Comment calculait-on il y a quatre mille ans?
chez les Babyloniens

Pierre Lescanne

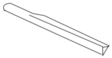
dernière mise à jour: *12 octobre 2016 – 14 : 34*

L'écriture cunéiforme

L'écriture, appelée cunéiforme, ≪en forme de coin≫,

- est formée de petits triangles tracés sur des tablettes d'argile.

- est tracée avec un calame, bâton de roseau.



Elle remonte à 3 000 av J. C.

carte

Cuneiform digital library initiative

Le site de la Cuneiform digital library initiative

- http://cdli.ucla.edu/
- (et son miroir http://cdli.mpiwg-berlin.mpg.de/),

associe les principaux musées du monde qui possèdent des tablettes cunéiformes et donne accès sous forme électronique à ces tablettes.

Un concurrent à l'initiative Google Print !

Cuneiform digital library initiative

Participants actuels

- Cuneiform Tablet Collection of the Hearst Museum of Anthropology, UC Berkeley, Californie,
- Hermitage Cuneiform Collection, St. Petersburg,
- Cuneiform Tablet Collection of the Institut Catholique de Paris
- Early Cuneiform of the Vorderasiatisches Museum, Berlin
- Cuneiform Tablets of the Iraq Museum
- Cuneiform Tablets of the Kelsey Museum of Archaeology, University of Michigan
- Cuneiform Tablet Collection of the Musées royaux d'Art et d'Histoire University of Southern California Archaeological Research Collection

Pourquoi le musée du Louvre n'y est-il pas associé ?

La tablette
VAT 12593

La tablette
VAT 12552

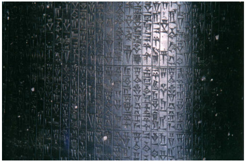
La tablette ICP 025

L'algorithmique babylonienne

L'on trouve déjà des tablettes très intéressantes du point de vue algorithmique dès la dynastie d'Hammourabi de -1 800 à -1 600.

Hammourabi

Hammourabi est très connu aussi pour son code qui est l'un des plus anciens documents de droit connu,



dont la stèle se trouve au musée du Louvre.

Le code d'Hammourabi

> *Si un architecte construit une maison pour quelqu'un, qu'il ne le fait pas proprement et que la maison s'écroule et tue son propriétaire, alors l'architecte doit mourir.*

Article 229

Une citation que devrait méditer certains concepteurs de logiciels. Lire ≪Le code de Hammurabi≫, par Béatrice André-Salvini *Musée du Louvre, Paris 2003,* Collection ≪Solo≫, n°27.

La numération

bases et chiffres

La numération des Babyloniens est sexagésimale,
c'est-à-dire qu'ils utilisent une base 60
(un héritage des Sumériens)

Nous en avons gardé

- les heures
- et les angles

Les chiffres

Il faut soixante chiffres (si l'on compte le zéro).

Une solution contemporaine aurait pu être :

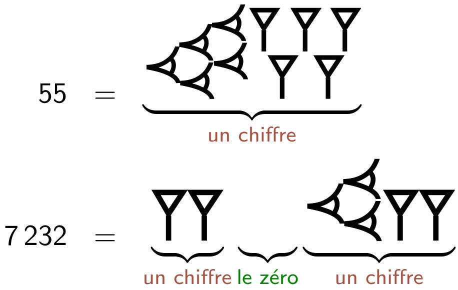
- les dix chiffres,
- les 24 majuscules (toutes sauf I et O), plus Ø
- les 25 minuscules (toutes sauf l),

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
L	M	N	Ø	P	Q	R	S	T	U
V	W	X	Y	Z	a	b	c	d	e
f	g	h	i	j	k	m	n	o	p
q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Quelle mémoire il aurait fallu pour les apprendre ! Pour noter tant de chiffres les Babyloniens utilisent un système décimal !

Les chiffres sont composites fondés sur une numération décimal.

- le signe 𒁹 pour le chiffre **un**,
- le signe 𒌋 pour le chiffre **dix**.


55 =
un chiffre
7 232 =
un chiffre
le zéro
un chiffre

Nous écrirons

$$
\begin{aligned}
55 &= [55] \\
7\,232 &= [2; 0; 32]
\end{aligned}
$$

Éléments historiques

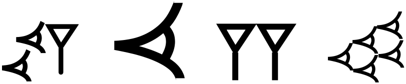
Les premiers à utiliser le système sexagésimal semblent avoir été les Sumériens au IIIe millénaire av. J.-C.

