστε σε συνάρτηση της μορφής

$$G(x) = F(x) - F(\alpha),$$

όπου F είναι μια παράγουσα της f, η οποία αποδεικνύουμε πρώτα ότι είναι κυρτή ή κοίλη, ώστε να έχουμε τη μονοτονία της G'.

1.3 Ανισότητες της μορφής

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt \geq \int_\alpha^\beta g(t)dt$$

$\boxed{\textbf{i)}}$ Μελετάμε ως προς το πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$ τη συνάρτηση της διαφοράς $d(x) = f(x) - g(x)$ και αφού διατάξουμε τις f, g, δηλαδή βρούμε πχ ότι $f(x) \geq g(x)$ ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Αν η ισότητα δεν ισχύει παντού, τότε η διάταξη είναι γνήσια. Θυμίζουμε ξανά ότι έχουμε ως εργαλείο την παρακάτω βασική πρόταση :

Πρόταση 3. *Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

Αν μάλιστα η ισότητα δεν ισχύει παντού στο $[\alpha, \beta]$, τότε η διάταξη είναι γνήσια, δηλαδή:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

$\boxed{\textbf{ii)}}$ Θεωρούμε μια αρχική F της f, εφαρμόζουμε το θεμελιώδες θεώρημα και προσπαθούμε να μελετήσουμε κατάλληλη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία. Τη συνάρτηση αυτή την εντοπίζουμε από τη μορφή των ανισοτήτων που θα προκύψουν.

Εφαρμογη 1.3.1. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq x$
- $f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \ x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 3.$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$.

β) Να αποδείξετε ότι

$$\int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x)dx \ , \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Υποδειξη
Αρκεί να θεωρήσουμε μια αρχική F της f και να εκφράσουμε τα ολοκληρώματα ως διαφορές, με βάση το θεμελιώδες θεώρημα. Είναι επομένως :

$$\int_\alpha^{\alpha+1} f(x)dx < \int_{\alpha+1}^{\alpha+2} f(x)dx \iff$$

$$F(\alpha+1) - F(\alpha) < F(\alpha+2) - F(\alpha+1)$$

Η ανισότητα αυτή παίρνει τη μορφή

$$g(\alpha) < g(\alpha+1) \ \ (1),$$

όπου $g(x) = F(x+1) - F(x)$. Αλλά :

$$g'(x) = f(x+1) - f(x) > 0$$

διότι

$$f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}} > 0,$$

η f είναι τελικά γνησίως αύξουσα και έτσι η σχέση (1) είναι προφανής.

Εφαρμογη 1.3.2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Αν $\alpha > 0$, τότε

$$\int_\alpha^{3\alpha} f(t)dt < 2\alpha f(3\alpha).$$

Υποδειξη
α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, διότι

$$x + \sqrt{x^2+1} \geq x + \sqrt{x^2} \ \geq \ x + |x| \ \geq \ 0.$$

Βρίσκουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Θα εφαρμόσουμε την ισχυρή μέθοδο της αρχικής συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι η διαφορά των άκρων του ολοκληρώματος είναι $3\alpha - \alpha = 2\alpha$. Αν F είναι αρχική της f (υπάρχει διότι η f είναι συνεχής), τότε η δοσμένη σχέση, με βάση και το ΘΜΤ για την F στο διάστημα $[\alpha,\ 3\alpha]$, γράφεται:

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < 2\alpha f(3\alpha) \Leftrightarrow$$
$$F(3\alpha) - F(\alpha) < 2\alpha f(3\alpha) \Leftrightarrow$$
$$\frac{F(3\alpha) - F(\alpha)}{3\alpha - \alpha} < f(3\alpha) \Leftrightarrow$$
$$F'(\xi) < f(3\alpha) \Leftrightarrow$$
$$f(\xi) < f(3\alpha)$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στη μονοτονία της f. Πράγματι, η συνάρτηση f έχει παράγωγο:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0,$$

οπότε είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή $\alpha < \xi < 3\alpha$, θα είναι $f(\xi) < f(3\alpha)$ και η ζητούμενη αποδείχθηκε. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.
Αλλος τροπος.
Από τη μορφή του ολοκληρώματος θεωρούμε $\alpha \le t \le 3\alpha$ και από την μονοτονία της f παίρνουμε

$$f(\alpha) \le f(t) \le f(3\alpha)$$

χωρίς να ισχύει παντού η ισότητα. Επειδή η f είναι συνεχής, παίρνουμε:

