

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Кафедра электроники

В.Т. Першин

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И СХЕМОТЕХНИКИ

Учебное пособие

для студентов специальностей

«Микро-и нанoeлектронные технологии и системы»,
«Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств»,
«Проектирование и производство радиоэлектронных средств»,
«Экономика и организация производства»,
«Маркетинг» всех форм обучения

В 2-х частях

Часть 1

Минск 2005

УДК 621.37/39+681.3.06(075.8)

ББК 32.84+32.97 я 73

П 27

Рецензент:

главный научный сотрудник Института электроники НАН Беларуси,
доктор технических наук, старший научный сотрудник В.А. Зайка

Першин В.Т.

П 27

Основы радиоэлектроники и схемотехники: Учеб. пособие для студ. спец. «Микро- и нанoeлектронные технологии и системы», «Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств», «Проектирование и производство радиоэлектронных средств», «Экономика и организация производства», «Маркетинг» всех форм обуч.: В 2 ч. Ч.1. – Мн.: БГУИР, 2005. – 170 с.: ил.

ISBN 985-444-877-0 (ч.1)

Учебное пособие, написанное на материале конспекта лекций, читаемых автором в течение ряда лет студентам БГУИР, отражает основные идеи курса «Основы радиоэлектроники и схемотехники». В пособии содержатся разделы: сигналы, гармонический анализ сигналов, амплитудно-модулированные колебания, сигналы с угловой модуляцией, стереофонические сигналы с полярной модуляцией и пилот-тоном, импульсно-модулированные и манипулированные сигналы, случайные сигналы, дискретизация и квантование сигналов, прохождение сигналов через линейные электрические цепи, системы связи с уплотнением каналов, схемотехника электронных усилителей. Рассмотрен ряд примеров практических расчетов, выполненных с помощью математического пакета Mathcad 2000 Professional, использующего средства символьной алгебры.

УДК 621.37/39+681.3.06(075.8)

ББК 32.84+32.97 я 73

ISBN 985-444-877-0 (ч.1)

ISBN 985-444-880-0

© Першин В.Т., 2005

© БГУИР, 2005

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. ЗАДАЧИ И НАПРАВЛЕНИЯ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
2. СИГНАЛЫ
3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ) АНАЛИЗ СИГНАЛОВ
4. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ (АМ) СИГНАЛЫ
5. СИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ
6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ И СИГНАЛОВ
7. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ
8. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ И МАНИПУЛЯЦИИ
9. СИСТЕМЫ СВЯЗИ С РАЗДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ
10. СПЕКТР СТЕРЕОФОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА
11. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ
12. СХЕМОТЕХНИКА ЭЛЕКТРОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Радиоэлектроника представляет собой область науки и техники, решающую вопросы получения, хранения, преобразования и передачи информации на расстояние с помощью излучения электромагнитных колебаний.

Радиоэлектроника находится в состоянии совершенствования и развития и непрерывно обогащается новейшими научно–техническими достижениями в области *схемотехники*.

Курс «Основы радиоэлектроники и схемотехники» представляет собой изложение основных идей радиоэлектроники в глубокой связи со схемотехническими решениями изучаемых вопросов и, несмотря на сложное название, является дисциплиной, в которой объекты ее изучаются в единстве физических процессов и их реализаций схемотехническими решениями. При этом основные процессы преобразования информации рассматриваются не только с теоретической, физической стороны изучаемых явлений, но и в плане схемотехнических вариантов реализации устройств, в которых протекают эти процессы. Теоретический анализ радиоэлектронных устройств проводится на конкретных схемотехнических решениях, что позволит студентам в конечном итоге понимать работу радиовещательных, связных и телевизионных как радиоприемников, так и передатчиков на уровне их принципиальных схем.

Во время изучения схемотехнических решений студенту настоятельно рекомендуется использовать персональный компьютер с соответствующим математическим обеспечением. Хорошее владение компьютером позволяет сформировать навыки поиска оптимальных решений стоящих перед инженером задач.

Автор стремился написать небольшое по объему пособие, охватывающее основные идеи использования теоретических результатов в области создания усилительных, радиопередающих и радиоприемных устройств с достаточно глубоким изложением теории и обработки сигналов. В пособии на современном уровне изложены основные положения теории и обработки сигналов (усиление, модуляция, детектирование, умножение и преобразование частоты, корреляционный прием и др.), рассмотрены особенности построения схем супергетеродинных вещательных и специальных радиоприемников и передатчиков.

Предполагается, что читатель владеет элементами высшей математики, знаком с основами теории цепей, понимает принципы работы вакуумных и полупроводниковых приборов.

В пособии не было возможности отразить содержание и методику проведения практических и лабораторных занятий. Отметим только, что они всецело подчинены задаче хорошего усвоения студентами идей лекционного курса «Основы радиоэлектроники и схемотехники». Критерием выполнения этой задачи является изучение практических вопросов построения схем супергетеродинных вещательных приемников первого или второго классов и телевизионных приемников 4-5-го поколений на уровне их принципиальных

электрических схем. Поэтому объяснение теоретических вопросов привязывается к практическим решениям, реализованным в принципиальных схемах радиопередатчиков и радиоприемников различного назначения.

Важно отметить, что при изучении этого курса на практических занятиях широко используется практика решения задач в среде пакета символьной алгебры Mathcad 2000 Professional. В пособии содержится ряд примеров выполнения таких расчетов.

Курс «Основы радиоэлектроники и схемотехники» формально можно разделить на две части: в первой части изучаются вопросы сугубо теоретического характера. Здесь рассматриваются спектральный анализ периодических и непериодических сигналов, измерительные радиотехнические сигналы, случайные сигналы, модулированные и манипулированные по амплитуде, частоте и фазе колебания, дискретизация и квантование сигналов. В дополнение к спектральным представлениям, рассмотренным при изучении амплитудно-модулированных колебаний (двухполосной, однополосной, балансной, с подавленной одной боковой полосой, с частично подавленной боковой полосой, квадратурной, полярной), на примере анализа спектра сигнала, полученного с помощью амплитудно-импульсной модуляции, поясняются принципы импульсной модуляции. Кроме того, рассмотрено прохождение сигналов через линейные радиотехнические цепи с применением возможностей универсального математического пакета Mathcad, а также изложены особенности схемотехники электронных усилителей.

Изучение этих вопросов готовит студентов к освоению второй части курса, которая значительно в большей степени наполнена практическим содержанием. Во второй части курса вопросы теоретического характера излагаются вместе с практической направленностью их реализации, т.е. с учетом особенностей схемотехники выполнения конкретных радиоэлектронных устройств: модуляторов, детекторов, преобразователей частоты и других компонентов радиоэлектронной аппаратуры. Как правило, результаты теоретического анализа здесь рассматриваются в практических схемных решениях, позволяющих студентам в конечном итоге овладеть схемотехникой радиовещательных и телевизионных как радиопередатчиков, так и радиоприемников.

Помощь советами и участием в подготовке рукописи оказали автору сотрудники кафедры электроники Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. Особенно большую помощь оказали

С.В. Дробот и В.Т. Мыхлик. Многочисленные и ценные замечания сделал при рецензировании рукописи настоящего учебного пособия главный научный сотрудник Института электроники НАН Беларуси, доктор технических наук, старший научный сотрудник В.А. Зайка.

Автор выражает своим коллегам по работе и рецензенту искреннюю благодарность.

1. ЗАДАЧИ И НАПРАВЛЕНИЯ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

1.1. Радиоэлектроника как область науки и техники

В качестве составных частей радиоэлектроники можно выделить *радиотехнику, электронику и микроэлектронику*. Одна из важнейших задач радиотехники – осуществление связи на большие расстояния с помощью излучения электромагнитных волн. Электроника – это область науки и техники, занимающаяся вопросами взаимодействия электронов с электромагнитными полями и методами создания вакуумных, газоразрядных и полупроводниковых приборов и устройств. Микроэлектроника представляет собой раздел электроники, связанный с созданием электронных функциональных узлов, блоков и отдельных устройств в микроминиатюрном исполнении на основе группового изготовления радиоэлементов и печатного монтажа.

1.2. Основные направления современной радиоэлектроники

К числу основных направлений современной радиоэлектроники можно отнести:

- связь (проводная связь, фототелеграфная связь, радиосвязь и т.д.);
- радиоэлектронную аппаратуру широкого применения (это звукозапись, звуковоспроизведение, усилительная аппаратура, радиоприемная аппаратура, телевидение, электронные часы и т.д.);
- промышленную электронику (управление промышленными процессами, измерительная аппаратура, устройства электропитания, автоматики, телеуправления, медицинская аппаратура и т.д.);
- вычислительную технику и техническую кибернетику (электронные устройства вычислительной техники, автоматические системы управления, обучающие и контролирующие машины и т.д.);
- специальную технику (радиолокация, радионавигация, инфракрасная техника, ядерная электроника, биологическая электроника, оптические квантовые генераторы и т.д.).

Из этого списка основных направлений радиоэлектроники можно сделать вывод о многообразии вопросов, которыми в той или иной степени занимается радиоэлектроника.

1.3. Структурная схема радиоканала

Структурная схема радиоканала связи включает передающее и приемное устройства, разделенные свободным пространством. Эта схема отражает основную особенность радиоэлектроники – передачу информации на расстояние с помощью электромагнитного излучения, распространяющегося в свободном пространстве (рис. 1.1).

Информация передается в виде сообщений. При передаче электронным способом сообщение преобразуется в *электрический сигнал*. Под

электрическим сигналом будем понимать электрическое напряжение или ток, содержащий в себе информацию о каком-либо событии, либо изменяющийся во времени с заранее известными характеристиками. Например, для передачи на расстояние звучания камертона методами радиоэлектроники нужно преобразовать акустические колебания в электрические. Это легко реализуется с помощью микрофона. При передаче на расстояние информации об изображении объекта можно воспользоваться видеокамерой, которая создаст электрический сигнал, называемый *видеосигналом*, закон изменения которого будет повторять закон изменения яркости передаваемого объекта. В результате таких преобразований каждый раз получаем электрическое напряжение, изменяющееся по тому же закону, что и передаваемое сообщение.

Электрическое напряжение или ток, используемый для измерения характеристик радиотехнических цепей и их контроля, называется *измерительным радиотехническим сигналом*. В практике такие сигналы называются *испытательными*, хотя ГОСТ 16465 – 70 не рекомендует использовать такое название.

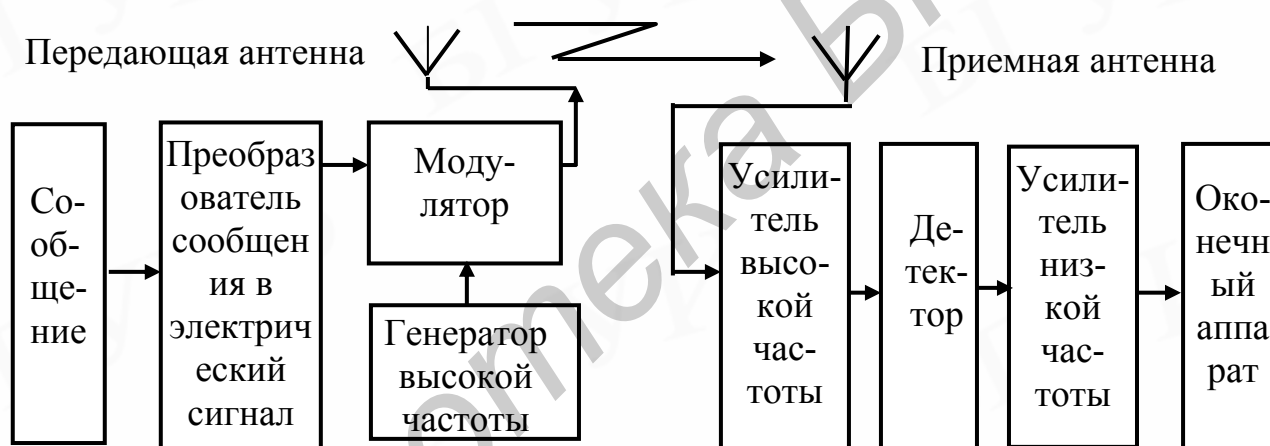


Рис.1.1. Структурная схема канала связи

Конечно, электрический сигнал можно усилить и подвести к передающей антенне. Однако, будучи медленно меняющимся процессом, он не может вызвать существенного излучения. Поэтому на передающем узле радиоканала осуществляется *модуляция* – процесс *запечатления* информации о передаваемом сообщении в изменение одного или нескольких параметров высокочастотного колебания, которое создает заметное излучение антенны и может распространяться в свободном пространстве с небольшими потерями. Процесс модуляции осуществляется в модуляционном устройстве, на один вход которого подается электрический сигнал, представляющий собой сообщение в электрической форме, а на другой вход – высокочастотное гармоническое колебание $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, где U_m , ω , φ – амплитуда, частота и начальная фаза высокочастотного колебания. Модуляционное устройство создает на своем выходе модулированное колебание, которое, являясь высокочастотным, может с малыми потерями распространяться в окружающем антенну пространстве, и содержит информацию о передаваемом сообщении в

изменении одного из своих параметров. Это колебание называется *радиосигналом*. В зависимости от того, какой параметр высокочастотного колебания изменяется в соответствии с законом передаваемого сообщения, различают три основных вида модуляции: амплитудную, частотную и фазовую.

На приемном конце канала связи осуществляется прием излученного радиосигнала и выполняется процесс выделения из радиосигнала переданного сообщения, который называется *демодуляцией* или *детектированием*. После детектирования сигнал подвергается усилению и затем подается на окончательный аппарат, представляющий собой динамическую головку, кинескоп, реле и т.п.

1.4. Диапазоны используемых в радиоэлектронике частот

Деление радиоволн на диапазоны в радиосвязи установлено Международным регламентом радиосвязи. Диапазоны радиоволн и радиочастот называются следующим образом:

Декамегаметровые	100 ... 10 Мм	3 ... 30 Гц
Мегаметровые	10 ... 1 Мм	30 ... 300 Гц
Гектокилометровые	1000 ... 100 км	0,3 ... 3,0 кГц
Мириаметровые	100 ... 10 км	3 ... 30 кГц
Километровые	10 ... 1 км	30 ... 300 кГц
Гектометровые	1 ... 0,1 км	0,3 ... 3,0 МГц
Декаметровые	100 ... 10 м	3 ... 30 МГц
Метровые	10 ... 1 м	30 ... 300 МГц
Дециметровые	1 ... 0,1 м	0,3 ... 3,0 ГГц
Сантиметровые	10 ... 1 см	3 ... 30 ГГц
Миллиметровые	1,0 ... 1 мм	30 ... 300 ГГц
Децимиллиметровые	1,0 ... 0,1 мм	0,3 ... 3,0 ТГц

Для современной радиоэлектроники характерна тенденция перехода на более короткие волны, т.е. на более высокие частоты. При этом более коротковолновые диапазоны занимают более широкий диапазон частот.

Заметим, что в бытовой практике существует несколько иное распределение волн по диапазонам. Так, к *длинным волнам* относят волны, частоты которых не превышают 500 кГц, к *средним волнам* – частоты которых находятся в пределах 500...1600 кГц, к *коротким волнам* – частоты которых лежат в пределах от 1,6 МГц до 30 МГц, к *ультракоротким волнам* – частоты которых лежат в пределах от 30 МГц до 300 МГц, и волны СВЧ-диапазона, частоты которых превышают 300 МГц. Однако эта классификация не рекомендуется к применению государственными стандартами.