Il a beaucoup été utilisé par les astronomes et géographes grecs, tels Ptolémée ou Théon d'Alexandrie, qui nous laisse une méthode pour calculer les racines carrées de nombres écrits dans le système sexagésimal.

Par la suite, il a été utilisé également par les Arabes pendant la dynastie des Omeyyades et par des mathématiciens européens comme Fibonacci.


25

Le nombre sur la tablette ICP 25



soit

$$[21\,;\quad 10\,;\quad 2\,;\quad 50]$$

$$=$$

$$21 * 60^3 + 10 * 60^2 + 2 * 60 + 50$$

$$=$$

$$4\ 536\ 000 + 36\ 000 + 120 + 50$$

$$=$$

$$4\ 572\ 170$$

La numération

Le système de calcul des Babyloniens est
ce que les informaticiens appellent à virgule flottante,
donc avec exposant et mantisse.

Comme $6,0221367\ E23$.

Mais les Babyloniens n'écrivent pas les exposants.

S'ils avaient connu nos décimales, ils auraient écrit : 60221367.

La numération

Ainsi le nombre à deux chiffres : $[2; 20]$ signifie aussi bien

- $2 \times 60 + 20 = 140$,
- ou $2 + 20/60 = 2\frac{1}{3}$,
- ou $2/60 + 20/3600 = \frac{1}{30} + \frac{1}{180} = \frac{7}{180}$,
- ou $2 \times 60^2 + 20 \times 60 = 8\,400$,
- et plus généralement 140×60^n.

Le système est astucieux, car la virgule flottante est un excellent système pour multiplier et diviser,

comme le savent nos concepteurs d'ordinateurs. ☺

La numération

$$\begin{array}{lllllll}
 & 55 & = & 3\,300 & = & \frac{11}{12} & = [55] \\
\text{Donc} & 7\,232 & = & 120\quad\frac{8}{15} & & & = [2;0;32] \\
 & 4\,572\,170 & = & 76\,202\frac{5}{6} & & & = [21;10;2;50]
\end{array}$$

La numération

Le calculateur babylonien calcule avec des nombres qui ont un sens pour lui.

Il garde à l'esprit la bonne puissance de 60 en se fiant sur son intuition.

Les inverses

Les tables d'inverses jouent un rôle fondamental, car elles permettent d'effectuer systématiquement les divisions.

Des douzaines de tablettes d'inverses ont été retrouvées jusqu'à la dynastie Ur III de 2 250 avant J.C.

Les inverses

2	30	16	3; 45	45	1; 20
3	20	18	3; 20	48	1; 15
4	15	20	?	50	1; 12
5	12	24	?	54	1; 6; 40
6	10	25	?	1	1
8	7; 30	27	?	1; 4	56; 15
9	6; 40	30	?	50	
10	6	32	?	1; 15	48
12	5	36	1; 40	1; 20	45
15	4	40	30	1; 21	44; 26; 40

Les inverses

$$
\begin{array}{lcl}
20 & \rightsquigarrow & 60/20 = 3 \\
24 & \rightsquigarrow & 60/24 = 2 + 12/24 = 2 + 1/2 = 2;30 \\
25 & \rightsquigarrow & 60/25 = 2 + 10/25 = 2 + 2/5 = 2 + 24/60 = 2;24 \\
27 & \rightsquigarrow & 60/27 = 2 + 6/27 = 2 + 2/9 = 2 + 800/3600 \\
 & = & 2 + 780/3600 + 20/3600 = 2 + 13/60 + 20/60 = 2;13;20 \\
30 & \rightsquigarrow & 2 \\
32 & \rightsquigarrow & 1;28/32 = 1 + 7/8 = 1 + 3150/3600 \\
 & & = 1 + 52/60 + 30/3600 = 1;52;30
\end{array}
$$

Les inverses

2	30	16	3; 45	45	1; 20
3	20	18	3; 20	48	1; 15
4	15	20	3	50	1; 12
5	12	24	2; 30	54	1; 6; 40
6	10	25	2; 24	1	1
8	7; 30	27	2; 13; 20	1; 4	56; 15
9	6; 40	30	2	1; 12	50
10	6	32	1; 52; 30	1; 15	48
12	5	36	1; 40	1; 20	45
15	4	40	30	1; 21	44; 26; 40

L'algorithmique babylonienne

Pas de formules algébriques, mais la description étape par étape d'un processus de calcul.