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} f(\alpha)dt < \int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < \int_{\alpha}^{3\alpha} f(3\alpha)dt \Leftrightarrow$$
$$f(\alpha)(3\alpha - \alpha) < \int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < f(3\alpha)(3\alpha - \alpha) \Leftrightarrow$$
$$2\alpha f(\alpha) < \int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < 2\alpha f(3\alpha).$$

Άρα

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt < 2\alpha f(3\alpha)$$

Ας προσέξουμε ότι η ολοκλήρωση γίνεται παντού ως t (βάζουμε δηλαδή παντού dt).
Αλλος τροπος.
Θα αποδείξουμε αρχικά το δεύτερο σκέλος, δηλαδή ότι:

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} f(t)dt \le 2\alpha f(3\alpha).$$

Όμως

$$2\alpha = \int_{\alpha}^{3\alpha} 1 \cdot dt.$$

Έτσι, η ζητούμενη σχέση γράφεται

$$\int_{\alpha}^{3\alpha} (f(t) - f(3\alpha))dt \le 0,$$

η οποία, όπως περιγράψαμε και στα σχόλια, ισχύει διότι $\alpha \le t \le 3\alpha$, η f είναι γνησίως αύξουσα, γεγονός που δίνει ότι $f(t) \le f(3\alpha)$ και τέλος διότι η $h(t) = f(t) - f(3\alpha)$ είναι συνεχής, αλλά όχι παντού μηδέν. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και το άλλο σκέλος.

Σχολιο 2. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι:
Αν

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

τότε

$$3\alpha f(2\alpha) < \int_{2\alpha}^{5\alpha} f(t)dt < 3\alpha f(5\alpha)$$

για κάθε $\alpha \ne 0$.
Η απόδειξη να γίνει από το μαθητή με όλους τους παραπάνω τρόπους.

Εφαρμογη 1.3.3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και να αποδείξετε ότι

$$\int_0^3 f(t^2)dt < 9.$$

Υποδειξη Είναι:

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) =$$
$$\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Επίσης έχουμε :

$$f''(x) = -\frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3},$$

οπότε η συνάρτηση είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$.
Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(0,0)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = x,$$

οπότε αφού η συνάρτηση είναι κοίλη, από την σχέση γραφικής παράστασης και εφαπτομένης παίρνουμε: $f(x) \le x$ για κάθε $x \ge 0$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.
Επομένως παίρνουμε ότι $f(t^2) \le t^2$, η οποία με τη σειρά της, αφού δεν ισχύει παντού το ίσον, δίνει ότι:

$$\int_0^3 f(t^2)dt < \int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 9.$$

2 Το Ολοκλήρωμα και οι ανισότητες από τη σκοπιά του καθηγητή.

Στο 2ο μέρος θα εμπλουτίσουμε το άρθρο αυτό με θεωρία και εφαρμογές που δεν περιορίζονται σε σχολικό επίπεδο αλλά αφορούν τον καθηγητή των μαθηματικών.

2.1 Α. Ανισότητα Cauchy - Buniakovski-Schwarz

2.1.1 Α1. Θεωρητικό Μέρος

Προταση 4. *Αν $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, τότε:*

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \geq \left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2$$

Αποδειξη Από της ανισότητα

$$(\lambda f(x) - g(x))^2 \geq 0$$

παίρνουμε ότι:

$$\lambda^2 f^2(x) - 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως, από τη σχέση διάταξης και ολοκληρώματος προκύπτει ότι:

$$\lambda^2 \int_a^b f^2(x)dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx) \geq 0$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Αν τη σχέση αυτή τη δούμε ως ανίσωση 2ου βαθμού ως προς λ, από το γεγονός ότι ισχύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, παίρνουμε ότι : $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx$ που είναι η ζητούμενη.

Η ανισότητα αυτή παίρνει και την παρακάτω ισοδύναμη μορφή:

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,dx}$$

Για συντομία θα αναφερόμαστε σε αυτή την ανισότητα ως (C-B-S). Ισότητα έχουμε αν $g = 0$, με εξαίρεση ίσως ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων και f τυχαία συνάρτηση ή αν $f = kg$, $k \in \mathbb{R}$ με εξαίρεση ίσως ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων.