1.5. Особенности распространения радиоволн различных диапазонов

Деление радиоволн на диапазоны обусловлено в основном особенностями их распространения, что главным образом и определяет область применения того или иного из них. При этом учитываются технические возможности

генерирования радиосигналов данного диапазона и уровень шумов и помех, действующих в данном диапазоне.

Длинные волны обладают хорошей дифракцией, сравнительно слабо поглощаются земной поверхностью и могут распространяться на расстояния до 3000 км.

Средние волны характеризуются значительно меньшей дифракцией по сравнению с длинными волнами и быстро затухают за счет поглощения их земной поверхностью. Поэтому радиус действия радиостанций, работающих на средних волнах, является сравнительно небольшим и не превышает 1000 км. Днем средние волны сильно поглощаются в слоях ионосферы вследствие высокой концентрации электронов, создаваемой солнечной радиацией. Ночью средние волны распространяются на большие расстояния за счет отражения от ионосферы.

Распространение *коротких волн* сильно зависит от длины волны при дневных и ночных сеансах связи. Так, к дневным волнам относятся волны длиной от 10 до 25 м, которые отражаются от ионосферы. В ночное время при пониженной концентрации электронов в слоях ионосферы дневные волны уходят в мировое пространство. Радиоволны длиной от 25 до 35 м применяются для радиосвязи в часы полусвеченности. К ночным волнам относятся волны длиной от 35 до 100 м, которые распространяются на гораздо большие расстояния при слабой ионизации слоев ионосферы.

Следует отметить, что для вещательных целей используется диапазон коротких волн путем выбора сравнительно небольших полос частот:

Диапазон	Частоты	Длина волны
75 м	3,95 ... 4,85 МГц	75,9 ... 62,0 м
60 м	4,85 ... 5,90 МГц	62,0 ... 50,4 м
49 м	5,90 ... 6,20 МГц	50,4 ... 48,4 м
41 м	7,10 ... 7,35 МГц	42,2 ... 41,1 м
31 м	9,40 ... 9,90 МГц	31,6 ... 30,7 м
25 м	11,60 ... 12,10 МГц	25,6 ... 24,8 м
19 м	15,10 ... 15,55 МГц	19,9 ... 19,4 м
16 м	17,60 ... 18,1 МГц	16,9 ... 16,0 м
13 м	23,00 ... 24,90 МГц	14,0 ... 13,8 м
11 м	25,60 ... 26,10 МГц	11,7 ... 11,5 м

Дальность радиосвязи на коротких волнах даже при малых мощностях передатчиков может достигать 5000 км и более. Радиосвязи на коротких волнах присущ ряд недостатков, среди которых следует выделить наличие зон *молчания* и *замираний* сигналов в месте приема.

Регулярная связь на *ультракоротких волнах* на Земле возможна только в пределах прямой видимости, так как ультракороткие волны не обладают дифракцией и поэтому не могут огибать выпуклости земной поверхности и они не отражаются от ионосферы. Ультракороткие волны очень сильно поглощаются земной поверхностью. Радиовещание ведется с использованием УКВ на диапазонах частот от 65,8 до 74,0 МГц (4,56 – 4,05 м) и от 87,5 до 108,0 МГц (3,43 – 2,78 м) с использованием методов частотной модуляции.

Для телевизионного вещания отведено 5 поддиапазонов в метровом и дециметровом диапазонах УКВ (в МГц): I(48,5 – 66), II(76 – 100), III(174 – 230), IV(470- 622), V(622 – 958), позволяющих разместить более 70 каналов.

В настоящее время интенсивно развивается направление, использующее распространение волн в диапазоне СВЧ. Для этих волн характерны те же особенности, что присущи и диапазону ультракоротких волн. Свойство этих волн принижать ионосферу используется в спутниковых системах телевидения и для связи с автоматическими станциями и космическими кораблями.

Для спутниковых систем радиосвязи Международным комитетом по регистрации частот (МКРЧ) выделены следующие полосы частот в диапазонах (в гигагерцах): L(1,452 – 1,500; 1,610 – 1,710), S(1,930 – 2,700) C(3,400 – 5,250; 5,725 – 7,075), X(7,250 – 7,750; 7,900 – 8,400), Ku(10,700 – 12,750; 12,750 – 14,800), Ka(14,400 – 26,500; 27,000 – 50,200), K(84,000 – 86,000).

Для кабельного телевидения в России выделены каналы СК1-СК8 и СК11-СК18, перекрывающие диапазоны 110-174 МГц и 230-294 МГц соответственно.

1.6. Квантование сигнала по уровню

Квантование сигнала по уровню – это замена сигнала $s(t)$, изменяющегося от S_{\min} до S_{\max} , счетным множеством значений его уровней $s_0, s_1, s_2, \dots, s_N$, отстоящих друг от друга на величину $\Delta s = (S_{\max} - S_{\min})/N$, называемую *шагом квантования*. Эти уровни можно перенумеровать, например, двоичными числами, количество разрядов которых

$$n \geq \log_2 N. \quad (1.1)$$

В результате квантования сигнала $s(t)$ получается новый сигнал $s'(t)$, имеющий ступенчатую форму (рис. 1.2). При таком преобразовании сигнала появляется *ошибка квантования*, характеризующаяся величиной шага квантования, так как мгновенное значение квантуемой величины может

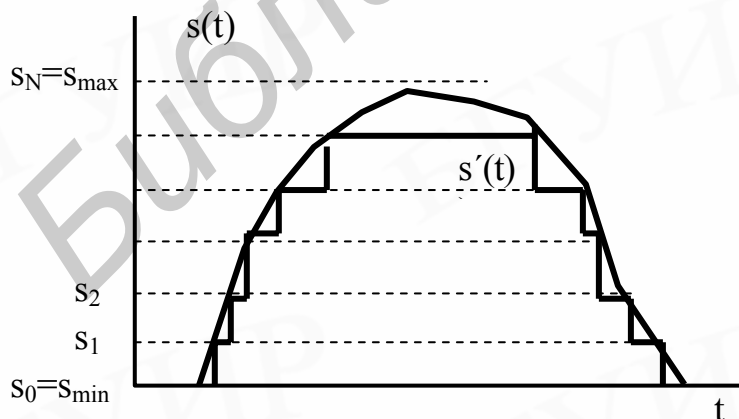


Рис. 1.2. Квантование сигнала по уровню

оказаться между соседними уровнями квантования. Часто точность выполнения операции квантования характеризуют относительной ошибкой квантования

$$\delta = \Delta s / S_{\max} = (S_{\max} - S_{\min}) / N S_{\max} \quad (1.2)$$

Из (1.1) видно, что чем больше величина N , тем меньше сигнал $s'(t)$ отличается от сигнала $s(t)$. С

увеличением N возрастает число разрядов n представления двоичных чисел, что ведет к усложнению аппаратуры для обработки таких сигналов. Тем не менее

квантование сигнала по уровню широко используется в микроэлектронных устройствах цифровой техники.

Пример 1.1. Определить число разрядов двоичных чисел для измерения изменяющегося от 0 до 100 В напряжения U с погрешностью Δ , не превышающей 0,5 В.

Шаг квантования $\Delta U = 2 \Delta = 2 \cdot 0,5 = 1$ В. Количество уровней квантования $N = U_{\max}/\Delta U = 100$.

По формуле (1.1) разрядность двоичных чисел $n \geq \log_2 N = 7$.

2. СИГНАЛЫ

2.1. Классификация сигналов

Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов.

Все сигналы можно разделить на детерминированные (известные) и случайные. К детерминированным относятся сигналы, значения которых известны в любой момент времени. Если же значения сигнала невозможно предсказать с вероятностью, близкой к единице, то такой сигнал мы будем называть случайным. По форме все сигналы можно разделить на три группы: аналоговые, дискретные и цифровые. Аналоговый сигнал описывается непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией $x_A(t)$, причем сама функция, как и ее аргумент, может принимать любые значения из выбранных пределов. Дискретный сигнал получается в результате *дискретизации непрерывной функции*, представляющей замену непрерывной функции ее дискретными значениями, и описывается решетчатой функцией (последовательным временным рядом) $x(nT)$, которая может принимать любые значения в некотором интервале, в то время как независимая переменная n принимает дискретные значения $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а T представляет собой интервал дискретизации. Выполнение операции дискретизации основано на теореме Котельникова, согласно которой функция с верхней частотой спектра f_B полностью определяется последовательностью значений в точках отсчета (отсчетов), отстоящих одна от другой на временной интервал, равный $1/2f_B$. Цифровой сигнал описывается *квантованной* решетчатой функцией (квантованной последовательностью, квантованным временным рядом) $x_C(nT)$, т.е. решетчатой функцией, принимающей лишь ряд дискретных значений, называемых *уровнями квантования*, в то время как независимая переменная n принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Заметим, что операции дискретизации и восстановления взаимно обратны в том случае, когда сигнал удовлетворяет требованиям теоремы Котельникова. Операции квантования и восстановления сигнала не являются в общем случае взаимно обратными, так как квантование в общем случае выполняется с

неустранимой погрешностью. Переход от дискретного сигнала к цифровому в общем случае осуществляется неточно.

Кроме того, все сигналы можно также разделить на две категории: периодические и непериодические. К периодическим сигналам отнесем те сигналы, которые можно описать некоторой временной функцией $s(t)$, такой, что для нее можно указать какое-то число T , такое, что для всякого $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ будет выполняться условие $s(t) = s(t + nT)$. Если такое число T для функции $s(t)$ указать невозможно, то тогда сигнал, описываемый функцией $s(t)$, называется непериодическим. Число T называют периодом функции, а значит, и сигнала $s(t)$ и для определенности полагают $T > 0$. Период сигнала связан с его частотой F известным соотношением $T = 1/F$. Частота колебания, имеющего период $T = 1$ с, называется 1 Гц.

В радиотехнике широко используется так называемая циклическая частота $\Omega = 2\pi F = 2\pi/T$, размерность которой представляет отношение радиан/с.

При решении конкретных практических задач обязательно нужно иметь в виду различие между размерностями частоты $F = 1/T$ колебания и циклической частоты $\Omega = 2\pi/T$ этого же колебания. С физической точки зрения это различие заключается в том, что частота F показывает, сколько оборотов в единицу времени совершает, например, радиус-вектор вращающейся точки, а частота Ω – сколько радиан проходит в единицу времени тот же радиус-вектор вращающейся точки.

И в завершение классификации отметим, что все сигналы можно разделить на две категории по ширине их спектра: с бесконечно широким спектром и ограниченным (*финитным*) спектром. Конечно, сигналы с бесконечно широким спектром имеют чисто теоретический интерес, так как все физически реализуемые системы имеют ограниченную полосу рабочих частот. Поэтому на практике используются сигналы с ограниченным спектром, которые представляют в большинстве случаев физические модели сигналов с неограниченным спектром. Общая классификация сигналов иллюстрируется рис. 2.1.

Классификация сигналов нужна для правильного выбора их в случае системного использования. Например, если мы выбираем для передачи информации сигнал с амплитудной модуляцией, то тем самым мы выбираем и ряд требований ко всему каналу связи: ширину канала связи, энергетические показатели системы связи, эффективность использования мощности несущей частоты при передаче информационного сигнала и т.д.

2.2. Детерминированные сигналы

Среди детерминированных сигналов выделим четыре класса сигналов:

- управляющие (модулирующие);
- высокочастотные немодулированные;

- модулированные (радиосигналы);
- испытательные.

2.2.1. Управляющие сигналы

Управляющие сигналы представляют собой передаваемые сообщения, преобразованные в электрическую форму. Процесс получения электрического сигнала, например, соответствующего звучанию камертона, состоит в замене механических колебаний электрическими, изменяющимися по тому же закону, что и механические.

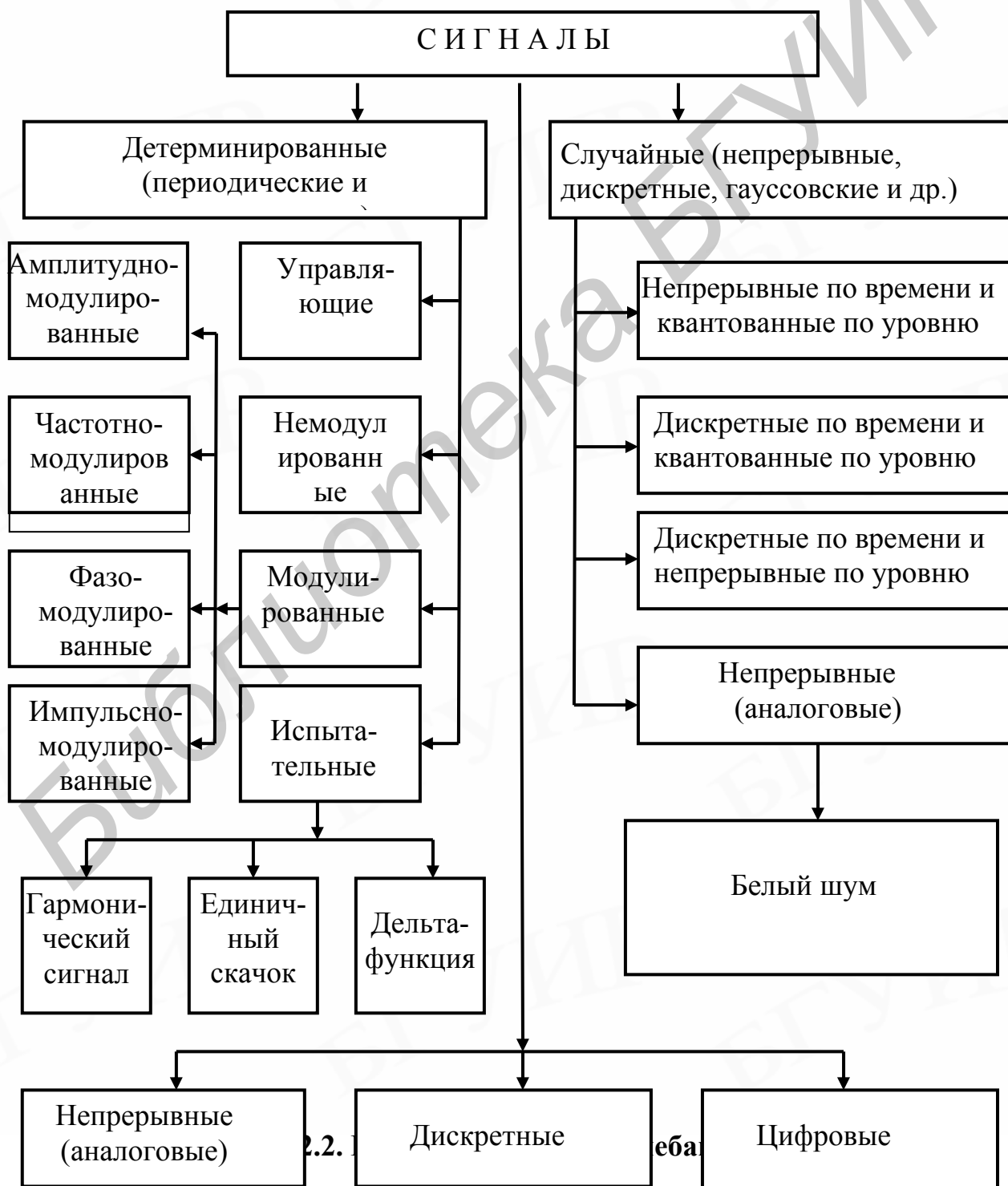


Рис. 2.1. Общая классификация сигналов

Высокочастотные колебания используются для переноса информации, содержащихся в управляющих колебаниях, поскольку они могут создавать электромагнитные волны, распространяющиеся с малыми потерями в пространстве.

