Potprostori

2

U dosadašnjim smo razmatranjima već naveli značajan broj primjera vektorskih prostora. Između ostalih, to su bili prostori svih matrica određenog tipa, prostori svih polinoma do nekog fiksnog stupnja, kao i prostori svih uređenih n-torki realnih, odnosno kompleksnih brojeva. Međutim, možemo se pitati moramo li uvijek promatrati *sve* matrice određenog tipa, *sve* polinome do nekog stupnja, odnosno *sve* uređene n-torke brojeva?

U konkretnoj situaciji mogu nam od interesa biti, na primjer, samo polinomi stupnja najviše 5 kojima je 1 nultočka ili možda samo oni čiji je graf simetričan s obzirom na y-os, možda oni koji imaju oba ova svojstva ili, pak, barem jedno od njih. Hoće li i takvi skupovi biti vektorski prostori?

Neka je M podskup od $\mathcal{P}_5$ s nekim od navedenih svojstava. S obzirom na to da je $\mathcal{P}_5$ vektorski prostor, elemente od $\mathcal{P}_5$, pa onda i one iz M, znamo zbrajati i množiti skalarima. To su svakako znakovi koji idu u prilog tome da bi i sam M mogao biti vektorski prostor, sadržan u većem prostoru $\mathcal{P}_5$. Čak i u situacijama kada M ne bude vektorski prostor, možemo pokušati naći neki prostor unutar $\mathcal{P}_5$ koji ga sadrži, a koji je ipak manji od $\mathcal{P}_5$.

Prelazak na manji prostor ima nekoliko prednosti. Kao prvo, na taj način iz razmatranja isključujemo (sve ili neke) elemente koji nam nisu od interesa. Kao drugo, naša razmatranja optimiziraju se u smislu da taj manji prostor ima manju dimenziju, dakle njegova baza ima manji broj elemenata, a onda i zapisi njegovih elemenata zahtijevaju manji broj koeficijenata u svojim prikazima pomoću baze.

2.1 *Definicija i primjeri*

Pojam potprostora je intuitivno jasan – kao što podskup predstavlja skup sadržan u nekom većem skupu, tako očekujemo i da potprostor predstavlja vektorski prostor sadržan u nekom većem vektorskom prostoru. Međutim, moramo biti pažljivi jer vektorski prostor nije samo skup, nego skup s dvjema operacijama koje zadovoljavaju određene uvjete. Zato treba navesti koje su to operacije uz koje promatramo taj manji vektorski prostor. Naravno, prirodno je da su to upravo one operacije $+$ i $\cdot$ koje su zadane na većem vektorskom prostoru, odnosno njihove odgovarajuće restrikcije.

Definicija 2.1.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $M \subseteq V$. Ako je M i sam vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ s obzirom na iste operacije zbrajanja i množenja skalarima definirane na V, tada kažemo da je M **potprostor** od V. Pišemo $M \leq V$.

Kada provjeravamo da je neki neprazan skup vektorski prostor, onda na njemu moramo imati operacije zbrajanja i množenja skalarima i te operacije moraju zadovoljavati sve što se traži u definiciji 1.1. U situaciji kada provjeravamo je li *podskup vektorskog prostora* i sam vektorski prostor s obzirom na iste operacije kao na ambijentnom prostoru, onda je dio posla oko provjere već obavljen: ne samo da znamo zbrajati i množiti skalarima elemente tog podskupa, nego su i neka od traženih svojstava već ispunjena. Sada ćemo istražiti koji su minimalni uvjeti koje treba provjeriti u ovoj situaciji.

Pretpostavimo da je M neprazan podskup vektorskog prostora V. S obzirom na to da je svaki element iz M ujedno i element iz V, znamo zbrajati elemente iz M i množiti ih skalarima, odnosno možemo promatrati restrikciju operacije zbrajanja $+ : V \times V \to V$ na $M \times M$ te restrikciju operacije množenja skalarima $\cdot : \mathbb{F} \times V \to V$ na $\mathbb{F} \times M$. Na ovaj način dobivamo preslikavanja

$$+ : M \times M \to V, \quad \cdot : \mathbb{F} \times M \to V.$$

Nadalje, očito vrijede sljedeća svojstva:

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ za sve $a, b, c \in M$[1]

(2) postoji element $0 \in V$ takav da vrijedi $a + 0 = 0 + a = a$ za svaki $a \in M$

(3) za svaki $a \in M$ postoji element $-a \in V$ takav da je $a + (-a) = (-a) + a = 0$

(4) $a + b = b + a$ za sve $a, b \in M$

(5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ za sve $a \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(6) $1 \cdot a = a$ za svaki $a \in M$

(7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $a \in M$

(8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a, b \in M$.