Παράδειγμα 1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι :

$$\left(\int_a^b f(x)\eta\mu x\,dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx\right)^2 \leq$$

$$(\beta-\alpha)\int_a^b f^2(x)dx$$

Αποδειξη. Σύμφωνα με την ανισότητα Cauchy Schwarz παίρνουμε:

- $\left(\int_a^b f(x)\eta\mu x\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \eta\mu^2(x)dx\right)$
- $\left(\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \sigma\upsilon\nu^2(x)dx\right)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\left(\int_a^b f(x)\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \leq$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \eta\mu^2(x)dx\right)$$

$$+\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \sigma\upsilon\nu^2(x)dx\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x)\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \leq$$

$$\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b \left(\eta\mu^2(x) + \sigma\upsilon\nu^2(x)\right)\right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x)\eta\mu x dx\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sigma\upsilon\nu x dx\right)^2 \leq$$

$$(b-a)\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)$$

Έτσι η ανισότητα αποδείχθηκε. Ας σημειώσουμε ότι η άσκηση ισχύει γενικότερα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και όχι απαραίτητα συνεχείς.

Παράδειγμα 2. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, να αποδειχθεί ότι :

$$\int_\alpha^\beta e^{f^2(x)}dx \cdot \int_\alpha^\beta e^{-f^2(x)}dx \geq \beta-\alpha$$

Αποδειξη.

$$\int_\alpha^\beta e^{f^2(x)}dx \cdot \int_\alpha^\beta e^{-f^2(x)}dx =$$

$$\int_\alpha^\beta \left(e^{\frac{f^2(x)}{2}}\right)^2 dx \cdot \int_\alpha^\beta \left(e^{-\frac{f^2(x)}{2}}\right)^2 dx \underset{C-B-S}{\geq}$$

$$\left(\int_\alpha^\beta e^{\frac{f^2(x)}{2}} \cdot e^{-\frac{f^2(x)}{2}} dx\right)^2 = \left(\int_\alpha^\beta 1dx\right)^2 = \beta-\alpha$$

Σχολιο 3. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}dx \ge 1,$$

αν και πρόκειται για εφαρμογή της παραπάνω για τη συνάρτηση $f(x)=x$. Πράγματι, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε :

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\cdot\int_0^1 e^{-x^2}dx =$$

$$\int_0^1\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2dx\cdot\int_0^1\left(e^{\frac{x^2}{2}}\right)^2dx$$

$$\underset{C-B-S}{\ge}\left(\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2=\left(\int_0^1 1dx\right)^2=1$$

2.1.2 Εφαρμογές

Εφαρμογη 2.1.1. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1)=0$ με f' συνεχή. Να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\ge 3\cdot\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2.$$

Λυση Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και παίρνουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x)'\cdot f(x)dx=$$

$$f(1)-\int_0^1 xf'(x)dx=-\int_0^1 xf'(x)dx$$

Με βάση τώρα την ανισότητα C-B-S, προκύπτει ότι :

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2=\left(\int_0^1 xf'(x)dx\right)^2\le$$

$$\int_0^1 x^2dx\cdot\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx=\frac{1}{3}\cdot\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx$$

Εφαρμογη 2.1.2. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx\ge\frac{7}{4}\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2.$$

Αποδειξη. Έχουμε

$$\int_0^1 x^3f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 xf(x)dx$$

οπότε

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\int_0^1 xf(x)dx\right)^2\le\int_0^1 x^6dx\cdot\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx=$$

$$\frac{1}{7}\cdot\int_0^1 f^2\left(x^2\right)dx\Rightarrow\int_0^1 f^2(x)\,dx\ge\frac{7}{4}\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2.$$

Εφαρμογη 2.1.3. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^1 xf(x)dx=0.$$

Αν F είναι αρχική της f με $F(0)=0$, να αποδειχθεί η ανισότητα :

$$\int_0^1 f^2(x)dx+5\cdot\int_0^1 F^2(x)dx\ge 12\cdot\int_0^1 f(x)\cdot F(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Επειδή $\int_0^1 xf(x)dx=0$, παίρνουμε:

$$0=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x\cdot F'(x)dx=F(1)-\int_0^1 F(x)dx.$$