Аналитическое выражение для высокочастотного колебания имеет вид $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. Видим, что в зависимости от того, какой параметр высокочастотного колебания изменяется в соответствии с законом передаваемого сообщения, возможны три основных вида модуляции: амплитудная, частотная и фазовая. При изменении амплитуды (частоты, начальной фазы) высокочастотного колебания по закону передаваемого сообщения информация об этом сообщении запечатлевается в изменении амплитуды (частоты, начальной фазы) высокочастотного колебания. Частота высокочастотного сигнала, на которой осуществляется перенос электрического сигнала на расстояние по каналу связи, называется *несущей*.

2.2.3. Модулированные сигналы

Модулированные сигналы формируются на выходе модулятора и представляют собой высокочастотные радиосигналы, несущие в себе информацию, содержащуюся в передаваемом сообщении. В зависимости от того, какой параметр высокочастотного колебания изменяется в соответствии с законом передаваемого сообщения, различают амплитудно-модулированные колебания и колебания с угловой модуляцией, которые в свою очередь можно разделить на колебания с частотной и фазовой модуляцией.

Например, при передаче напряжения треугольной формы получаем три различных модулированных колебания, форма которых показана на рис. 2.2.

2.2.4. Испытательные сигналы

Рассмотрим несколько испытательных сигналов, необходимость в существовании которых обусловлена потребностями испытания характеристик разрабатываемых электронных устройств.

Гармоническое колебание. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется в измерительной практике для оценки частотных свойств устройств различного назначения. При этом, например, на входы разных экземпляров одного и того же устройства подается один и тот же гармонический сигнал и регистрируются отклики каждого устройства на этот сигнал.

Единичный скачок. Другим испытательным сигналом является единичный скачок (функция Хевисайда):

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Единичный скачок представляет собой безразмерную величину, поэтому умножение сигнала $s(t)$ на функцию единичного скачка равносильно включению этого сигнала в момент $t=0$:

$$s(t) \cdot 1(t) = \begin{cases} s(t) & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Это свойство единичной функции часто используется при описании как ограниченных, так и неограниченных во времени сигналов.

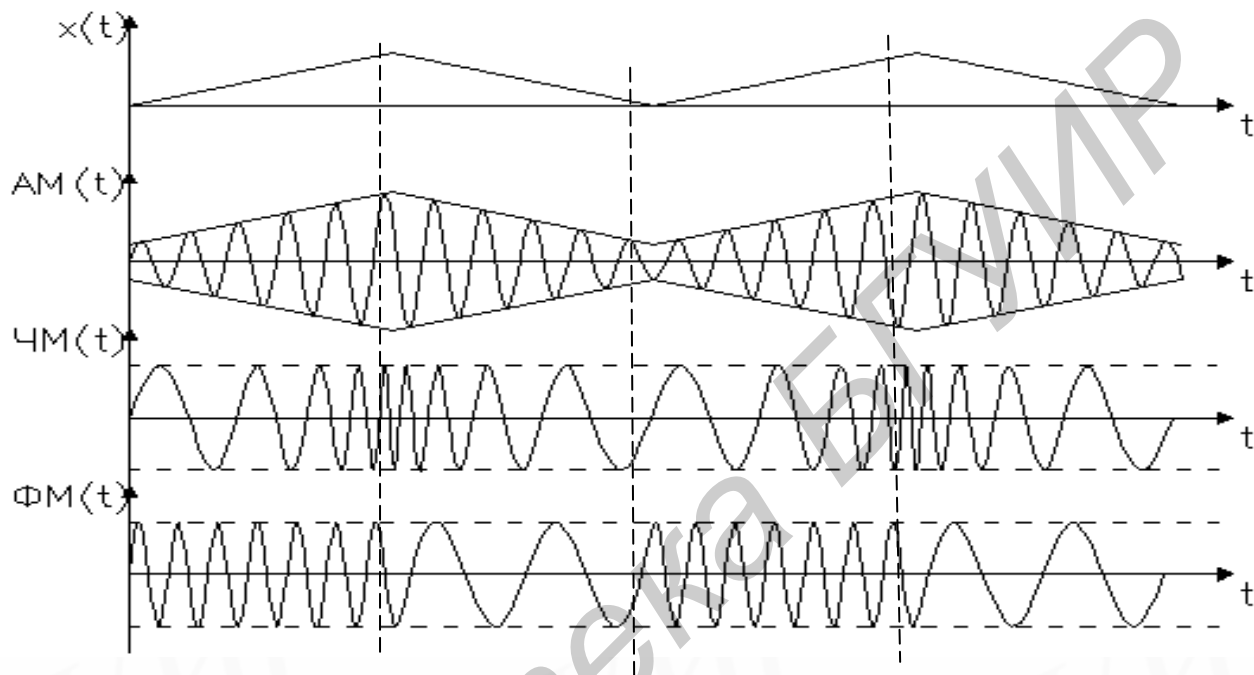


Рис. 2.2. Электрический сигнал треугольной формы ($x(t)$) и модулированные этим сигналом по амплитуде ($AM(t)$), частоте ($ЧМ(t)$) и начальной фазе ($ФМ(t)$) колебания

Дельта-функция. По определению δ -функция удовлетворяет следующим условиям:

$$(2.2) \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (2.3)$$

Таким образом, δ -функция имеет размерность $[c^{-1}]$ и равна нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента, принимая в точке $t = 0$ бесконечно большое значение. Площадь под кривой, ограниченной δ -функцией, равна единице.

Графики рассмотренных испытательных сигналов показаны на рис. 2.3.

П р и м е ч а н и е. Функция единичного скачка $1(t)$ и δ -функция не являются функциями в обычном математическом смысле. Они определяются в теории обобщенных функций последовательностями регулярных функций и все

операции над ними рассматриваются как операции над этими последовательностями.

Пример 2.1. Вычислить интеграл $I = \int_a^b s(t) \delta(t - t_0) dt$, $a < t_0 < b$.

Представим δ -функцию как предел прямоугольного импульса $g(t)$ длительностью Δ и амплитудой $1/\Delta$ при $\Delta \rightarrow 0$: $\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} g(t)$. Тогда

$$I = \int_a^b s(t) \lim_{\Delta \rightarrow 0} g(t - t_0) dt = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_a^b s(t) g(t - t_0) dt.$$

Так как $a < t_0 < b$, то

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \int_{c-\Delta/2}^{c+\Delta/2} s(t) dt.$$

Если функция $s(t)$ непрерывна в точке $t = t_0$, то по теореме о среднем

$$\int_{c-\Delta/2}^{c+\Delta/2} s(t) dt = \Delta s\left(t_0 + \xi \frac{\Delta}{2}\right),$$

где $-1 < \xi < 1$. Поэтому

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} s\left(t_0 + \xi \frac{\Delta}{2}\right) = s(t_0).$$

Итак, при $a < t_0 < b$ и непрерывности функции $s(t)$ в точке $t = t_0$

$$\int_a^b s(t) \delta(t - t_0) dt = s(t_0). \quad (2.4)$$

Это равенство описывает фильтрующее свойство δ -функции, т.е. δ -функция действует на функции $s(t)$ как временной фильтр, выбирающий из всех ее значений лишь одно в точке $t = t_0$, соответствующей обращению в нуль аргумента δ -функции. Иными словами, интеграл от произведения произвольной функции $s(t)$, ограниченной в интервале времени (a, b) , на δ -функцию $\delta(t - t_0)$ равен значению функции $s(t)$ в точке $t = t_0$.

Итак, мы показали, что формула (2.4) следует из определения δ -функции с помощью выражений (2.2) и (2.3). При строгом подходе δ -функцию следует определять выражением (2.4), так как формулы (2.2) и (2.3) не определяют однозначную функцию. Формула (2.4) определяет δ -функцию с помощью ее интегральных свойств, а не как функцию времени для каждого значения t .

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^t \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0; \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

откуда, учитывая (2.1), приходим к выводу:

$$1(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt$$

или

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Следовательно, с помощью понятия δ -функции можно выразить производную от разрывной функции в точке ее разрыва.

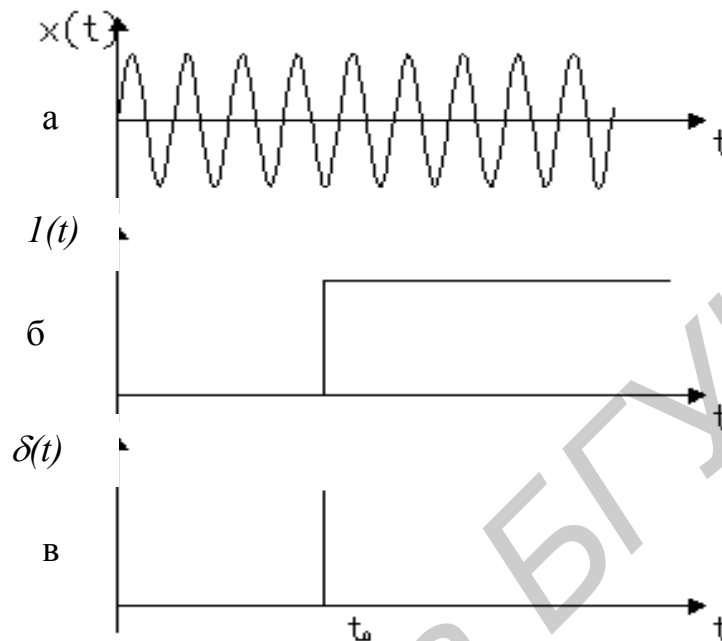


Рис.2.3. Графическое представление испытательных сигналов типа гармонического колебания (а), единичного скачка $I(t)$ (б) и дельта-функции $\delta(t)$ (в)

Помимо рассмотренных примеров испытательных сигналов в различных областях радиоэлектроники используется большое число других сигналов, предназначенных для оценки характеристик электронных устройств. Например, в телевидении используется испытательный сигнал, формирующий цветные полосы на экране кинескопа, сигналы испытательной таблицы, сетчатого поля, шахматного поля и т.д.

2.3. Случайные сигналы

Все реальные процессы наиболее точно описываются непрерывными функциями. Однако при практическом анализе случайных колебаний и сигналов используют математические модели, опирающиеся на дискретное представление, как аргументов, так и функций. Применение той или иной модели определяется необходимой степенью детализации различных сторон явления. Наиболее характерные примеры представления случайных процессов дает следующая классификация.

Все случайные сигналы можно разделить на два типа: стационарные (в узком и широком смысле) и нестационарные. Применительно к задачам радиоэлектроники мы рассмотрим следующие четыре подхода к описанию случайных сигналов.

Непрерывный случайный процесс описывается непрерывной функцией непрерывного аргумента. Примером такого процесса может служить флуктуационный шум на выходе любого радиоприемного устройства даже в отсутствие принимаемого полезного сигнала. Уровень непрерывного случайного сигнала может принимать любое значение в заданных пределах.

Случайный процесс, непрерывный по времени и квантованный по уровню, отличается от непрерывного тем, что его мгновенные значения не образуют непрерывного ряда. Примером может служить ток через телеграфный ключ, с помощью которого формируется последовательность посылок и пауз. Если содержание телеграммы заранее неизвестно, то мгновенное значение тока в любой из моментов можно рассматривать как случайное, и для его описания необходимо использовать вероятностные характеристики этого тока.

Случайный процесс, дискретный по времени и непрерывный по уровню, т.е. дискретный поток непрерывных случайных величин. Примером такого процесса может служить последовательность видеоимпульсов, амплитуда которых изменяется от импульса к импульсу по случайному модулирующему закону, причем модулирующая кривая представляет непрерывный случайный процесс.

Случайный процесс, дискретный по времени и квантованный по уровню, т.е. дискретный поток дискретных случайных величин. Пример такого процесса – передача округленных квантованных показаний измерительных приборов в системах телеизмерений.

2.3.1. Гауссовские случайные процессы

Гауссовский процесс – это наиболее распространенный тип случайного процесса. Он представляет собой предельный вид случайного процесса, к которому приближаются другие виды случайных процессов при некоторых условиях, часто выполняющихся на практике. Особенность гауссовских процессов – их n -мерная функция распределения (плотность распределения) вероятности любой мерности определяется математическим ожиданием и корреляционной функцией. Для гауссовских процессов аппарат анализа является наиболее простым и полно разработанным.

2.3.2. Белый шум

Случайный процесс, обладающий равномерным энергетическим спектром, называют *белым шумом* по аналогии с белым светом, имеющим в видимой части равномерный сплошной спектр.

Несмотря на то, что белый шум – неосуществимая на практике абстракция (его дисперсия, т.е. средняя мощность, бесконечна), ценность этого понятия и для теории, и для практики велика. Дело в том, что объектом внимания в прикладных дисциплинах являются не столько сами по себе случайные процессы, сколько реакция на них тех или иных физических систем. Любая же реальная система обладает конечной полосой пропускания. Поэтому

произвольный случайный процесс (шум со спектром, равномерным в пределах этой полосы), действующий в этой системе, можно заменить белым шумом, не видя погрешности, поскольку добавленные внеполосные составляющие никакого воздействия на систему не окажут.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ (ГАРМОНИЧЕСКИЙ) АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Гармонический анализ – это раздел математики, который изучает возможности представления функций в виде тригонометрических рядов и интегралов. Основным понятием в гармоническом анализе является гармоническое колебание, которое математически можно записать следующим образом:

$$s(t) = A \cos(\Omega t + \varphi),$$

где A , Ω , φ – соответственно амплитуда, циклическая частота, начальная фаза колебания.

В гармоническом анализе вводится понятие n -й гармоники гармонического колебания частоты Ω , под которой понимают опять же гармоническое колебание с частотой, в n раз превышающей частоту основного гармонического колебания. Математическое выражение для n -й гармоники $s_n(t)$ основного тона Ω можно записать следующим образом:

$$s_n(t) = A_n \cos(n\Omega t + \varphi_n),$$

где A_n , $n\Omega$, φ_n – амплитуда, циклическая частота, начальная фаза n -й гармоники основного тона Ω соответственно.

Следующим важным понятием является спектр сигнала. Под спектром сигнала понимают совокупность его гармонических составляющих. Введение понятия спектра сигнала обусловило использование в технических приложениях название спектрального анализа для гармонического анализа сигналов.

3.2. Спектральный анализ периодических сигналов

3.2.1. Тригонометрическая форма ряда Фурье

Основа спектрального анализа периодических сигналов – ряд Фурье для периодической функции $s(t)$: практически всякую периодическую функцию $s(t)$ можно представить в виде ряда Фурье:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t), \quad (3.1)$$

где $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$ соответствует постоянной составляющей сигнала, а

$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\Omega t dt$ и $b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt$ представляют

амплитуды косинусоидальных и синусоидальных гармоник сигнала соответственно.

На практике удобнее пользоваться представлением функции $s(t)$ в виде суммы только косинусоидальных гармоник. Если в формуле (1.1) выражение, стоящее под суммой, умножить и разделить на $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, то получим

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n \cos n\Omega t}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} + \frac{b_n \sin n\Omega t}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right) \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

Так как

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \leq 1, \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \leq 1,$$

$$\left(\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 + \left(\frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \right)^2 = 1,$$

то можно обозначить

$$\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \cos \varphi_n \quad \text{и} \quad \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} = \sin \varphi_n.$$

И тогда можно записать

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos(n\Omega t - \varphi_n), \quad \varphi_n = \operatorname{arctg}(b_n / a_n).$$

Введя обозначения $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $c_0 = a_0$, окончательно получим

$$s(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega t - \varphi_n). \quad (3.2)$$

Из формул (3.1) и (3.2) следует, что спектр периодического сигнала дискретен. Спектр периодического сигнала состоит из отдельных частот, соответствующих дискретным частотам $0, \Omega, 2\Omega, 3\Omega, \dots$. Важно отметить, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты, кратные частоте 1 кГц, т.е. 0, 1 кГц, 2 кГц и т.д. Это означает, что в спектре такого периодического сигнала не может быть

частот, отличных от вышеперечисленных, например, частоты 1,5 кГц или 1,2 кГц.