[1] S obzirom na to da je V vektorski prostor, za sve $a, b, c \in V$, pa posebno i za $a, b, c \in M$, vrijedi jednakost $(a + b) + c = a + (b + c)$. Na isti način zaključujemo da vrijede svojstva (4)–(8), te da za svaki $a \in M$ vrijedi $a + 0 = 0 + a = a$, kao i $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Ovdje smo crvenom bojom naglasili dijelove koji nedostaju kako bismo mogli zaključiti da je M vektorski prostor. Dakle, treba provjeriti da je:

(i) skup M zatvoren na operacije zbrajanja i množenja skalarima (jer jedino tada za kodomene zbrajanja i množenja skalarima na M možemo staviti skup M)

(ii) element 0 pripada skupu M[2]

(iii) za svaki $a \in M$ njegov suprotni element $-a$ pripada skupu M.

U sljedećoj propoziciji dokazujemo da se ova lista može dodatno reducirati, točnije, da svojstva (ii) i (iii) slijede iz svojstva (i).

[2] Možda ćemo se zapitati može li M imati neki "svoj" nulvektor, dakle $n \in M$ takav da je $n + a = a + n = a$ za svaki $a \in M$, koji nije jednak neutralnom elementu 0 za zbrajanje na cijelom V. Lako vidimo da se to ne može dogoditi. Naime, ako je $n \in M$ takav da je $a + n = a$ za neki $a \in M$, tada za $a, n, 0 \in V$ vrijedi $a + n = a + 0$, odakle slijedi $n = 0$. Dakle, ako za zbrajanje na M postoji neutralni element (u M), tada to mora biti 0.

Slično zaključujemo i za svojstvo (iii).

Propozicija 2.1.

Neka je V vektorski prostor. Neprazan podskup M od V je potprostor od V ako i samo ako vrijedi sljedeće:

(a) Ako su $a, b \in M$, tada je $a + b \in M$.

(b) Ako su $a \in M$ i $\alpha \in \mathbb{F}$, tada je $\alpha a \in M$.

Drugim riječima, neprazan podskup vektorskog prostora je njegov potprostor ako i samo ako je zatvoren na operacije zbrajanja i množenja skalarima.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijede svojstva (a) i (b), to jest da je M zatvoren na operacije zbrajanja i množenja skalarima. Uzimajući u obzir diskusiju koja je prethodila ovoj propoziciji, dovoljno je provjeriti da vrijede svojstva (i)–(iii). Očito su svojstva (a) i (b) upravo jednaka svojstvu (i). Ako sada uzmemo neki $a \in M$ (M je neprazan skup, pa takav a sigurno postoji), tada iz (b) slijedi da $0 \cdot a$ pripada skupu M, dakle $0 \in M$. Također, iz (b) slijedi da za svaki $a \in M$ i element $-a = (-1) \cdot a$ pripada skupu M. Time smo dokazali da vrijede svojstva (ii) i (iii).

Obratno, ako je M potprostor od V, tada je on, kao i svaki vektorski prostor, neprazan skup koji je zatvoren na operacije zbrajanja i množenja skalarima. ■

Svojstva (a) i (b) iz prethodne tvrdnje možemo provjeravati u jednom koraku.

Korolar 2.2.

Neprazan podskup M vektorskog prostora V je potprostor od V ako i samo ako vrijedi

(c) Ako su $a, b \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada je $\alpha a + \beta b \in M$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $M \leq V$. Tada je M vektorski prostor, dakle, sadrži sve linearne kombinacije svojih elemenata. Zato, ako su $a, b \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada $\alpha a + \beta b$ pripada skupu M.

Obratno, pretpostavimo da vrijedi (c), to jest da M sadrži sve linearne kombinacije $\alpha a + \beta b$ svojih elemenata a i b. Odabirom $\alpha = \beta = 1$ dobivamo da je $a + b \in M$, a odabirom $\beta = 0$ da je $\alpha a \in M$. Kako ovo vrijedi za sve $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a, b \in M$, dokazali smo (a) i (b) iz prethodne propozicije, odakle slijedi da je M potprostor od V. ■

Sljedeći korolar lako se dokaže matematičkom indukcijom.

Korolar 2.3.

Neprazan podskup M vektorskog prostora V je potprostor od V ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ te sve $a_1, \ldots, a_n \in M$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ vrijedi $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \in M$.[3]

[3] Neprazan podskup vektorskog prostora je njegov potprostor ako i samo ako sadrži sve linearne kombinacije svojih elemenata.