Επομένως

$$F(1)=\int_0^1 F(x)dx,$$

και συνεπώς:

$$\int_0^1 f^2(x)d+5\cdot\int_0^1 F^2(x)dx\underset{C-B-S}{\ge}$$

$$\left(\int_0^1 f(x)\right)^2dx+5\cdot\left(\int_0^1 F(x)\right)^2=$$

$$F^2(1)+5\cdot F^2(1)=6F^2(1)=$$

$$12\int_0^1 f(x)F(x)\,dx.$$

Εφαρμογη 2.1.4. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^1 f(x)\,dx=0.$$

Να αποδειχθεί ότι:

$$2\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2\le\int_0^1\left(1-x^2\right)f^2(x)\,dx.$$

Αποδειξη. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και παίρνουμε :

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 f(t)\,dt \right) dx = \int_0^1 x' \left(\int_x^1 f(t)\,dt \right) dx = \int_0^1 x f(x)\,dx.$$

Στη συνέχεια, με βάση την παραπάνω ανισότητα C-B-S, μπορούμε να γράψουμε :

$$\left(\int_0^1 x f(x)\,dx \right)^2 = \left(-\int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt \right) \right)^2 \leq$$

$$\int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,dt \right)^2 dx \leq$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x 1^2 dt \cdot \int_0^x f^2(t)\,dt \right) dx$$

$$\int_0^1 x \cdot \left(\int_0^x f^2(t)\,dt \right) dx =$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \left(\int_0^x f^2(t)\,dt \right) dx =$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^1 f^2(x) - \int_0^1 x^2 f^2(x)\,dx \right) =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - x^2\right) f^2(x)\,dx$$

Επομένως

$$2 \left(\int_0^1 x f(x)\,dx \right)^2 \leq \int_0^1 \left(1 - x^2\right) f^2(x)\,dx.$$

Εφαρμογη 2.1.5. Αν η συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και επιπλέον

$$\int_a^b f(x) dx = f\left(\frac{a+b}{2} \right) = 0,$$

να αποδειχθεί ότι :

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx - (f(a) + f(b))^2 \geq \frac{8}{(b-a)^2} \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Αποδειξη. Παίρνοντας υπόψη ότι $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ και την ανισότητα C-B-S, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε :

$$\int_a^b (f(x))^2 dx =$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\left(\int_x^{\frac{a+b}{2}} f'(t)\,dt \right)^2 \right) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\left(\int_{\frac{a+b}{2}}^x f'(t)\,dt \right)^2 \right) dx \leq$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\left(\frac{a+b}{2} - x \right) \int_x^{\frac{a+b}{2}} \left(f'(t)\right)^2 dt \right] dx +$$

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right) \int_{\frac{a+b}{2}}^x \left(f'(t)\right)^2 dt \right] dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left[\left(\frac{a+b}{2} - x \right)^2 \int_x^{\frac{a+b}{2}} \left(f'(t)\right)^2 dt \right] dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left[\left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \int_{\frac{a+b}{2}}^x \left(f'(t)\right)^2 dt \right] dx$$

$$= \frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(f'(x)\right)^2 dx$$

$$-\frac{1}{2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^2 \left(f'(x)\right)^2 dx +$$

$$\frac{1}{8}(b-a)^2 \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(f'(x)\right)^2 dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(\frac{a+b}{2} - x \right)^2 \left(f'(x)\right)^2 dx.$$

Προκύπτει έτσι ότι:

$$\frac{1}{8}(b-a)^2 \int_a^b \left(f'(x)\right)^2 dx \geq$$

$$\int_a^b (f(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \left(f'(x)\right)^2 dx \geq$$

$$\int_a^b (f(x))^2 dx + \left(\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) f'(x)\,dx \right)^2 =$$

$$\int_a^b (f(x))^2 dx +$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}f(b)+\frac{b-a}{2}f(a)-\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 \underset{\int_a^b f(x)dx=0}{=}$$

$$\int_a^b (f(x))^2dx+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2(f(b)+f(a))^2,$$

Παίρνουμε επομένως ότι:

$$\int_a^b \left(f'(x)\right)^2dx-(f(a)+f(b))^2 \geq \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^b (f(x))^2dx.$$