Графически спектр сигнала можно представить следующим образом. По оси абсцисс будем откладывать частоты гармонических составляющих сигнала, а по оси ординат – величины амплитуд этих гармоник. Для исчерпывающей характеристики спектра это графическое изображение нужно дополнить заданием начальной фазы каждой гармонической составляющей спектра. Это обстоятельство и определяет название спектра периодического сигнала: линейчатый, или дискретный, спектр. На рис. 3.1 дается общее представление об амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиках периодического сигнала, из которого видно, что частоты спектральных составляющих кратны частоте следования периодического сигнала.

Таким образом, структура спектра периодического сигнала полностью определяется его АЧХ и ФЧХ, т.е. амплитудами и начальными фазами спектральных составляющих. Графическое изображение спектра дает наглядное представление об относительной величине отдельных составляющих, позволяя легко оценить, например, техническую ширину спектра сигнала.

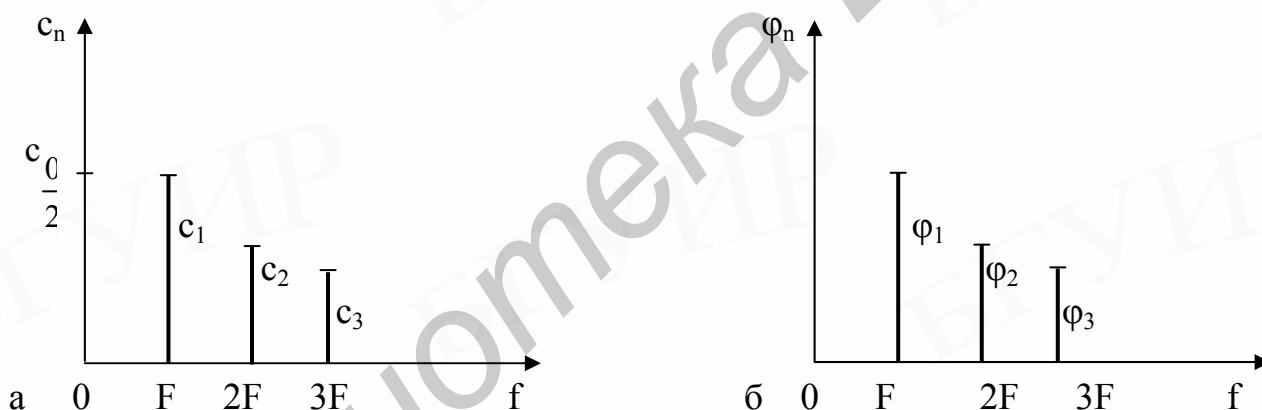


Рис. 3.1. АЧХ (а) и ФЧХ (б) периодического сигнала с периодом $T = 1/F$

3.2.2. Комплексная форма ряда Фурье

В радиотехнических устройствах сигнал подвергается различным формам обработки. И для того чтобы рассчитать результат этих преобразований, используется комплексная форма ряда Фурье. Эти преобразования имеют формальный характер и связаны с применением комплексной формы для представления функции вещественной переменной. Поэтому при проведении расчётов реальный сигнал можно представить в виде функции комплексной переменной, преобразовав его соответствующим образом, а затем снова перейти к вещественному представлению.

Для вывода ряда Фурье в комплексной форме за основу возьмём уравнение (3.2). Учитывая, что

$$\cos(n\Omega t - \varphi_n) = \frac{e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}}{2},$$

подставим это выражение в (3.2). Получим

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}}{2} = \\ &= \frac{c_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)}. \end{aligned}$$

Преобразуем третье слагаемое следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-i(n\Omega t - \varphi_n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-1}^{-\infty} c_{-n} e^{i(n\Omega t - \varphi_{-n})}.$$

Теперь все три слагаемых можно записать в виде одной формулы

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{i(n\Omega t - \varphi_n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{-i\varphi_n} e^{in\Omega t} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\Omega t}, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} C_n = a_n - ib_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos n\Omega t dt - i \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt = \\ &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\Omega t} dt. \end{aligned}$$

Входящая в (3.3) комплексная амплитуда C_n связана с a_n и b_n очевидными соотношениями

$$\begin{aligned} C_n &= c_n e^{-i\varphi_n} = a_n - ib_n, \\ C_{-n} &= c_n e^{i\varphi_n} = a_n + ib_n. \end{aligned}$$

Отсюда мы видим, что комплексные амплитуды C_n и C_{-n} являются взаимно сопряженными комплексными величинами

Нетрудно убедиться, что функция φ_n нечетная относительно n , а следовательно, и частоты, т.е. $\varphi_n = -\varphi_{-n}$. Четность модуля c_n вытекает непосредственно из его определения.

Отрицательные частоты, которые вводятся для представления реального сигнала $s(t)$ комплексным рядом Фурье, носят формальный характер и не имеют никакого физического смысла.

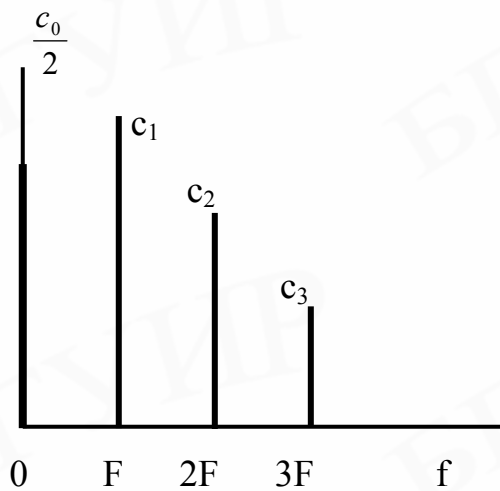


Рис. 3.2. АЧХ спектра, полученная с помощью ряда Фурье в тригонометрической форме

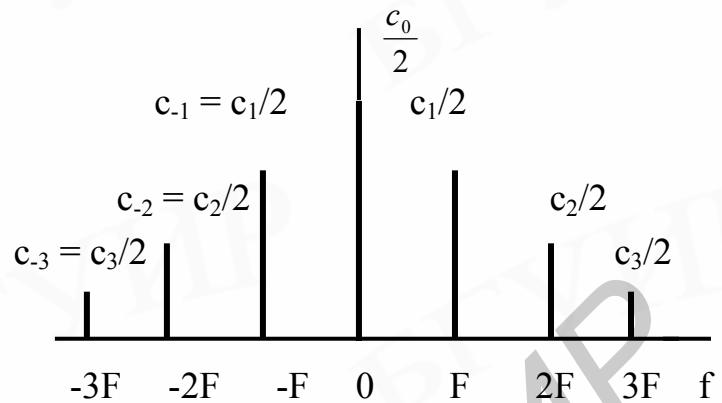


Рис. 3.3. АЧХ спектра, полученная с помощью ряда Фурье в экспоненциальной форме

Сравним величины коэффициентов в выражениях (3.2) и (3.3) разложения функции $s(t)$ в ряд Фурье при тригонометрической и комплексной формах представления ряда. Сравнивая выражения (3.2) и (3.3), обнаруживаем, что при $n = 0$ имеет место равенство коэффициентов, рассчитанных по каждому из этих выражений. Сравнение же коэффициентов, рассчитываемых по каждому из этих рядов при других значениях n , приводит к следующему выводу. Коэффициент c_n , определяемый из ряда (3.3), составляет только половину такого же коэффициента, определяемого из ряда (3.2). На рис. 3.2 и 3.3 показано, что при переходе от тригонометрической к экспоненциальной форме ряда Фурье (с искусственным введением в рассмотрение отрицательных частот) уменьшаются в два раза амплитудные значения коэффициентов разложения. Для полного представления о спектре сигнала в виде ряда (3.3) его АЧХ должна быть дополнена заданием ФЧХ, которая получается точно такой же, как и в представлении сигнала тригонометрическим рядом (3.2), но с расширением ее в область отрицательных частот.

Пример 3.1. Найти спектр последовательности прямоугольных импульсов, имеющих амплитуду E , длительность τ и следующих с периодом T .

Запишем анализируемый импульс в виде (рис. 3.4)

$$s(t) = \begin{cases} E, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2; \\ 0, & \tau/2 < t < T/2, -T/2 < t < -\tau/2. \end{cases} \quad (3.4)$$

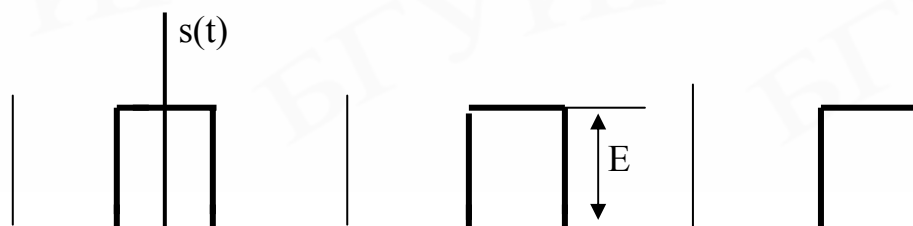




Рис. 3.4. Последовательность прямоугольных импульсов, следующих с периодом T и описываемых четной функцией $s(t)$

Так как функция $s(t)$ чётная, то

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin n\Omega t dt = 0.$$

Тогда функцию $s(t)$ можно представить в виде ряда

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\Omega t.$$

Найдем величину постоянной составляющей сигнала:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T}.$$

Эта формула показывает, что постоянная составляющая исследуемого сигнала зависит от отношения длительности импульса τ к его периоду следования T . Чем короче длительность импульса по отношению к периоду следования, тем меньше уровень постоянной составляющей сигнала. Полученная формула правильно оценивает также постоянную составляющую импульса с длительностью, равной периоду их следования ($\tau = T$). Величина $q = T/\tau$ называется *скважностью* последовательности импульсов.

Теперь найдем амплитуды косинусоидальных составляющих сигнала

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E \cos n\Omega t dt = \frac{2E}{T} \frac{1}{n\Omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos n\Omega t d(n\Omega t) = \\ &= \frac{E}{\pi n} \sin n\Omega t \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2E}{\pi n} \sin \frac{n\Omega\tau}{2} = \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin \frac{\pi n\tau}{T}}{\frac{\pi n\tau}{T}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь было учтено, что $\Omega = 2\pi/T$. Второй множитель в выражении для a_n представляет собой функцию $\sin x/x$, график которой показан на рис. 3.5 и является огибающей амплитуд спектральных составляющих исследуемого сигнала. График этой функции совпадает с огибающей амплитуд всех гармоник спектра, за исключением его нулевой гармоники (постоянной составляющей).

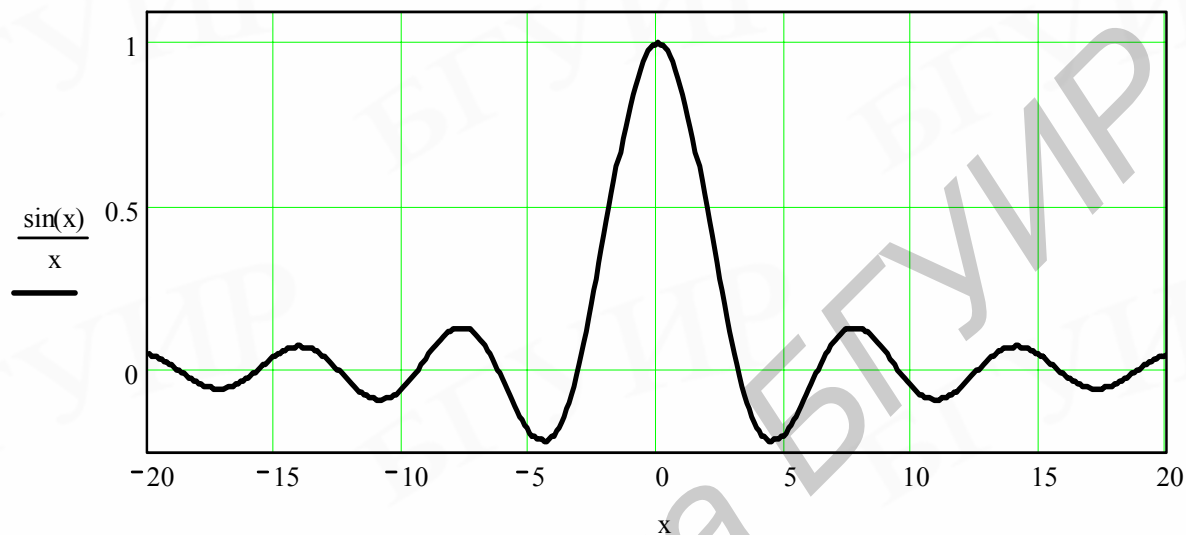


Рис. 3.5. График функции $\sin x/x$

Рассмотрим, как зависит распределение спектральных составляющих сигнала от отношения τ/T . Амплитуды спектральных составляющих обращаются в нуль при $\sin \frac{\pi n \tau}{T} = 0$, т.е. при значениях аргумента синуса, равных $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$. Определим номер гармоники, амплитуда которой первой обращается в нуль. Это произойдет при фазе синуса, равной π , т.е. при выполнении условия $\frac{\pi n \tau}{T} = \pi$, откуда $n = T/\tau$. Например, если мы имеем дело с последовательностью импульсов длительностью 1 мкс, следующих с периодом 4 мкс, то первой спектральной составляющей, амплитуда которой обратится в нуль, будет четвертая гармоника. Чтобы определить номер следующей спектральной составляющей, амплитуда которой обратится в нуль, надо составить уравнение, соответствующее фазе синуса, равной 2π , т.е. записать $\frac{\pi n \tau}{T} = 2\pi$. Отсюда видно, что такой будет восьмая гармоника спектра сигнала (рис.3.6).

контролировать выдаваемые машиной результаты и правильно их истолковывать.