Sada navodimo neke primjere potprostora.

Primjer 2.1.

- Svaki vektorski prostor V ima potprostore jer su $\{0\}$ i V potprostori od V. Nazivamo ih **trivijalnim potprostorima** od V. Netrivijalne potprostore vektorskog prostora nazivamo **pravim potprostorima** (kasnije ćemo dokazati da takvi postoje u svakom prostoru dimenzije barem 2).

- Skup $M = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ je potprostor od $\mathbb{R}^3$. Za provjeru primijenimo korolar 2.2.

  Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ovdje je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$) i $a, b \in M$. Prema opisu skupa M, a i b su uređene trojke realnih brojeva čija je treća koordinata jednaka 0, dakle, $a = (x_1, x_2, 0)$ i $b = (y_1, y_2, 0)$ za neke $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

  $$\alpha a + \beta b = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, 0).$$

  Kako su $\alpha x_1 + \beta y_1$ i $\alpha x_2 + \beta y_2$ realni brojevi, slijedi da je $\alpha a + \beta b$ uređena trojka realnih brojeva čija je treća koordinata 0, te zato $\alpha a + \beta b \in M$. Time smo dovršili provjeru.

- Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \leq n$ vrijedi $\mathcal{P}_k \leq \mathcal{P}_n$.

- Skup $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$ nije potprostor od $\mathbb{R}^3$. Dovoljno je uočiti da su $(1, 0, 0)$ i $(0, 1, 1)$ elementi skupa M, a njihov zbroj $(1, 1, 1)$ očito nije u M.[4]

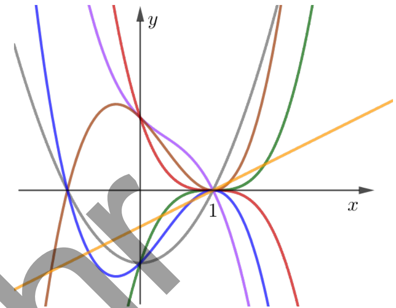
[4] Skicirajte skup M u $\mathbb{R}^3$ i grafički objasnite zašto M nije potprostor od $\mathbb{R}^3$.

- Za skup $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 1\}$ još je lakše provjeriti da nije potprostor od $\mathbb{R}^3$. Naime, nulvektor $(0,0,0)$ ne pripada M, što bi moralo biti da je M potprostor od $\mathbb{R}^3$.

- Promatrajmo sada skup svih realnih polinoma stupnja najviše 3 kojima je 1 nultočka, dakle

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}.$$

  Neka su $p, q \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada su $p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i vrijedi $p(1) = q(1) = 0$, pa je $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i $(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = 0$. Ovo znači da je $\alpha p + \beta q \in M$. Time smo pokazali da je $M \leq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.



$M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(1) = 0\}$

- Neka je $\mathbb{R}^{[0,1]}$ realni vektorski prostor svih funkcija $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uz operacije po točkama. Promatramo skupove

$$M = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(0) = f(1)\},$$
$$L = \{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(0) = 1\}.$$

  Skup L nije vektorski prostor jer nulfunkcija (neutralni element u $\mathbb{R}^{[0,1]}$) nije u L.

  Za $f, g \in M$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je $f(0) = f(1)$ i $g(0) = g(1)$, pa je i

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)(0) &= \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha f(1) + \beta g(1)\\ &= (\alpha f + \beta g)(1)\end{aligned}$$

  i zato je $\alpha f + \beta g \in M$. Dakle, M je potprostor od $\mathbb{R}^{[0,1]}$.

Prije daljnjih primjera dokažimo dvije tvrdnje.

Propozicija 2.4.

Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $M \leq V$. Tada je i M konačnodimenzionalan i vrijedi $\dim M \leq \dim V$. Ako je $\dim M = \dim V$, tada je $M = V$.

Dokaz. Označimo $n = \dim V$. Dokažimo da je M konačnodimenzionalan vektorski prostor i da je $\dim M \leq n$. Tvrdnja očito vrijedi ako je $M = \{0\}$.

Pretpostavimo da je $M \neq \{0\}$, dakle postoji $a_1 \in M$ koji je različit od nulvektora. Ako je $M = [\{a_1\}]$, tada je $\{a_1\}$ baza za M. Ako je $[\{a_1\}] \subset M$,[5] tada postoji $a_2 \in M \setminus [\{a_1\}]$, pa je skup $\{a_1, a_2\}$ linearno nezavisan (inače bi, prema propoziciji 1.7, postojao skalar λ takav da je $a_2 = \lambda a_1$, što ne može biti). Ako je $[\{a_1, a_2\}] = M$, tada je $\{a_1, a_2\}$ baza za M, a ako je $[\{a_1, a_2\}] \subset M$, tada postoji $a_3 \in M \setminus [\{a_1, a_2\}]$, pa je $\{a_1, a_2, a_3\}$ linearno nezavisan skup (opet prema propoziciji 1.7).