L'auteur décrit un véritable algorithme à partir d'un exemple.

Un calcul de citerne

La tablette BM 85200 + VAT 6599

Cette tablette a été cassée :

- la moitié est au British Museum,
- un quart au musée du moyen orient de Berlin,
- le reste a été perdu ou détruit.

Une citerne (rectangulaire).

La hauteur est $3;20$ et un volume de $27;46;40$ a été creusé.

La longueur dépasse la largeur de 50. $L - l = 50$

Le but est de trouver la longueur et la largeur.

Prends l'inverse de la hauteur $3;20$ pour obtenir 18.

Multiplie ce nombre par le volume $27;46;40$ et tu obtiens $8;20$. On connaît maintenant $L - l = 50$ et $L \times l = 8;20$.

Prends la moitié de 50 et calcule son carré, tu obtiens $10;25$.

Ajoute $8;20$ et tu obtiens $8;30;25$.

Le calculateur rétablit l'exposant. $(\frac{L-l}{2})^2 + (L \times l) = (\frac{L+l}{2})^2$

La racine carrée est $2;55$. $\frac{L+l}{2}$.

Fais deux copies de ce nombre, tu ajoutes 25 au premier et tu le retires du second. $\frac{L+l}{2} + \frac{L-l}{2} = L$ $\frac{L+l}{2} - \frac{L-l}{2} = l$.

Tu trouves que $3;20$ est la longueur et $2;30$ est la largeur.

Ceci est la procédure.

Un autre calcul de citerne

Une citerne.

La longueur (en cubits) égale la hauteur (en jarre)

1 jarre = 12 cubits.

Un certain volume de terre a été creusé.

L'aire de la section (en cubits carrés) plus le volume (en cubits cubes) donne $1;10$. $(L \times l) + (L \times l \times h) = 1;10$

La longueur est 30. Quelle est la largeur ?

Tu dois multiplier la longueur 30 par 12, tu obtiens 6 ; c'est la hauteur. $h = 6$

Ajoute 1 à 6, tu obtiens 7 $h + 1 = 7$

L'inverse n'existe pas ;
qu'est-ce qui donne $1;10$ quand on le multiplie par 7 ?
10 convient. $L \times l = \frac{(L \times l) + (L \times l \times h)}{h+1} = 10 = \frac{1}{6}$

Prends l'inverse de 30, tu obtiens 2. $\frac{1}{L} = 2.$

Multiplie 10 par 2, tu obtiens la largeur, 20. $(L \times l) \times \frac{1}{L} = \frac{1}{3}.$

Ceci est la procédure.

Divisions par 7 et autres divisions

On a besoin de diviser par 7,
mais l'inverse de 7 n'existe pas dans les tables.

Cela indique que dans ce cas
les tables de multiplication étaient utilisées à l'envers.

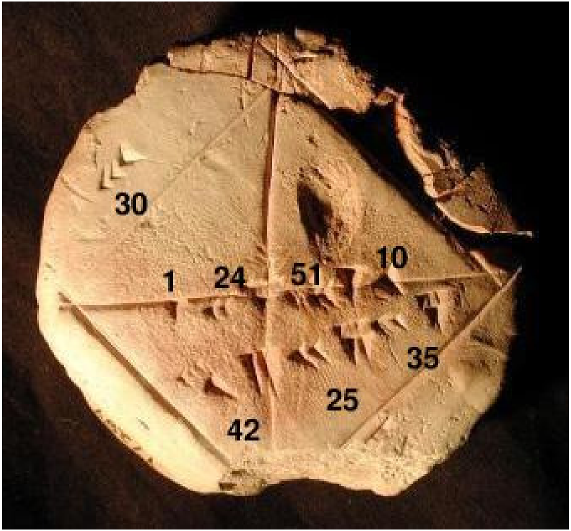
Pour des divisions plus difficiles, une formulation légèrement différente était utilisée (utilisaient-ils une procédure spécifique ?)

De toutes façons les Babyloniens étaient capables de calculer des divisions comme

$$7 \div [2;6] \qquad [28;30] \div 19 \qquad [10;12;45] \div [40;51].$$

La tablette YBC 7289

La tablette YBC 7289



La tablette YBC 7289

Sur le coté supérieur gauche du carré soit 30, ou encore $\frac{1}{2}$.