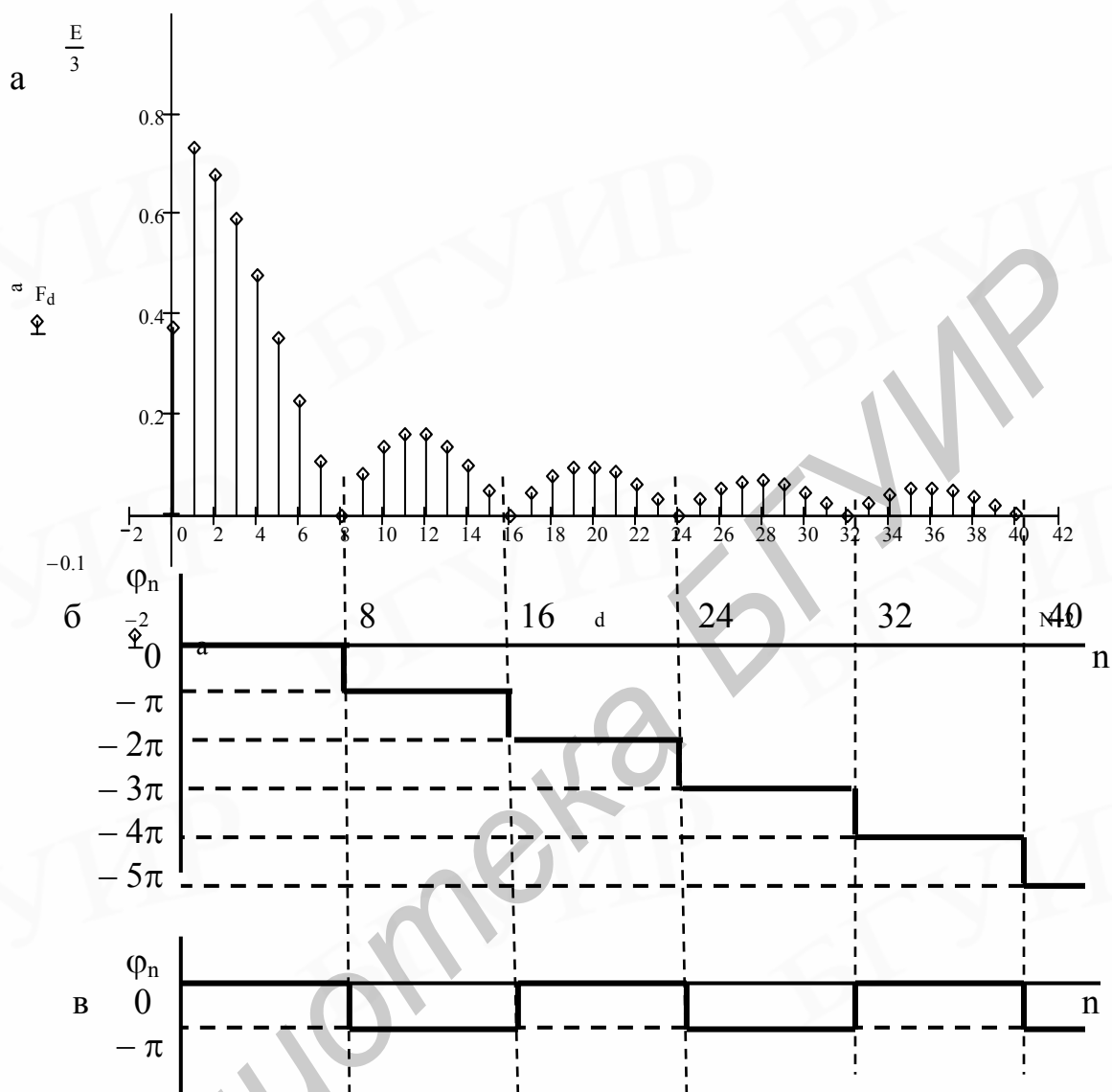


Рис. 3.7. АЧХ (а), ФЧХ (б) последовательности прямоугольных импульсов с отношением периода следования импульсов к их длительности, равным 8, и ФЧХ, которая получается в результате ее расчета в среде Mathcad (в)

Пример 3.2. Дать наглядное представление о спектре рассмотренной в примере 3.1 последовательности, представив ее экспоненциальным рядом Фурье.

При переходе к экспоненциальной форме ряда Фурье представления реального сигнала мы ввели отрицательные частоты, которых в природе нет. В результате этого мы изображаем амплитуду гармоники $|C_n|$ двумя амплитудами $|C_n|/2$ и $|C_{-n}|/2$, расположенными симметрично относительно нулевой частоты. При этом устраняется нарушение стройности представления огибающей спектра анализируемой последовательности, так как теперь функция $\sin x/x$ описывает огибающую всех гармоник, включая и амплитуду постоянной составляющей. Таким образом, представление спектра

последовательности прямоугольных импульсов экспоненциальным рядом Фурье становится изящнее (рис. 3.8,а). Что касается ФЧХ этого сигнала, то она сохраняет вид, который мы получили при представлении сигнала тригонометрическим рядом Фурье, и показана на рис.3.8,б.

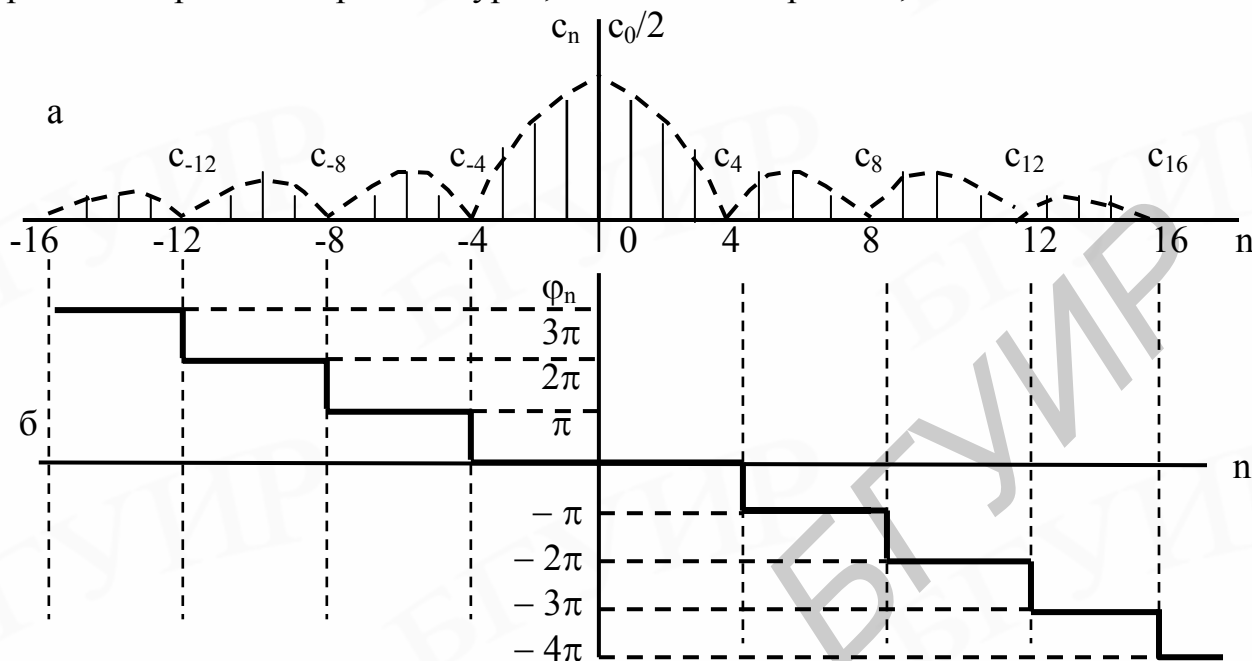


Рис. 3.8. АЧХ (а) и ФЧХ (б) последовательности прямоугольных импульсов при представлении сигнала экспоненциальным рядом Фурье

Мы видим, что с уменьшением длительности импульса возрастает номер его спектральной составляющей, амплитуда которой первой обращается в нуль. Это обстоятельство хорошо иллюстрирует соотношение для простых сигналов $\Delta f_{cn} = 1/\tau$, связывающее техническую ширину спектра Δf_{cn} с длительностью сигнала τ . Кроме того, с уменьшением длительности сигнала относительно периода следования спектр сигнала становится более насыщенным, что, несомненно, должно учитываться, например, при разработке хороших электронных музыкальных инструментов.

3.3. Гармонический анализ в среде MathCAD сигнала, описываемого четной функцией

Как видно из формул, используемых для расчета коэффициентов ряда (3.1), если функция $s(t)$ является четной, то тогда все коэффициенты $b_n=0$, так как произведение четной функции на нечетную является нечетной функцией, и интеграл в симметричных пределах от нечетной функции равен нулю. Это обстоятельство упрощает проведение гармонического анализа таких сигналов. В примерах 3.1 и 3.2 при проведении гармонического анализа обсуждались особенности использования пакета MathCAD при проведении вычислений, однако основное внимание было направлено на изучении структуры спектра

анализируемого сигнала. Теперь рассмотрим проведение гармонического анализа в среде пакета MathCAD сигнала, описываемого четной функцией.

Пример 3.4. Рассчитать АЧХ и ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов с амплитудой $E=1$ В длительностью τ с, следующих с периодом T с.

Чтобы упростить вычисления выберем начало системы координат, в которой форма импульса представляется таким образом, чтобы ее можно было описать симметричной функцией. Тогда нечетная часть ряда Фурье обратится в нуль, так как интеграл от нечетной функции в симметричных пределах всегда равен нулю. Итак, опишем функцию $s(t)=R(t_3)$ следующим образом (рис.3.9):

$$T:=64 \quad t_3:=-10..9.9.10 \quad \tau:=8$$

$$R(t_3) := \begin{cases} 1 & \text{if } |t_3| < \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

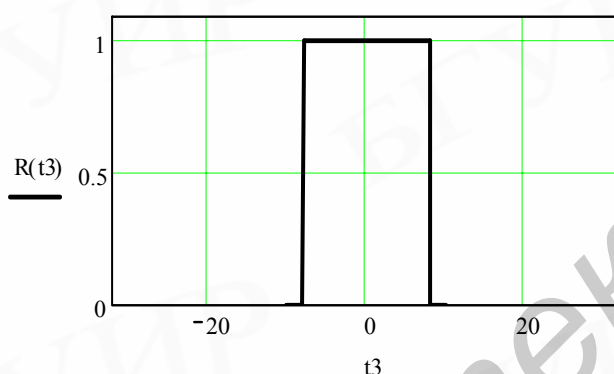


Рис. 3.9. Программа, описывающая четную функцию $s(t)=R(t_3)$ и представляющая ее график

Спектр периодической функции является линейчатым (рис. 3.10). Поэтому для его графического представления используем опцию *Форматирование/График/Formatting Currently Selected X-Y Plot/Traces*, в которой устанавливаются $Symbol=+'s$, $color=blk$, $Type=stem$, $Weight=2$.

$$N:=40 \quad k:=0..N \quad a_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} R(t_3) \cdot \cos\left[k \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi}{T}\right) \cdot t_3\right] dt_3$$

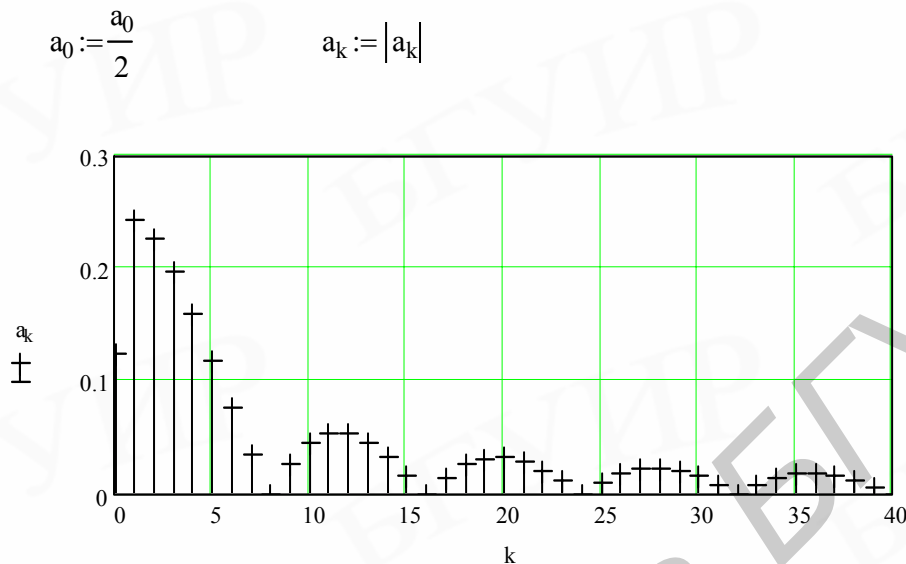


Рис.3.10. Программа, формирующая амплитудный спектр (АЧХ) сигнала, описываемого четной функцией, и представляющая график АЧХ

Для построения графика АЧХ сигнала используется опция, вызываемая нажатием клавиш *Shift+@*.

Конечно, амплитуды спектральных составляющих можно вычислить по формуле

$$a_n = \frac{2E\tau}{T} \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T}}{\frac{n\pi\tau}{T}}, \quad (3.5)$$

но рассматриваемый здесь подход позволяет решить задачу по спектральному анализу любой четной функции и сколь угодно большом числе гармоник спектрального разложения. Начальные фазы всех гармоник в этом случае равны нулю, так как все коэффициенты b_n разложения (3.1) равны нулю.

Результат расчета представлен на рис 3.10, из которого видно, что амплитуда каждой восьмой гармоники обращается в нуль, что и было ранее показано теоретически.

ФЧХ сигнала можно получить из соотношения (3.5), описывающего АЧХ сигнала, из которого следует, что амплитуды гармоник с номерами от $n = 1/\tau$ до $n = 1/2\tau$ будут описываться отрицательными числами. Но амплитуда гармоники – это существенно положительная величина и отрицательной быть не может. К тому же нужно учитывать, что начальная фаза имеет смысл только

для тех составляющих, амплитуды которых отличны от нуля. Если же амплитуда спектральной составляющей равна нулю, то понятие начальной фазы для такой составляющей не существует. Мы здесь, однако, будем приписывать значения начальной фазы также и спектральным составляющим с нулевыми амплитудами, хотя и знаем, что на самом деле это не так. Таким образом, для того чтобы амплитуда гармоники представлялась положительным числом, нужно учесть ее начальную фазу, а она в этом случае равна $2n\pi$. Например, если амплитуды гармоник с номерами, соответствующими частотам, изменяющимся от 0 до $1/\tau$, описываются положительными числами, значит, их начальные фазы $\varphi_n=0$; гармоники с номерами, соответствующими частотам от $1/\tau$ до $1/2\tau$, будут уже описываться отрицательными числами. С математической точки зрения это значит, что их начальные фазы станут равными $-\pi$. Точно так же гармоникам с номерами, соответствующими частотам от $1/2\tau$ до $1/3\tau$, нужно приписать начальные фазы, равные -2π и т.д.

Так как все коэффициенты $b_n=0$, то невозможно получить представление о виде ФЧХ $\varphi_n = \arctg(b_n/a_n)$. С другой стороны, изменение знака функции $\sin x/x$ можно отнести к скачку ее фазы на величину, равную π .

Учтем, что $1 = \exp(\pm i2n\pi)$ и $-1 = \exp[\pm(2n+1)\pi]$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ – любое целое число. Приходим к выводу, что когда для n -й спектральной составляющей функция $\sin x/x$ положительна, то фаза этой гармоники $\varphi_n = 2n\pi$, а когда функция $\sin x/x$ отрицательна, то фаза n -й гармоники $\varphi_n=(2n+1)\pi$. Поэтому ФЧХ этой периодической последовательности импульсов представляет собой ступенчатую функцию, график которой приведен на рис. 3.8,б.

Таким образом, для данного сигнала ФЧХ имеет вид

$$\varphi_n = 0 \text{ для } 0 < n < 1/\tau;$$

$$\varphi_n = -\pi \text{ для } 1/\tau < n < 1/2\tau;$$

$$\varphi_n = -2\pi \text{ для } 1/2\tau < n < 1/3\tau;$$

$\varphi_n = -3\pi$ для $1/3\tau < n < 1/4\tau$ и т. д., что соответствует графическому представлению, показанному на рис. 3.11.

Построенный график ФЧХ, показанный на рис. 3.11, вместе с графиком АЧХ исчерпывающим образом характеризует спектр функции, заданный уравнением (3.4).

3.4. Спектральный анализ в среде MathCAD сигнала, задержанного неискажающей линией задержки

Построим АЧХ и ФЧХ рассмотренной в предыдущем подразделе последовательности импульсов (см. рис. 3.9), но с учетом ее прохождения через неискажающую линию задержки.