Εφαρμογη 2.1.6. Αν $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$2|f(0)|\leq\int_0^1 f(x)dx,$$

να αποδειχθεί ότι

$$f^4(0)\leq\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$

Απόδειξη. Αν $t\in[0,1]$, τότε

$$|f(t)-f(0)|=$$

$$\left|\int_0^t f'(x)\,dx\right| \underset{C-B-S}{\leq}\sqrt{\int_0^1 (f'(x))^2dx}\Rightarrow$$

$$\int_0^1 |f(x)-f(0)|\,dt\leq\sqrt{\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx}.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση έχουμε

$$|f(0)|\leq\int_0^1 |f(x)-f(0)|\leq\sqrt{\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx}\Rightarrow$$

$$f^2(0)\leq\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx\ \ (1).$$

Επειδή ωστόσο

$$f(0)\geq 2|f(0)|\leq\int_0^1 f(x)dx,$$

παίρνουμε

$$f^2(0)\leq\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\leq\int_0^1 f^2(x)\,dx\ \ (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει:

$$f^4(0)\leq\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)dx\cdot\int_0^1\left(f'(x)\right)^2dx.$$

Εφαρμογη 2.1.7. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι :

$$\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 x^4f(x)\,dx\leq\frac{4}{15}\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Έστω $a\in\mathbb{R}^*$. Με τη βοήθεια της ανισότητας C-B-S, γράφουμε:

$$\int_0^1\left(ax^4+1\right)^2dx\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx\geq$$

$$\left(\int_0^1\left(ax^4+1\right)f(x)\,dx\right)^2=$$

$$\left(\int_0^1 ax^4f(x)\,dx\right)^2+2\left(\int_0^1 ax^4f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)+$$

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\underset{AM-GM}{\geq}4a\int_0^1 x^4f(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Από εδώ προκύπτει ότι :

$$\int_0^1 x^4f(x)\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx\leq\left(\frac{a}{36}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4a}\right)\cdot\int_0^1 f^2(x)\,.$$

Επειδή

$$\frac{a}{36}+\frac{1}{10}+\frac{1}{4a}\geq\frac{4}{15},$$

παίρνουμε ότι

$$\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 x^4f(x)\,dx\leq\frac{4}{15}\cdot\int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Εφαρμογη 2.1.8. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)dx+2\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\geq 3\int_0^1 f(x)dx\cdot\int_0^1 xf(x)dx.$$

Αποδειξη. Έστω $a \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε :

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f^2(x)dx + (2+3a)\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq$$

$$3\int\limits_0^1 f(x)dx \cdot \int\limits_0^1 (x+a)\,f(x)dx.$$

Αν θέσουμε $\int\limits_0^1 f(x)dx = t$, τότε:

$$(2+3a)\,t^2 - 3t\int\limits_0^1 (x+a)\,f(x)dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 0.$$

Επομένως

$$\Delta_t = 9\left(\int\limits_0^1 (x+a)\,f(x)\right)^2 - (2+3a)\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx \underset{C-B-S}{\leq}$$

$$9 \cdot \int\limits_0^1 (x+a)^2 \cdot \int\limits_0^1 f^2(x)\,dx - (2+3a)\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx =$$

$$(1+3a)^2\int\limits_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Επομένως, για $a = -\frac{1}{3}$ προκύπτει ότι $\Delta_t \leq 0$. Άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$:

$$(2+3a)\,t^2 - 3t\int\limits_0^1 (x+a)\,f(x)dx + \frac{1}{4}\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq 0.$$

Από την παραπάνω, αφού $\alpha = -\frac{1}{3}$, τελικά παίρνουμε :

$$\frac{1}{4}\int\limits_0^1 f^2(x)dx + 2\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \geq$$

$$3\int\limits_0^1 f(x)dx \cdot \int\limits_0^1 xf(x)dx.$$

2.2 Μονότονες – κυρτές θετικές συναρτήσεις

2.2.1 Θεωρητικό Μέρος

Στην ομάδα αυτή περιέχονται οι πιο βασικές ανισότητες που αφορούν το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιούνται για συνεχείς συναρτήσεις[1] και στη σχολική τάξη.