[5] U ovoj se knjizi oznakom $\subset$ koristimo za pravi podskup skupa. U ovom slučaju želimo naglasiti da je $[\{a_1\}]$ sadržan u M, ali je različit od M.

Ponavljamo ovaj postupak sve dok ne dođemo do linearno nezavisnog skupa $\{a_1, \ldots, a_k\}$ za koji je $[\{a_1, \ldots, a_k\}] = M$. Takav k sigurno postoji i vrijedi $k \leq n$. Naime, ako bi bilo $k \geq n+1$, tada bi $\{a_1, \ldots, a_k\}$ bio linearno nezavisan skup u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V koji ima više od n elemenata, što je nemoguće prema teoremu 1.11. S obzirom na to da je dobiveni skup $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M, vrijedi $\dim M = k \leq n = \dim V$.

Neka je $\dim M = \dim V$, te neka je B baza za M. Tada je B linearno nezavisan skup u V koji ima n elemenata, pa je prema korolaru 1.12 to nužno i baza za V. Slijedi da je $M = V$. ■

Propozicija 2.5.

Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Tada je $[S]$ potprostor od V i to je najmanji[6] potprostor od V koji sadrži skup S.

[6] Pod *najmanji* podrazumijevamo sljedeće: ako je M potprostor od V koji sadrži skup S, tada M sadrži i $[S]$.

Dokaz. Već znamo da je $S \subseteq [S]$. Ako je $S = \emptyset$, tada je $[S] = \{0\}$, što je najmanji potprostor od V.

Pretpostavimo da je $S \neq \emptyset$. Neka su $a, b \in [S]$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Tada je

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \quad \text{i} \quad b = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i$$

za neke $m, n \in \mathbb{N}$, skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{F}$ te vektore $a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots, b_m \in S$. Sada je

$$\alpha a + \beta b = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i + \beta \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^{m} \beta \beta_i b_i,$$

dakle $\alpha a + \beta b$ je linearna kombinacija vektora iz S. Zato je $\alpha a + \beta b \in [S]$. Time smo provjerili da je $[S] \leq V$.

Neka je M potprostor od V koji sadrži S. Kako bismo pokazali da M sadrži $[S]$, uzmimo proizvoljan $a \in [S]$. Tada je $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$ za neke $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, te $a_1, \ldots, a_n \in S$. No tada je $a_1, \ldots, a_n \in M$, pa je a linearna kombinacija elemenata iz M, a kako je M potprostor od V, slijedi $a \in M$. Prema tome, $[S] \subseteq M$, dakle potprostor $[S]$ sadržan je u svakom potprostoru od V koji sadrži S, što ga čini najmanjim takvim. ■

Nastavimo s primjerima.

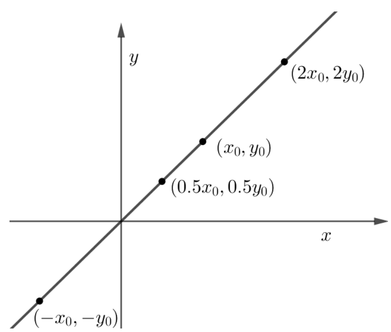
Primjer 2.2.

Odredimo sve potprostore od $\mathbb{R}^2$. Neka je $M \leq \mathbb{R}^2$. Kako je $\mathbb{R}^2$ dvodimenzionalan, njegovi potprostori mogu imati dimenziju 0, 1 ili 2.

- Ako je $\dim M{=}0$, tada je $M = \{(0,0)\}$. Ako je $\dim M{=}2$, tada je, prema propoziciji 2.4, $M = \mathbb{R}^2$.
- Pretpostavimo da je $\dim M = 1$. Neka je $\{(x_0, y_0)\}$ baza za M. Tada je

$$M = [\{(x_0, y_0)\}] = \{(\lambda x_0, \lambda y_0) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

  Dakle, $(x, y) \in M$ ako i samo ako je $x = \lambda x_0$ i $y = \lambda y_0$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Nacrtamo li skup M u ravnini, dobit ćemo pravac kroz točke $(0,0)$ i (x_0, y_0).



Primjer 2.3.