Пример 3.5. Рассмотрим прохождение последовательности прямоугольных импульсов длительностью τ , следующих с периодом T и задержанных на время $t_{зад} = \tau/2$ через неискажающую линию задержки.

Иными словами, произведем расчет спектра функции, представленной программой, приведенной на рис. 3.12.

Очевидно, что АЧХ последовательности импульсов на входе и выходе неискажающей линии задержки будут одинаковыми, так как все гармонические составляющие сигнала, поступившие на вход неискажающей линии задержки, появятся на ее выходе. Это можно непосредственно увидеть, сравнив графики АЧХ сигнала, приведенные на рис. 3.10 и 3.13.

$$\phi_n := \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq n < 8 \\ \pi & \text{if } 8 \leq n < 16 \\ (2 \cdot \pi) & \text{if } 16 \leq n < 24 \\ (3 \cdot \pi) & \text{if } 24 \leq n < 32 \\ (4 \cdot \pi) & \text{if } 32 \leq n < 40 \end{cases}$$

$$\phi_n := -\phi_n$$

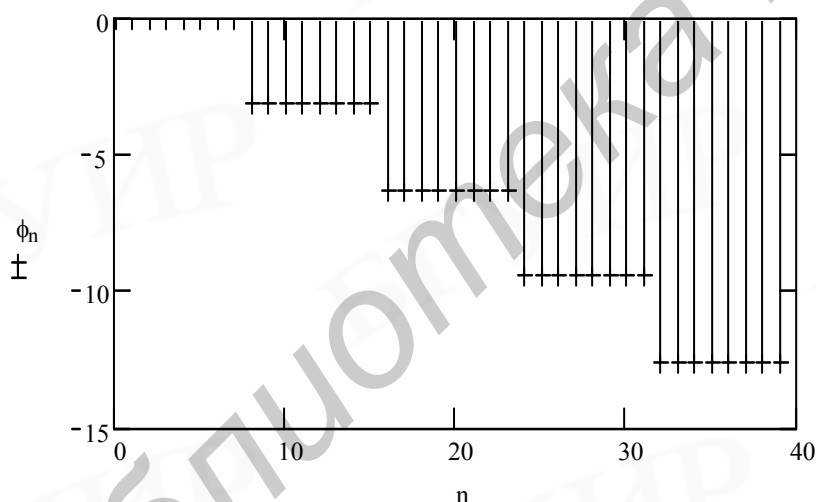


Рис. 3.11. Программа, формирующая ФЧХ сигнала, описываемого четной функцией, и представляющая график ФЧХ этого сигнала, полученной с помощью пакета Mathcad с учетом действительных соотношений между фазами спектральных составляющих спектра сигнала

Значение фазы сигнала на выходе линии задержки ϕ_{n_out} увеличивается на

$$\phi_{n_out} = \Omega t_{зад},$$

т.е. ФЧХ линейно возрастает с увеличением времени задержки от 0 до $\tau/2$ и составляет на частоте $f = 1/\tau$ величину, равную $\Omega\tau/2 = 2\pi f\tau/2 = \pi$, затем испытывает скачок фазы на 180° , так как амплитуды спектральных составляющих на частотном интервале от 8-й до 16-й гармоники описываются

отрицательными числами. После этого скачка фазы спектральных составляющих снова линейно возрастают с увеличением их номера, достигая величины, равной $\varphi_{n_out} = 3\pi$, затем снова происходит скачок фазы, равный π , так как теперь функция, описывающая поведение АЧХ последовательности снова меняет свой знак и т.д. Таким образом, задержка описывается изменением ФЧХ последовательности на выходе линии задержки.

$$s(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

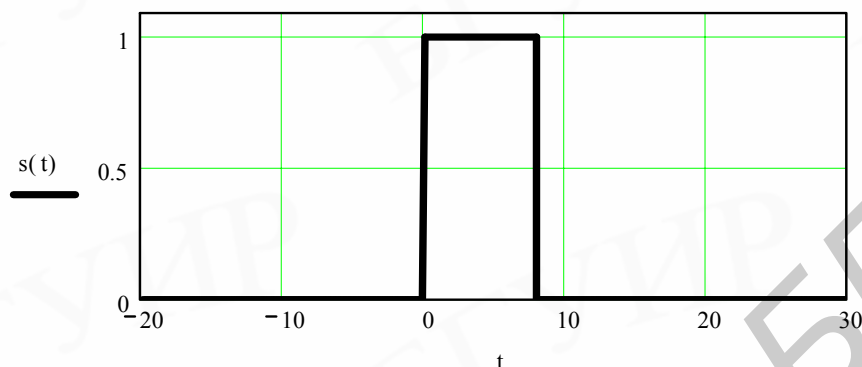


Рис. 3.12. Программа, описывающая задержанную на время $t_{зад} = \tau/2$ последовательность прямоугольных импульсов и представляющая график одного импульса этой последовательности

ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов в этом случае имеет вид, показанный на рис. 3.13.

Важно отметить, что в пакете Mathcad не предусмотрено различие между начальными фазами 0 и 2π , так как машина для этих в общем различных значений начальной фазы будет выдавать одно и то же значение, равное нулю. Из рассмотрения программы расчета, приведенной на рис. 3.13, ясно, что вид АЧХ, полученной путем непосредственного расчета на ЭВМ с помощью пакета Mathcad, не совсем наглядно представляет фазовые соотношения, существующие между спектральными составляющими спектра последовательности прямоугольных импульсов. Это объясняется не только особенностями учета начальной фазы спектральной составляющей с нулевыми амплитудами, но и необходимостью учета разной периодичности функций косинуса, синуса и тангенса. Но чтобы правильно построить график ФЧХ такой последовательности импульсов, нужно программисту побеспокоиться об этом самому, что и было сделано и продемонстрировано на рис. 3.14. Поэтому на рис. 3.14 приведена ФЧХ исследуемой последовательности, отражающая действительные фазовые соотношения между спектральными составляющими сигнала.

Увеличим задержку сигнала до величины $t_{зад} = \tau$. Тогда в результате расчетов по программе, приведенной на рис. 3.15, увидим, что АЧХ сигнала остается той же самой, что и в двух предыдущих случаях, а ФЧХ сигнала

сильно изменится. Чтобы сравнить ее с действительной формой ФЧХ, составим программу расчета, приведенную на рис. 3.16.

ФЧХ последовательности в этом случае по виду отличается от действительного ее представления, так как ЭВМ не различает фазы 0 и 2π . Поэтому результаты, получаемые при таких расчетах воспринимать следует с должным вниманием.

Библиотека БГУИР

$$N := 40$$

$$T := 64$$

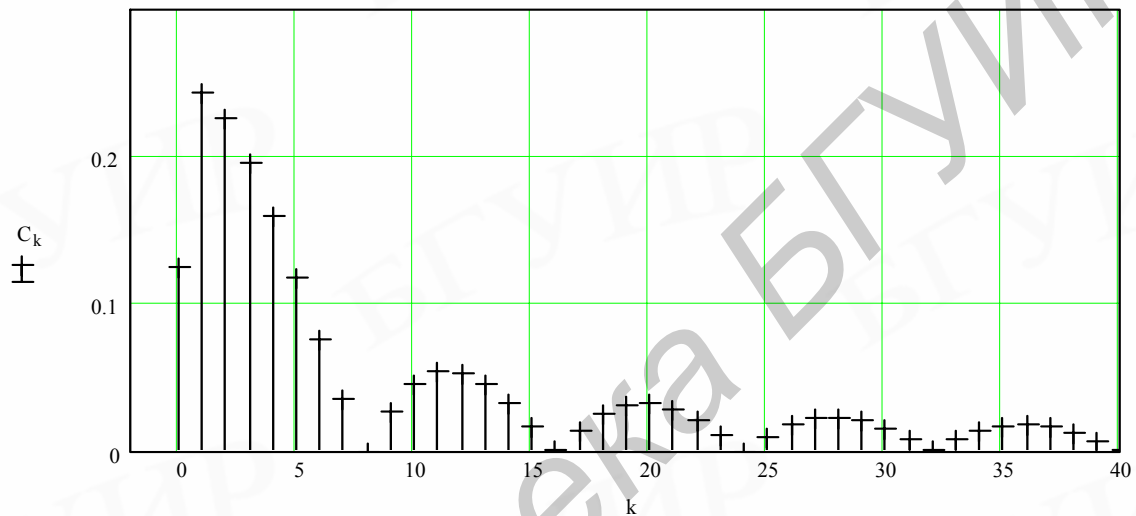
$$\tau := 8$$

$$s(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_0^\tau s(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt \quad B_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_0^\tau s(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$C_0 := \frac{C_0}{2}$$

$$C_k := [(A_k)^2 + (B_k)^2]^{0.5}$$



$$A_k := \begin{cases} 0.001 & \text{if } A_k = 0 \\ A_k & \text{if } A_k > 0 \end{cases}$$

$$i := (-1)^{0.5}$$

$$C_k := A_k - i \cdot B_k$$

$$\phi_k := \text{atan}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

$$\phi_k := -\phi_k$$

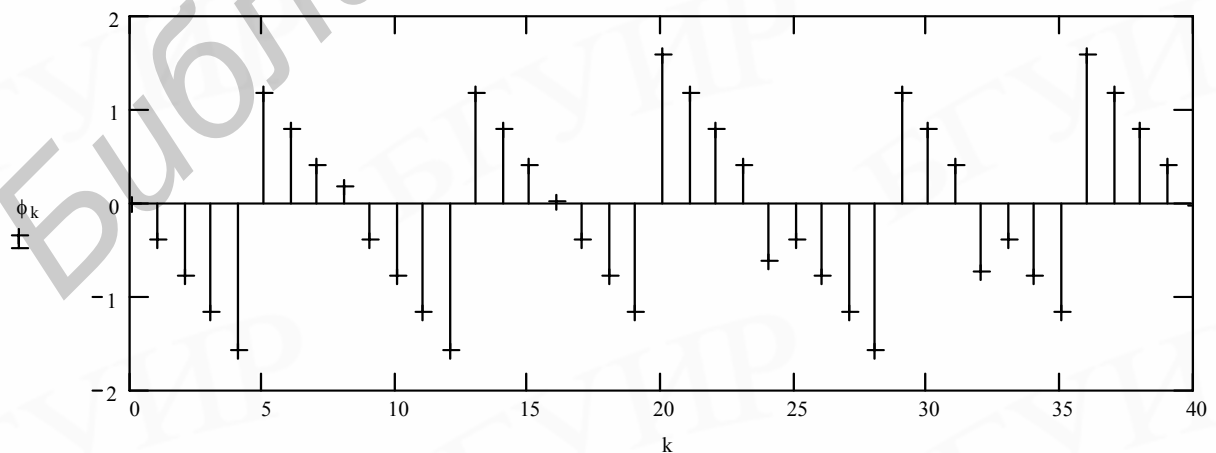


Рис. 3.13. Программа непосредственного расчета АЧХ и ФЧХ

последовательности прямоугольных импульсов, задержанной на время $t_{\text{зад}} = \tau/2$, и построения графиков АЧХ и ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов с помощью пакета Mathcad

Мы видим, что в особых точках, где понятие начальной фазы теряет физический смысл, с помощью пакета получаются результаты, которые необходимо увязывать с физическим смыслом решаемой задачи.

Сравнивая виды АЧХ сигнала, приведенные на рис. 3.13 и 3.15, устанавливаем их идентичность, хотя они получены в результате расчета по разным программам.

$$\phi_n := \begin{cases} \left(\left(n \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right) & \text{if } 0 \leq n < 8 \\ \left[\left[\pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right] \right] & \text{if } 8 \leq n < 16 \\ \left[\left[2 \cdot \pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right] \right] & \text{if } 16 \leq n < 24 \\ \left[\left[3 \cdot \pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{8} \right) \right] \right] & \text{if } 24 \leq n < 32 \end{cases} \quad \phi_n := -\phi_n$$

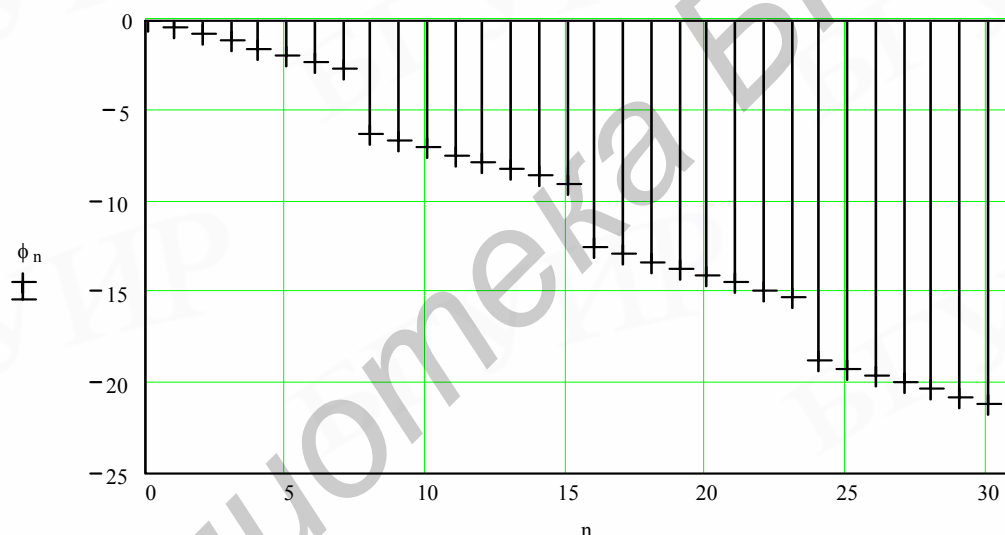


Рис.3.14. Программа расчета ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов, задержанной на время $t_{зад}=\tau/2$, и формирования графиков ФЧХ с помощью пакета Mathcad с учетом действительных фазовых соотношений между гармоническими составляющими спектра

Интересно посмотреть, как изменится вид ФЧХ этой последовательности прямоугольных импульсов при увеличении задержки, например, на величину, равную удвоенной длительности импульса $t_{зад} = 2\tau$. Ответ на этот вопрос можно получить из анализа программы, приведенной на рис. 3.14. В этом случае фазовый сдвиг будет линейно увеличиваться с ростом номера гармоники и для 8-й гармоники составит величину, равную 2π .