(α) Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ με $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(β) Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x) \leq g(x)$, , για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x).$$

(γ) Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση και $m \leq f(x) \leq M$, , για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$m\,(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M\,(b-a)\,.$$

(δ) Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε ισχύει:

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx.$$

(ε) Αν $f:[a,b] \to [0,\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ και $[c,d] \subset [a,b]$, τότε

$$\int\limits_c^d f(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx.$$

(στ) Αν $f:[a,b] \to [0,\infty)$ είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$ και υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ με $f(x_0) > 0$, τότε

$$\int\limits_a^b f(x)dx > 0.$$

Σχολια

Η απόδειξη των δύο πρώτων ερωτημάτων δεν θεωρούμε ότι είναι απαραίτητη μια και οι ανισότητες αυτές αποτελούν βασικά εργαλεία ακόμα και σε σχολικό επίπεδο. Θα μπορούσε όμως να χρησιμοποιήσει κανείς το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού και να γράψει:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \geq 0\,, \quad c \in (a,b).$$

αφού $f(x) \geq 0$, $x \in [a,b]$, και έτσι το συμπέρασμα είναι άμεσο. Προφανώς, η απόδειξη μπορεί να γίνει

[1] Ισχύουν όμως γενικότερα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.

και με τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος. Η ανισότητα (β) ανάγεται στο (α), αφού για τη συνάρτηση $h(x) = g(x) - f(x)$ ισχύει ότι $h(x) \geq 0, x \in [a,b]$ και έτσι:

$$\int_a^b h(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$$

Απόδειξη της ανισότητας (γ).

Επειδή

$$m \leq f(x) \leq M,$$

για κάθε $x \in [a,b]$, σύμφωνα με το (β) παίρνουμε:

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M\,dx \Leftrightarrow$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Απόδειξη της ανισότητας (δ).

Επειδή ισχύει η ανισότητα:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)$$

σύμφωνα με το (β) προκύπτει ότι:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx \Leftrightarrow$$

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Απόδειξη της ανισότητας (ε).

Είναι

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx \geq \int_c^d f(x)dx$$

αφού οι δύο άλλοι όροι είναι μη αρνητικοί.

Απόδειξη της ανισότητας (στ).

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 και $f(x_0) > 0$ υπάρχει διάστημα $[c,d] \subseteq [a,b]$, ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [c,d]$. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα είναι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)dx \geq$$

$$\int_c^d f(x)dx > 0$$

αφού πάλι με το ΘΜΤ για το ολοκλήρωμα στο $[c,d]$ μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε ότι $\int_c^d f(x)dx > 0$.

2.2.2 Εφαρμογές

Εφαρμογη 2.2.1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(a) = f(b) = 0$. Αν M είναι το μέγιστο της f δηλαδή $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ να αποδειχθεί ότι:

$$M \leq \frac{1}{2} \cdot \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t)\,dt \right| ,|f(x)| = \left| \int_x^b f'(t)\,dt \right|,$$

οπότε

$$2|f(x)| = \left| \int_a^x f'(t)\,dt \right| + \left| \int_x^b f'(t)\,dt \right| \leq$$

$$\int_a^x |f'(t)|dt + \int_x^b |f'(t)|dt = \int_a^b |f'(x)|dx,$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως

$$M \leq \frac{1}{2} \cdot \int_a^b |f'(x)|dx.$$

Εφαρμογη 2.2.2. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$. Αν M είναι το μέγιστο της f' δηλαδή $M = \max_{x \in [a,b]} f'(x)$, να αποδείξετε ότι :

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f(x)|dx - \left| \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq M$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |f(x)|dx - \left| \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Είναι επίσης :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^x (t-a)f'(t)\,dt - \int_x^b (b-t)f'(x)\,dt =$$

$$\int_a^b f(x)dx + (x-a) f(x) -$$

$$\int_a^x f(x)dx + (b-x) f(x) - \int_a^x f(x)dx =$$

$$(b-a) f(x),$$

από όπου προκύπτει ότι

$$|(b-a) f(x)| \leq$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx + \int_a^x (t-a)f'(t)\,dt - \int_x^b (b-t)f'(x)\,dt \right| \leq$$

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| + \int_a^x (t-a)\left|f'(t)\right| dt + \int_x^b (b-x)\left|f'(t)\right| dt,$$

Προκύπτει έτσι ότι

$$(b-a) \cdot \int_a^b |f(x)|dx - (b-a) \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq$$

$$\int_a^b \left(\int_a^x (t-a)\left|f'(t)\right| dt \right) dx + \int_a^b \left(\int_x^b (b-t)\left|f'(t)\right| dt \right) dx \leq$$

$$\frac{(b-a)^3}{3} \cdot M,$$

που είναι η ζητούμενη .