Sur la diagonale soit $[1; 24; 51; 10]$.

Puis en dessous soit $[42; 25; 35]$.

La tablette YBC 7289

- $[1;24;51;10] = \frac{30547}{21600} \sim 1,41421296$
  est une excellente approximation de $\sqrt{2} \sim 1,4142135$.

- $[42;25;35] = \frac{30547}{43200} \sim 0,7071064$
  est une excellente approximation de $\sqrt{\frac{1}{2}} \sim 0,7071067$.

D'autre part, on sait que $\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

référence

Plan

La période Séleucide

L'ère Séleucide, et la période de gouvernement de Séleucos (358-281 av. J.-C.), général d'Alexandre le Grand, roi de Babylone.

Pas de tablettes de 1 600 av J.C à 300 av J.C.

Mais Un grand nombre de tablettes à la période Séleucide :

- l'usage du zéro a été introduit,
- la tradition de l'ancien Babylonien a été conservée,
- les mathématiques sont plus avancées.

Au delà de la présentation d'algorithmes par des exemples

- Les algorithmes y sont beaucoup plus élaborés.
- L'algorithme qui suit (BM 34568) est de cette période
- Deux versions sur des exemples et une version ≪abstraite≫.

Longueur, largeur et diagonale : première version

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est $1;10$
et l'aire est 7. $L + l + d = 1;10$ et $L \times l = 7.$
Quelle sont la longueur, la largeur et la diagonale correspondantes ?
Les quantités sont inconnues.
$1,10$ fois $1;10$ vaut $1;21;40$. $(L + l + d)^2 = 1;21;40$
7 fois 2 vaut 14. $2(L \times l) = 14$
Retire 14 de $1;21;40$, reste $1;7;40$.
$$(L + l + d)^2 - 2(L \times l) = 2d(L + l + d) = 1;7;40$$
$1;7;40$ fois 30 vaut $33;50$. $d(L + l + d) = 33;50$
Par quoi doit-on multiplier $1;10$ pour obtenir $33;50$?
$1;10$ fois 29 égale $33;50$. $\frac{d(L+l+d)}{L+l+d} = 29.$
29 est la diagonale.

$$
\begin{aligned}
(L+l+d)^2 - 2(L\times l) &= L^2 + l^2 + d^2 + 2(L\times d) + 2(l\times d)\\
&= d^2 + d^2 + 2(L\times d) + 2(l\times d)\\
&= 2d(L+l+d).
\end{aligned}
$$

Les Babyloniens connaissaient la formule de Pythagore
1 000 ans avant Pythagore lui-même !

L'algorithme ne dit pas comment calculer L et l, qui nécessite de résoudre

$$
\begin{aligned}
L\times l &= a\\
L+l &= b.
\end{aligned}
$$

Clairement les Babyloniens savaient le faire.

Longueur, largeur et diagonale : deuxième version

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est 12
et l'aire est 12.

Quelle sont la longueur, la largeur et la diagonale correspondantes ?

Les quantités sont inconnues.

12 fois 12 vaut 2; 24.

12 fois 2 vaut 24.

Retire 24 de 2; 24, reste 2.

2 fois 30 vaut 1.

Par quoi doit-on multiplier 12 pour obtenir 1 ?

12 fois 5 égale 1.

5 est la diagonale.

Longueur, largeur et diagonale : troisième version

La somme de la longueur, de la largeur et de la diagonale est 1
et l'aire est 5.
Multiplie la longueur, la largeur et la diagonale par la longueur, la largeur et la diagonale.
Multiplie l'aire par 2.
Soustrait le produit et multiplie ce qui reste par un demi.
Par quoi doit-on multiplier la somme de la longueur, la largeur et la diagonale pour obtenir ce produit ?

La diagonale est ce facteur.

La dernière version est la même, mais sans nombres.
On a l'impression que l'auteur ne sait pas quelle puissance de 60 attribuer aux données du problème.

Il y a une solution entière avec $L + l + d = 1 * 60$ et $L \times l = 5 * 60$.

Ça ressemble à une copie d'examen où l'étudiant aurait été incapable de résoudre l'application numérique.

Un autre algorithme sans nombres

Ces présentations d'algorithmes sont rares.
En voici cependant une de la période babylonienne ancienne (Louvre tablette A0 6770).