Пример 3.6. Найдем АЧХ и ФЧХ последовательности парных импульсов длительностью τ каждый, отстоящих друг от друга на величину, равную τ , и следующих с периодом T .

$$N := 40 \quad T := 64 \quad \tau := 8$$

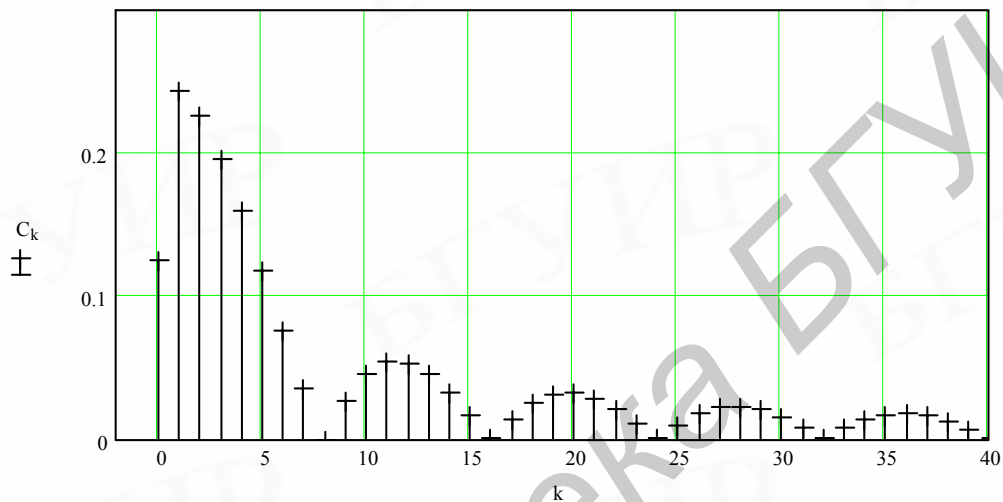
$$s(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 1.5 \cdot \tau \leq t \leq 2.5 \cdot \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$A_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{\tau \cdot 1.5}^{\tau \cdot 2.5} s(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$B_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{\tau \cdot 1.5}^{\tau \cdot 2.5} s(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$A_0 := \frac{A_0}{2}$$

$$C_k := \left[(A_k)^2 + (B_k)^2 \right]^{0.5}$$



$$A_k := \begin{cases} 0.001 & \text{if } A_k = 0 \\ A_k & \text{if } A_k > 0 \end{cases}$$

$$i := (-1)^{0.5}$$

$$C_k := A_k - i \cdot B_k$$

$$\phi_k := \text{atan}\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

$$\phi_k := -\phi_k$$

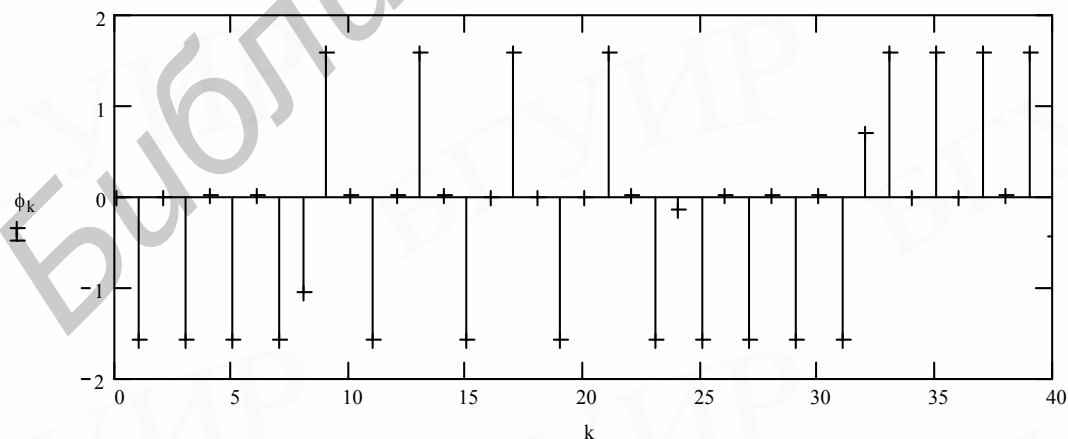


Рис. 3.15. Программа непосредственного расчета ФЧХ и ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов, задержанных на время $t_{\text{зад}} = 2\tau$ и построения графика АЧХ и ФЧХ исследуемого сигнала с помощью пакета Mathcad

$$\phi_n := \begin{cases} \left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) & \text{if } 0 \leq n < 8 \\ \left[\pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{if } 8 \leq n < 16 \\ \left[2 \cdot \pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{if } 16 \leq n < 24 \\ \left[3 \cdot \pi + \left(n \cdot \frac{\pi}{2} \right) \right] & \text{if } 24 \leq n < 32 \end{cases} \quad \phi_n := -\phi_n$$

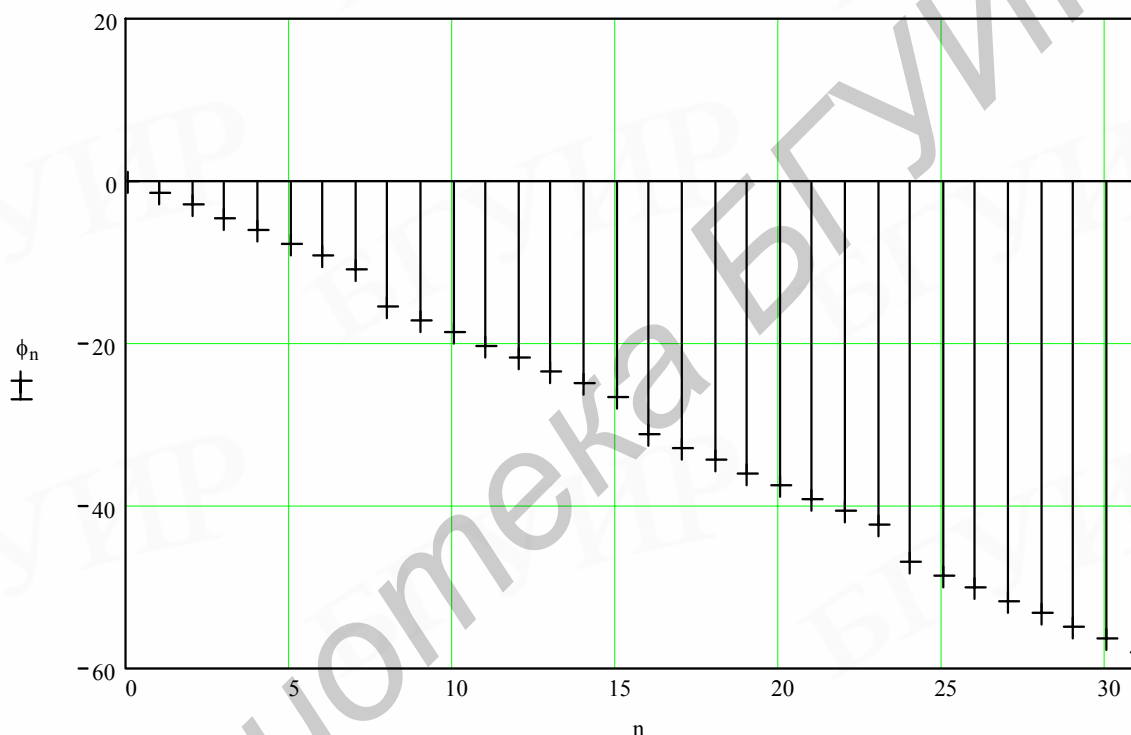


Рис. 3.16. Программа расчета ФЧХ последовательности прямоугольных импульсов, задержанной на время $t_{\text{зад}}=2\tau$, и формирования графика ФЧХ

Программа расчета приведена на рис. 3.17. Читателю предлагается найти АЧХ этой последовательности, представив ее в виде четной функции и разобраться в представленной в этой программе ФЧХ.

Читателю предлагается рассмотреть вопрос о том, каким будет представление спектра в виде экспоненциального ряда Фурье, связанного с введением отрицательных частот, которые в природе не существуют. Чтобы показать АЧХ последовательности прямоугольных импульсов, представленной экспоненциальным рядом Фурье, мы должны представить график АЧХ с амплитудами, уменьшенными в два раза и расположенными симметрично на отрицательных и положительных частотах.

$N := 40$ $T := 64$ $\tau := 8$ $t := -64, -63.9 .. 64$ $k := 0.. N$

$$s(t) := \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq t \leq 8 \\ 0 & \text{if } 8 < t < 16 \\ 1 & \text{if } 16 \leq t \leq 24 \\ 0 & \text{if } 24 < t \leq 64 \end{cases}$$

$$A_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_0^8 s(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt + \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{16}^{24} s(t) \cdot \cos\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$B_k := \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_0^8 s(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt + \left(\frac{2}{T}\right) \cdot \int_{16}^{24} s(t) \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot k \cdot \frac{t}{T}\right) dt$$

$$C_k := \left[(A_k)^2 + (B_k)^2 \right]^{0.5} \quad C_0 := \frac{C_0}{2} \quad \phi_k := \text{atan}\left(\frac{B_k}{A_k}\right) \quad \phi_k := -\phi_k$$

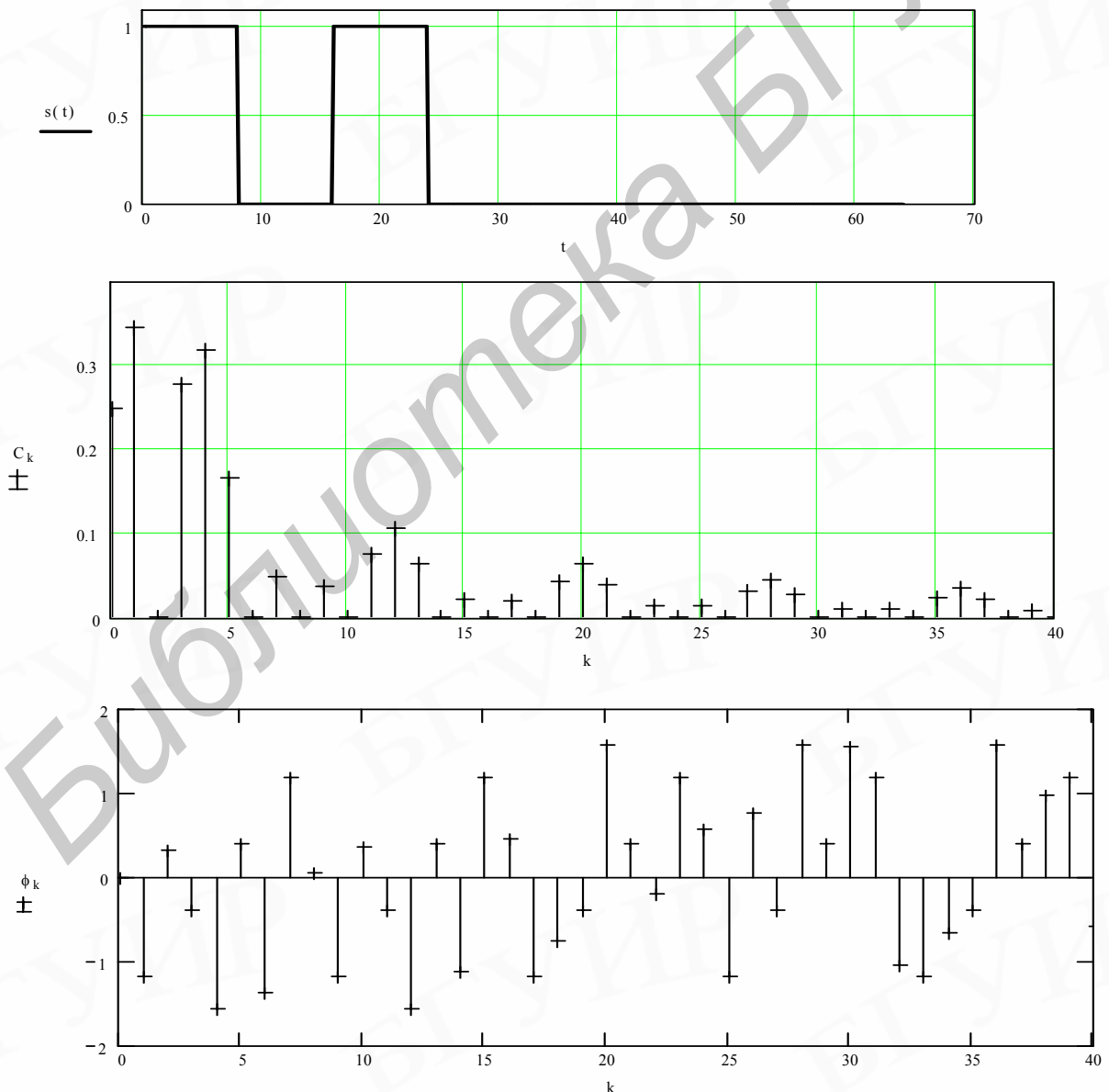


Рис. 3.17. Программа расчета АЧХ и ФЧХ последовательности парных прямоугольных импульсов

3.6. Ряд Фурье, ограниченный первыми m членами

Выясним, какими должны быть коэффициенты ряда Фурье, чтобы сумма первых m членов

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)$$

тригонометрического ряда представляла наилучшим образом функцию $s(t)$.

Определим коэффициенты a_n и b_n так, чтобы средняя квадратическая ошибка

$$\varepsilon = \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) - s_m(t)]^2 dt,$$

которую мы делаем, заменяя $s(t)$ на $s_m(t)$ на периоде T функции, была минимальной. Для этого нужно коэффициенты a_n и b_n выбрать так, чтобы

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_1} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_2} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial b_m} = 0.$$

Обратимся к коэффициенту a_m . Его можно определить из уравнения $\partial \varepsilon / \partial a_m = 0$.

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial a_m} &= \frac{\partial \left[\frac{1}{T} \int_0^T [s(t) - s_m(t)]^2 dt \right]}{\partial a_m} = -\frac{2}{T} \int_0^T [s(t) - s_m(t)] \frac{\partial s_m(t)}{\partial a_m} dt = \\ &= -\frac{2}{T} \int_0^T \left[s(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^m a_n \cos n\Omega t - \sum_{n=1}^m b_n \sin n\Omega t \right] \cos m\Omega t dt = 0. \end{aligned}$$

После упрощений получаем

$$\int_0^T [s(t) - a_m \cos m\Omega t] \cos m\Omega t dt = 0,$$

откуда следует

$$a_m = \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos n\Omega t dt.$$

Следовательно, ряд Фурье не только точно представляет функцию $s(t)$ при неограниченном числе членов ряда, но и обеспечивает наименьшую среднюю квадратическую ошибку. Кроме того, при увеличении числа членов в конечной тригонометрической сумме $s_m(t)$ все прежние коэффициенты сохраняют свои значения.

Читателю предлагается убедиться в этом, выполнив самостоятельно расчет спектра, например, последовательности прямоугольных импульсов с учетом первых 10, 20, 30 членов разложения и сравнить полученные их

значения. Для этого можно воспользоваться программой, приведенной на рис. 3.10.

3.7. Спектральный анализ непериодических сигналов

Для проведения гармонического анализа непериодического сигнала $s(t)$, действующего в конечном интервале $t_1 < t < t_2$, поступим следующим образом. Превратим наш непериодический сигнал $s(t)$ в периодический путем повторения его с периодом $T > t_2 - t_1$. Теперь для этого сигнала можно записать ряд Фурье. Устремив период T к бесконечности, в пределе получим бесконечно малые амплитуды гармонических составляющих, сумма которых изображает исходную непериодическую функцию $s(t)$, заданную в интервале $t_1 < t < t_2$.

Число гармонических составляющих, входящих в ряд Фурье для функции $s(t)$, будет при этом бесконечно большим, так как при $T \rightarrow \infty$ частота первой гармоники функции $\Omega = 2\pi/T \rightarrow 0$. Это значит, что расстояние между спектральными линиями, равное первой гармонике сигнала, становится бесконечно малым и спектр становится сплошным.

Отсюда следует, что при гармоническом анализе непериодического сигнала получается сплошной спектр, состоящий из бесконечно большого числа гармоник с бесконечно малыми амплитудами.

Математически это можно выразить следующим образом (рис.3.18).