Εφαρμογη 2.2.3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με

$$\int_0^1 xf(x)dx = 0,$$

και $M = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ το μέγιστο της $|f|$ Να αποδειχτεί η ανισότητα:

$$\left| \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \right| \leq \frac{1}{6} \cdot M.$$

Αποδειξη. Ολοκληρώνουμε κατά παράγοντες και παίρνουμε :

$$\left| \int_0^1 x^2 f(x)dx \right| = \left| \int_0^1 x \left(\int_0^x tf(t)\,dt \right)' dx \right| =$$

$$\left| \int_0^1 \left(\int_0^x tf(t)\,dt \right) dx \right| \leq \int_0^1 \left(\int_0^x t\,|f(t)|\,dt \right) dx \leq M$$

$$\cdot \int_0^1 \left(\int_0^x tdt \right) dx = \frac{1}{2} M \cdot \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6} M.$$

Εφαρμογη 2.2.4. Έστω M το σύνολο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 \left|f'(x) - f(x)\right| dx \geq \frac{1}{e}, \text{ για κάθε } f \in M.$$

Αποδειξη. Επειδή

$$\left(e^{-x} f(x)\right)' = e^{-x} \left(f'(x) - f(x)\right), \text{ για κάθε } x \in [0,1],$$

γράφουμε :

$$\int_0^1 \left|f'(x) - f(x)\right| dx =$$

$$\int_0^1 e^{-x} \left|\left(e^x f(x)\right)'\right| dx \geq \int_0^1 \left|\left(e^{-x} f(x)\right)'\right| dx \geq$$

$$\left| \int_0^1 \left(e^{-x} f(x)\right)' dx \right| = \left|e^{-1} f(1)\right| = \frac{1}{e}.$$

Εφαρμογη 2.2.5. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο και $M = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ το μέγιστο της $|f'(x)|$. Να αποδειχθεί ότι

$$\left| \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \right| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \cdot M.$$

Αποδειξη. Έχουμε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (x-a)' f(x)\,dx =$$

$$(b-a) f(b) - \int_a^b (x-a) f'(x)\,dx.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $c_1 \in (a,b)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_a^b (x-a) f'(x)\,dx =$$

$$f'(c_1) \cdot \int_a^b (x-a)dx = f'(c_1) \frac{(b-a)^2}{2},$$

Από δω παίρνουμε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(b) - f'(c_1) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Ανάλογα, υπάρχει $c_2 \in (a,b)$ ώστε :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) f(a) - f'(c_1) \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Επομένως η ανισότητα που πρέπει να αποδείξουμε γράφεται:

$$\left|\left(\frac{a+b}{2}-a\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f'(c_1)\frac{(b-a)^2}{8}\right.$$

$$\left.-\left(b-\frac{a+b}{2}\right)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'(c_2)\frac{(b-a)^2}{8}\right|=$$

$$=\frac{(b-a)^2}{8}\left|f'(c_1)+f'(c_2)\right|\leq$$

$$2\cdot M\cdot\frac{(b-a)^2}{8}=\frac{(b-a)^2}{4}\cdot M.$$

Εφαρμογη 2.2.6. Αν $f,g:[0,1]\to(0,\infty)$ είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις, η f είναι αύξουσα και η g φθίνουσα, να αποδειχθεί ότι :

$$\frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx}\leq\frac{\int_0^1 g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx},$$

για κάθε $a\in[0,1)$.