La (somme de la) longueur et la largeur est égale à l'aire.
Tu dois faire comme suit.
Fais deux copies du paramètre.
Retire 1. $L - 1$
Forme l'inverse. $1/(L - 1)$
Multiplie par le paramètre que tu as copié. $L/(L - 1)$
Cela donne la largeur. $l = L/(L - 1)$

En effet, si $L + l = L \times l$
on a $(L - 1) \times l = L$ et $l = L/(L - 1)$.

Commentaires

Cet algorithme est longtemps resté obscur.
Le fait de copier les résultats fonctionne comme un machine à pile.
Cela démontre que le processus de calcul détruisait les opérandes.

On trouve aussi la phrase ≪Garde ce nombre dans ta tête≫

C'est l'idée de mémoire en informatique.

et la phrase

≪*Remplace la somme de la longueur et de la largeur par 30 fois elle-même*≫.

C'est l'affectation $x := x/2$.

Des sommations

Deux extraits d’une tablette AO 6484 du Musée du Louvre

La somme des puissances de 2

De 1 à 10 somme les puissances de 2.
Le dernier terme que tu ajoutes est $8;32$.
Soustrais 1 de $8;32$, tu obtiens $8;31$.
Ajoute $8;31$ à $8;32$, tu obtiens la réponse $17;3$.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^n + (2^n - 1).$$

La somme des carrés (tablette AO 6484 du Musée du Louvre)

Les carrés de 1×1 à 10×10 ; quelle est leur somme ?
Multiplie 1 par 20, donne 20. $\frac{1}{3}$
Multiplie 10 par 40, donne $6;40$. $\frac{2}{3}n$
$6;40$ plus 20 est 7. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$
Multiplie 7 par 55 (qui est la somme de 1 à 10), tu obtiens $6;25$.
$(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n)\sum_{k=1}^{n} k$

$6;25$ est la somme désirée.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \quad = \quad (\frac{1}{3}+\frac{2}{3}n)\sum_{k=1}^{n} k.$$

Tables d'inverses à 6 «chiffres»

La table d'Inakibit-Anu : table du Musée du Louvre AO 6456.

Par le pouvoir de Anu et Antum, ce que j'ai fait avec mes mains, qu'il reste intact.

Tables d'inverses à 6 «chiffres»

1	1	
1; 0; 16; 53; 53; 20	59; 43; 10; 50; 52; 48	
1; 0; 40; 53; 20	59; 19; 34; 13; 7; 30	
1; 0; 45	59; 15; 33; 20	
1; 1; 2; 6; 33; 45	58; 58; 56; 33; 45	devrait être 58;58;56;38;24
1; 1; 26; 24	58; 35; 37; 30	
1; 1; 30; 33; 45	58; 31; 39; 35; 18; 31; 6; 40	
2; 46; 40	21; 36	
2; 48; 45	21; 20	
2; 55; 46; 52; 30	20; 28; 48	
2; 57; 46; 40	20; 0; 15	devrait être 20;15

Quelques statistiques

105 entrées.

75% de toutes les possibilités à 6 chiffres.

La table contient 20 entrées qui ont plus de 6 chiffres.

Elle ne liste que 31 des 87 entrées possibles qui commencent par 2.

- Manque d'espace !
- Manquent des cas simples comme $2;30$ et de $2;40$.

Comment la table est-elle construite ?

La table d'Inakibit-Anu contient 20 entrées qui ont plus de six chiffres sexagésimaux. Ils proviennent probablement d'une autre table, car on y trouve :

$$\{2^{17}, 30^{17}\}, \quad \{2^{23}, 30^{23}\}$$

$$\{3^{11}, 20^{11}\}, \quad \{3^{18}, 20^{18}\}, \quad \{3^{22}, 20^{22}\}, \quad \{3^{23}, 20^{23}\}$$

ainsi que tous les $\{2^k, 30^k\}$ et les $\{3^k, 20^k\}$ pour lequel

- l'un des éléments a un chiffre principal 1 ou 2
- et pour lequel le plus petit élément a au plus 6 chiffres.

Comment la table est-elle construite ?

La procédure plus simple consiste à partir de $(1, 1)$ et ensuite à précéder répétitivement
de (x, y) à $(2x, 30y)$, $(3x, 20y)$ et $(5x, 12y)$. Il semble

qu'Inakibit-Anu ait procédé ainsi. Pour construire une table à 6

chiffres
il faut engendrer 721 pairs (x, y). La complétude relative des

trois premières colonnes montre qu'Inakibit-Anu a préparé une base de données
de 500 paires (x, y). Mais ensuite il faut trier ces entrées !