Odredimo sve potprostore od $\mathbb{R}^3$. Ako je $M \leq \mathbb{R}^3$, tada dimenzija od M može biti 0, 1, 2 ili 3.

- Ako je $\dim M{=}0$, tada je $M = \{(0,0,0)\}$. Ako je $\dim M{=}3$, tada je $M = \mathbb{R}^3$.
- Pretpostavimo da je $\dim M = 1$. Neka je $\{(x_1, y_1, z_1)\}$ baza za M. Tada je

$$M = \{\lambda(x_1, y_1, z_1) : \lambda \in \mathbb{R}\},$$

  što predstavlja pravac kroz točke $(0,0,0)$ i (x_1, y_1, z_1).

- Neka je $\dim M = 2$ te $\{(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\}$ baza za M. Tada je

$$M = \{\lambda(x_1, y_1, z_1) + \mu(x_2, y_2, z_2) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

što predstavlja ravninu određenu nekolinearnim točkama $(0,0,0)$, (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2).

Ovo također možemo objasniti uz identifikaciju $\mathbb{R}^3$ i $V^3(O)$, kada točku T prostora $\mathbb{R}^3$ identificiramo s radijvektorom $\overrightarrow{OT}$ (kao u odjeljku 1.7). Ako je $A = (x_1, y_1, z_1)$ i $B = (x_2, y_2, z_2)$, tada M možemo identificirati sa skupom

$$\{\lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset V^3(O),$$

što je skup svih radijvektora $\overrightarrow{OT}$ komplanarnih s $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$, a to znači da je T u ravnini određenoj točkama O, A i B.

U prethodna dva primjera dobili smo sljedeće:

Dimenzija potprostora	Potprostori od $\mathbb{R}^2$	Potprostori od $\mathbb{R}^3$
0	$\{(0,0)\}$	$\{(0,0,0)\}$
1	pravci kroz ishodište	pravci kroz ishodište
2	$\mathbb{R}^2$	ravnine kroz ishodište
3	–	$\mathbb{R}^3$

Sad ćemo navesti nekoliko potprostora prostora M_n matrica reda n. Prvo uvedimo neke nove pojmove. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n$ ili raspisano

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Kažemo da su elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ **dijagonalni elementi matrice A** te da oni formiraju **(glavnu) dijagonalu matrice A**. Zbroj svih dijagonalnih elemenata matrice naziva se **trag matrice**. Trag matrice A označavamo s $\operatorname{tr} A$. Dakle,

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Kažemo da je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathrm{M}_n$:

- **dijagonalna**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n$
- **gornjotrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i > j,\ i, j = 1, \ldots, n$[7]
- **donjotrokutasta**, ako je $a_{ij} = 0$ za sve $i < j,\ i, j = 1, \ldots, n$.

[7] Uočimo da elementi iznad glavne dijagonale imaju drugi indeks veći od prvog, dok je elementima ispod glavne dijagonale prvi indeks veći od drugoga.

Prema tome, dijagonalne, gornjotrokutaste i donjotrokutaste matrice imaju redom oblike

$$\begin{bmatrix} * & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & * & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & * \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} * & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \ldots & * \end{bmatrix},$$

pri čemu na mjestima označenim zvjezdicom $*$ mogu biti proizvoljni elementi iz $\mathbb{F}$. Jasno je kako su ovi tipovi matrica dobili imena.

Primjer 2.4.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je G_Δ skup svih gornjotrokutastih te D_Δ skup svih donjotrokutastih matrica reda n. Skup svih dijagonalnih matrica reda n označimo s $\mathcal{D}$. Lako se provjeri da su $\mathcal{D}$, G_Δ i D_Δ potprostori od M_n (na primjer, da bi G_Δ bio potprostor od M_n, treba samo uočiti da je zbroj gornjotrokutastih matrica gornjotrokutasta matrica te da množenjem gornjotrokutaste matrice skalarom dobivamo gornjotrokutastu matricu).

Neka je $\{E_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ kanonska baza za M_n (E_{ij} je matrica reda n koja na mjestu (i, j) ima 1 te 0 na svim ostalim mjestima). Lako vidimo da je skup

$$\{E_{ii} : i = 1, \ldots, n\}$$

baza za $\mathcal{D}$ i zato $\dim \mathcal{D} = n$.

Jedna baza za G_Δ je skup

$$\{E_{ij} : i, j = 1, \ldots, n, i \leq j\}.$$

Očito je ovaj skup linearno nezavisan (kao podskup baze), a da je i skup izvodnica za G_Δ dokazujemo koristeći se rastavom $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$ matrice $A = [a_{ij}]$ te uvažavajući da u