Αποδειξη. Για $a=0$ η ζητούμενη ισχύει.
Έστω $a\in(0,1)$. Επειδή η f είναι αύξουσα και η g είναι θετική, παίρνουμε:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=\int_0^a f(x)g(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\leq$$

$$f(a)\int_0^a g(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Επίσης :

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\geq f(a)\int_a^1 g(x)\,dx\Rightarrow$$

$$f(a)\leq\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}.$$

Έτσι παίρνουμε ότι :

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\leq$$

$$\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}\int_0^a g(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx=$$

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\left(\frac{\int_0^a g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}+1\right)=$$

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\cdot\frac{\int_0^1 g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}$$

Από εδώ προκύπτει ότι:

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\cdot\int_a^1 g(x)\,dx\leq$$

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx\Rightarrow$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\leq\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}.$$

Επομένως :

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx=$$

$$\int_0^a f(x)g(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\geq$$

$$g(a)\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx.$$

Είναι ακόμα :

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx\leq g(a)\int_a^1 f(x)\,dx\Rightarrow$$

$$g(a)\geq\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx},$$

Οπότε :

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\geq$$

$$\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx}\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^1 f(x)g(x)\,dx=$$

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx \cdot \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx}.$$

Τελικά

$$\int_a^1 f(x)g(x)\,dx \cdot \frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx} \le$$

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \le$$

$$\frac{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx} \Rightarrow$$

$$\frac{\int_0^1 f(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)\,dx} \le \frac{\int_0^1 f(x)g(x)\,dx}{\int_a^1 f(x)g(x)\,dx} \le \frac{\int_0^1 g(x)\,dx}{\int_a^1 g(x)\,dx}.$$

Εφαρμογη 2.2.7. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή παράγωγο f'. Έστω m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάστησης $|f'(x)|$ στο $[0,1]$. Να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{m^2}{12} \le \int_0^1 f^2(x)dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2 \le \frac{M^2}{12}.$$

Αποδειξη. Για $x,y\in[0,1]$, με τη βοήθεια του θεωρήματος Lagrange, υπάρχει $c_{x,y}\in(\min(x,y),\max(x,y))$, τέτοιο ώστε :

$$(f(x)-f(y))^2 = \left(f'(c_{x,y})\right)^2 (x-y)^2 \Rightarrow$$

$$m^2(x-y)^2 \le (f(x)-f(y))^2 \le M^2(x-y)^2 \Rightarrow$$

$$m^2\int_0^1\left(\int_0^1 (x-y)^2dy\right)dx \le \int_0^1\left(\int_0^1 (f(x)-f(y))^2dy\right)dx \le$$

$$M^2\int_0^1\left(\int_0^1 (x-y)^2dy\right)dx \Rightarrow$$

$$\frac{m^2}{6} \le 2\left(\int_0^1 f^2(x)dx - \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2\right) \le \frac{M^2}{6}.$$

Εφαρμογη 2.2.8. Έστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f''(x)\ne 0$, για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{2}\cdot\int_0^2 f(x)dx \ne f(1).$$

Αποδειξη. Υποθέτουμε ότι $f''(x)>0$ γιά κάθε $x\in[0,2]$. Η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα. Ορίζουμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi:[0,2]\to\mathbb{R}$, με

$$\varphi(x) = \int_0^t f(x)\,dx - tf\left(\frac{t}{2}\right).$$

Έχουμε:

$$\varphi'(t) = f(t) - f\left(\frac{t}{2}\right) - tf'\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$\overset{\text{Lagrange}}{\underset{c_t\in\left(\frac{t}{2},t\right)}{=}} \frac{t}{2}\left(f'(c_t) - f'\left(\frac{t}{2}\right)\right) > 0,$$

οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως

$$\varphi(2) > \varphi(0) \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 f(x)dx > f(1).$$

Βιβλιογραφια

1. Χαρ. Στεργίου - Χρ. Νάκης, *Μαθηματικά Γ1*, Εκδόσεις Σαββάλας, 2015
2. Florin Stanescu, *Inegalitati Integrale*, Ed.Paralela 45
3. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., *Inequalities*, 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
4. Mitrinovic, D. S., *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
5. Mitrinovic, D. S., Pecaric , J. E., Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1993
6. Bechenbach, E. F., *Inequalities*, Springer, Berlin, 1983.
7. Constantin P. Niculescu, *An Introduction to Mathematical Analysis*, Universitaria Press, Craiova, 2005.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ τους εκλεκτούς συναδέλφους Χρήστο Κυριαζή και Φωτεινή Καλδή για τη συμβολή τους και σε αυτή την προσπάθεια.