Plan

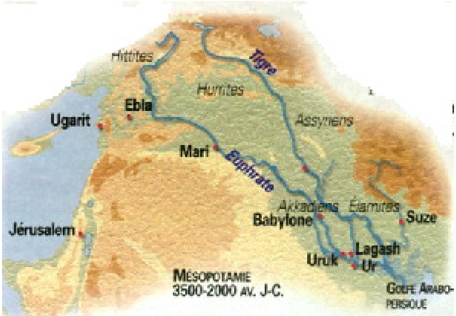
Conclusion

- Les Babyloniens étaient de redoutables algorithmiciens.
- Ils calculaient en virgule flottante sur des nombreux prodigieusement grands.
- Ils connaissaient la mise en mémoire et l'affectation.

Merci à Donald Knuth pour son article
Ancient Babylonian Algorithms
paru dans son livre Selected papers on computer science

traduit en français sous le titre Algorithmes babyloniens anciens dans le livre Éléments pour une histoire de l'informatique (par Donald E. Knuth, traduit par P. Cégielski)

Pour compléter cela et connaître les récents développements de l'étude de l'algèbre babylonienne, on pourra lire.
Jens Høyrup, L'algèbre au temps de Babylone,
Vuibert/Adapt, coll. « Inflexions », août 2010,


Hittites
Tigre
Hurrites
Ebla
Ugarit
Assyriens
Mari
Euphrate
Akkadiens
Élamites
Babylone
Suze
Jérusalem
Lagash
Uruk
Ur
MÉSOPOTAMIE
3500-2000 AV. J-C.
GOLFE ARABO-
PERSIQUE

retour

Bases et chiffres

Nous utilisons la numération de position
avec une base qui peut varier.

En base dix, on a dix chiffes $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0$.
Un nombre en numération décimale comme 354
signifie $3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 4$.

La position de gauche à droite d'un chiffre indique la puissance dont il doit être affecté pour former le nombre.

A gauche, on a les chiffres de poids forts
et à droite, les chiffres de poids faible.

Bases et chiffres

La base deux donne la numération binaire.
On a deux chiffres $0, 1$.
Le nombre $58 = 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2$ se note 111010.

La base seize donne la numération hexadécimale.
On a seize chiffres $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.
La numération hexadécimale est commode pour noter de façon compacte les nombres écrits sur seize bits (seize chiffres binaires), soit 4×4, donc il suffit de quatre chiffres hexagésimaux.

Le nombre

$$\begin{aligned} 3\,040 &= 2816 + 224 + 10 \\ &= 11 \times 256 + 14 \times 16 + 10 \\ &= 11 \times 16^2 + 14 \times 16 + 10 \end{aligned}$$

se note BEA.

retour

Référence sur la tablette YBC 7289

Fowler, D.H. and Robson, E.R. (1998).
Square root approximations in Old Babylonian mathematics : YBC 7289 in context.
Historia Mathematica 25, 366-378.

retour

A propos de la tablette ICP 25

Primary Publication	TRU 025 , Legrain, L. (1912)
Collection	Institut Catholique, Paris, France
Museum no.	ICP 025
CDLI no.	P134789
Join status	work in progress
Provenience	Drehem
Genre	Administrative
Period	Ur III
Date of Origin	SH.44.02.12
Measurements (mm)	31x28x15

Elle est écrite en sumérien et semblerait traiter d'apport de petit bétail.

A propos de la tablette VAT 12593

Primary Publication	SF 082 , Deimel, A. (1923)
Publication history	MKT I, 92 ; OIP 99, p. 39 ; Powell 1976, 430f. ; Friberg 1987-90, 540
Collection	Vorderasiatisches Museum, Berlin
Museum no.	VAT 12593 +
CDLI no.	P010678
Join status	work in progress
Provenience	Fara
Genre	Mathematical
Period	ED

A propos de la tablette VAT 12552

Primary Publication	WF 130 , Deimel, A. (1924)
Publication history	Edzard 1976, 190 ; EDATS p. 4 (21)
Collection	Vorderasiatisches Museum, Berlin
Museum no.	VAT 12552
CDLI no.	P011088
Join status	work in progress
Provenience	Fara
Genre	Administrative
Period	ED IIIa