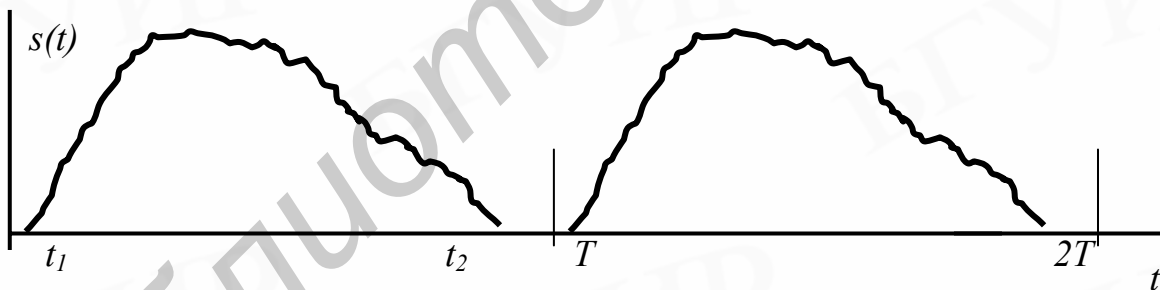


Рис. 3.18. Одиночный (непериодический) сигнал длительностью $t_2 - t_1$, представленный как периодический с периодом $T \geq t_2 - t_1$

Полагая, что наш непериодический сигнал является периодическим, запишем для него ряд Фурье в комплексной форме:

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\Omega t}.$$

Подставим в этот ряд значение C_n :

$$s(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\Omega t} dt \right) e^{in\Omega t} =$$

$$\bullet \quad = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-n\Omega t} dt \right) e^{in\Omega t} \Omega .$$

• Теперь устремим период T следования сигнала к бесконечности. При этом сигнал из периодического превращается в сигнал с бесконечно большим периодом, т.е. сигнал непериодический. Суммирование можно заменить интегрированием в бесконечных пределах. Частоту $n\Omega$ заменим текущей частотой ω , а частоту Ω – приращением текущей частоты $d\omega$. Тогда получим

$$\bullet \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

(3.6)

• где внутренний интеграл

$$\bullet \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

(3.7)

называется спектральной плотностью, или спектральной характеристикой сигнала $s(t)$.

Выражения (3.6) и (3.7) называются парой преобразований Фурье. При этом (3.7) соответствует прямому преобразованию, а (3.6) – обратному.

Выражение (3.6) представляет непериодический сигнал в виде суммы (интеграла) гармонических колебаний с бесконечно малыми амплитудами. Сравнивая выражение (3.6) с выражением (3.3) ряда Фурье для периодического сигнала, мы видим, что амплитуды составляющих непериодического сигнала равны

$$\frac{1}{\pi} S(\omega) d\omega .$$

Выясним смысл названия спектральной плотности. Для этого выделим какую-либо дискретную частоту $\Omega_n = n\Omega$, соответствующую в случае периодической функции $s(t)$ n -й гармонике, и запишем для амплитуды этой гармоники выражение

$$C_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-i\Omega_n t} dt.$$

В случае же непериодической функции, совпадающей с $s(t)$ в интервале $t_1 < t < t_2$, получим для спектральной плотности, соответствующей той же частоте Ω_n , следующее выражение:

$$S(\Omega_n) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e^{-i\Omega_n t} dt.$$

Отсюда видно, что

$$S(\Omega_n) = T \frac{C_n}{2} = \frac{C_n}{F}.$$

Таким образом, значение спектральной плотности $S(\Omega_n)$ получается путем деления амплитуды C_n (поскольку одной действительной амплитуде спектральной составляющей сигнала соответствуют две спектральные составляющие с амплитудами $C_n/2$ и $C_{-n}/2$) гармоники на полосу частот F , отделяющую соседние линии дискретного спектра, т.е. $S(\Omega)$ имеет смысл *плотности амплитуд* и размерность [амплитуда/герц].

Из полученного выражения вытекает также следующее важное положение: *огibaющая сплошного спектра* (модуль спектральной плотности) *непериодической функции* и *огibaющая линейчатого спектра периодической функции, представленной экспоненциальным рядом Фурье* (полученной из непериодической путем продолжения ее с периодом T), *совпадают по форме и отличаются только масштабом и, конечно, размерностью*.

Пример 3.7. Оценить влияние грозовых разрядов на приём сигналов радиовещательных станций, работающих в диапазонах ДВ, СВ, КВ, УКВ .

В качестве модели тока, формирующего грозовой разряд, возьмем уравнение $i(t) = I_0 e^{-\alpha t}$, где $\alpha = 10^4 \dots 10^5 \text{ c}^{-1}$ характеризует скорость убывания тока грозового разряда (рис. 3.19). Чтобы оценить влияние грозового разряда на прием вещательных станций, оценим спектр тока, формирующего этот разряд, и сделаем соответствующие выводы.

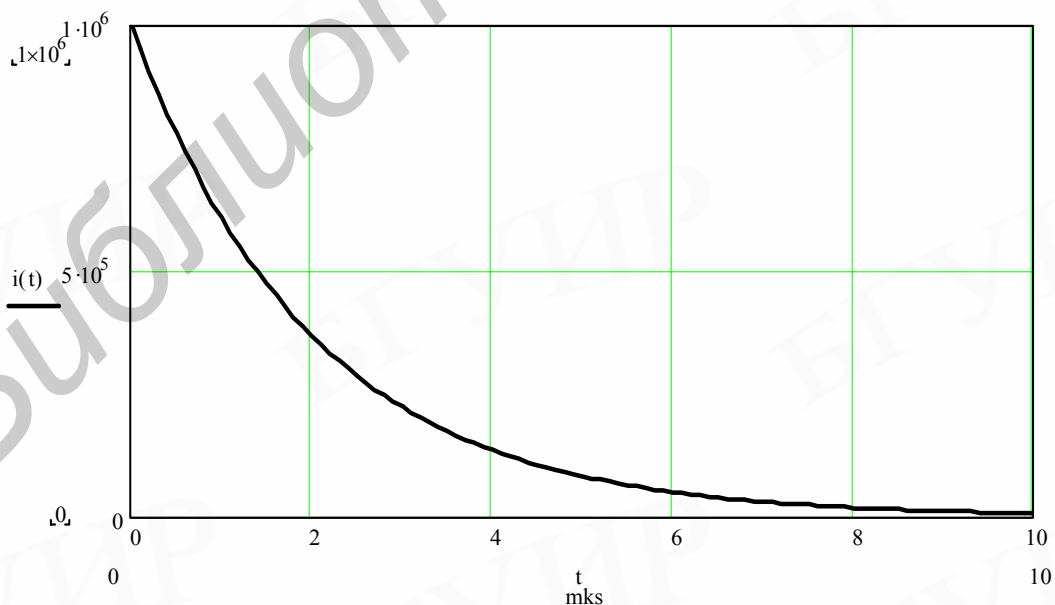


Рис. 3.19. Временная диаграмма модели тока грозового разряда

Итак, имеем

$$S(\omega) = \int_0^{\infty} i(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} I_0 e^{-\alpha t} e^{-i\omega t} dt =$$

$$= \frac{I_0}{-(\alpha + i\omega)} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)t} d[-(\alpha + i\omega)t] = \frac{I_0}{\alpha + i\omega}.$$

Поскольку для оценки влияния грозových разрядов на прием сигналов станций, работающих в диапазонах ДВ, СВ, КВ, УКВ, основное значение имеет амплитудный спектр излучения грозового разряда, то запишем

$$S(\omega) = \frac{I_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}.$$

Оценим частоту, на которой мощность излучения грозового разряда уменьшается вдвое. Это легко сделать, составив уравнение

$$\frac{I_0}{\sqrt{\alpha^2 + \omega_{gp}^2}} = \frac{I_0}{\alpha\sqrt{2}}.$$

Из этого уравнения легко находим $\omega_{gp} = \alpha = 10^4 \dots 10^5 \text{ с}^{-1}$. Это значит, что на частоте

$$f_{gp} = \omega_{gp} / 2\pi = (10^4 \dots 10^5) / 2\pi \approx 10^3 \dots 10^4 \text{ Гц}$$

мощность излучения грозового разряда составит половину от максимальной в начальный момент и с течением времени будет уменьшаться по тому же закону, по какому изменяется избирательность колебательного контура, поскольку график модуля спектральной плотности сигнала по форме напоминает форму резонансной кривой колебательного контура (см. рис. 3.19). Этот результат дает возможность заключить, что наиболее сильно будет влиять излучение грозových разрядов на прием сигналов станций, работающих в диапазоне ДВ, менее значительно оно будет сказываться на приеме сигналов радиостанций, работающих в диапазоне СВ и КВ, и почти никак не будет проявляться в диапазоне УКВ.

Пример 3.8. Найти спектр δ -функции.

Прямое преобразование Фурье δ -функции

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Из фильтрующего свойства δ -функции следует, что $S(\omega) = e^{-i\omega t}$. Таким образом, δ -функция имеет равномерную спектральную плотность во всей бесконечной области частот, а фазовая характеристика представляет собой прямую с угловым коэффициентом $-t$.

Пример 3.9. Найти спектр функции единичного скачка $l(t)$.

Функция единичного скачка не является абсолютно интегрируемой. Поэтому представим ее в виде предела экспоненциального импульса

$$1(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{-\alpha t}.$$

Спектральную плотность $S(\omega)$ функции $1(t)$ определим как предел спектральной плотности экспоненциального импульса при $\alpha \rightarrow 0$:

$$S(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + i\omega} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - i \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

При $\alpha \rightarrow 0$ первое слагаемое обращается в нуль на всех частотах, кроме частоты $\omega=0$, на которое оно становится бесконечно большим, а площадь, ограниченная этой функцией $\alpha/(\alpha^2 + \omega^2)$, равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\alpha} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Поэтому пределом первого слагаемого можно считать функцию $\pi\delta(\omega)$. Пределом второго слагаемого является функция $1/i\omega$. Окончательно получаем

$$S(\omega) = \pi\delta(\omega) + 1/i\omega.$$

Отсюда легко получаем информацию об АЧХ и ФЧХ единичного скачка $1(t)$.

Пример 3.10. Вычислить спектры испытательных гармонических сигналов $\sin(t)$ и $\cos(t)$.

Вычисление проведем с помощью пакета Mathcad. Набираем функцию, которую намерены преобразовать, затем выделяем переменную преобразования, обращаемся к меню *Символика*, в котором выбираем опцию *Трансформация*, переходим к подопции *Фурье*, нажимаем клавишу ВВОД и получаем результат преобразования. Аналогично выполняем операции для функции $\sin(t)$.

Затем можно выполнить операции обратного (инверсного) преобразования Фурье по примерно такому же сценарию. Листинг вычислений приведен на рис. 3.20. Здесь обозначение $Dirac(\omega)$ соответствует принятому разработчиками пакета обозначению δ -функции. Полученные с помощью системы Mathcad выражения легко преобразуем к исходным, используя известную формулу Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

$$\cos(t) \quad \pi \cdot Dirac(\omega - 1) + \pi \cdot Dirac(\omega + 1) \quad \frac{1}{2} \cdot \exp(i \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \exp(-i \cdot t)$$

$$\sin(t) \quad -i \cdot \pi \cdot Dirac(\omega - 1) + i \cdot \pi \cdot Dirac(\omega + 1) \quad \frac{-1}{2} \cdot i \cdot (\exp(i \cdot t) - \exp(-i \cdot t))$$

Рис. 3.20. Листинг программы вычислений прямого и обратного преобразований Фурье на примере анализа функций $\cos(t)$ и $\sin(t)$

3.8. Спектральный анализ непериодических сигналов в среде MathCAD

Проводя спектральный анализ периодических сигналов в среде Mathcad, мы использовали обычный математический аппарат для вычисления коэффициентов ряда Фурье. В этом случае нам приходилось составлять небольшие программы, используя простой язык программирования системы Mathcad, и мы убедились на конкретных примерах, что язык программирования системы Mathcad значительно облегчает труд по расчету коэффициентов ряда Фурье по сравнению с языками высокого уровня, такими как Pascal или Си.

Для выполнения спектрального анализа непериодических (одиночных) сигналов в математическом пакете Mathcad есть встроенные функции, выполняющие прямое $fft(v)$ и обратное $ifft(v)$ преобразования Фурье.

3.8.1. Встроенные функции пакета Mathcad спектрального анализа сигналов

В системе Mathcad для вычисления спектра $S(\omega)$ непериодического сигнала $s(t)$ используется функция $fft(v)$ и для восстановления сигнала $s(t)$ по его спектру есть встроенная функция $ifft(u)$. При этом функция $fft(v)$ представляет собой прямое преобразование Фурье действительных данных вектора v , k -й элемент которого дается формулой

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k v_k e^{i(2\pi j/n)k},$$

где n – число элементов в v .

Функция $ifft(u)$ возвращает вектор v , если $u = fft(v)$, т.е. выполняет обратное преобразование Фурье над результатом работы функции fft . Результат выполнения функции $ifft(u)$ представляет собой вектор, k -й элемент которого определяется формулой

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_k u_k e^{-i(2\pi j/n)k},$$

где n – число элементов в векторе v .

Функции $fft(v)$ и $ifft(v)$ дают точные (в пределах погрешности численных расчетов) результаты взаимно связанных прямого и обратного преобразований Фурье. При этом справедливо равенство $ifft(fft(v))=v$, которое можно использовать для контроля правильности результатов выполненных преобразований.

Среда Mathcad также содержит еще ряд функций, осуществляющих преобразования Фурье, с которыми читатель может познакомиться с помощью справочной системы этого пакета.

Пример 3.11. Вычислить спектр трапецеидального видеоимпульса.

Программа расчета АЧХ этого импульса приведена на рис. 3.21. Дадим краткие пояснения информации, содержащейся на этом рисунке. Форма сигнала описывается функцией s_t в терминах языка системы Mathcad. Здесь же показан график функции s_t . Затем мы используем встроенную функцию $fft(s)$, аргументом которой является функция s_t , представляющая сигнал, спектр которого мы вычисляем. Вычисленный спектр представляет собой массив комплексных чисел. Его легко посмотреть, набрав команду $c=$ и нажав клавишу ВВОД. Амплитуды спектральных составляющих находятся как модули соответствующих им комплексных чисел. Можно вычислить также и ФЧХ сигнала, но здесь есть особенности, которые надо учитывать при расчете ФЧХ, о которых уже говорилось при расчете ФЧХ периодических сигналов. В этом примере читателю предоставляются очень большие возможности для изучения спектров различных сигналов: легко получить треугольный импульс, положив $t1 = t2 = 4$, прямоугольный импульс, положив $t1 = 0$, а $t2 = \tau$ и т.д. Легко убедиться в том, что выполняя прямое преобразование Фурье, например, трапецеидального импульса $s(t)$ с помощью функции $c:=cfft(s)$, можно получить исходный сигнал $s(t)$, выполнив обратное преобразование Фурье над результатом, полученным с помощью прямого преобразования. Для этого достаточно составить функцию $d:=icfft(c)$ и построить ее график.

3.9. Спектральный анализ экспериментально полученных импульсов

При решении многих практических задач радиоэлектроники имеют дело с импульсами произвольной формы, которые трудно описать аналитическими средствами. Пакет Mathcad представляет по крайней мере две возможности для интерполяции функций, заданных табличным способом: кусочно-линейную и сплайновую. Используя встроенные функции $cspline$ и $interp$, легко написать программу для интерполяции экспериментально полученных импульсов.

В соответствии с этой программой в ряд Фурье можно разложить любую периодическую последовательность импульсов любой формы и провести спектральный анализ, вычислив любое число гармоник N . При этом используется матрица, имеющая два столбца. В первый столбец матрицы исходных данных записывается значение аргумента, а во второй столбец - соответствующие ему значения ординаты. Затем рассчитываются амплитуды косинусных a_n , синусных b_n и комплексной c_n спектральных составляющих и начальные фазы φ_n .

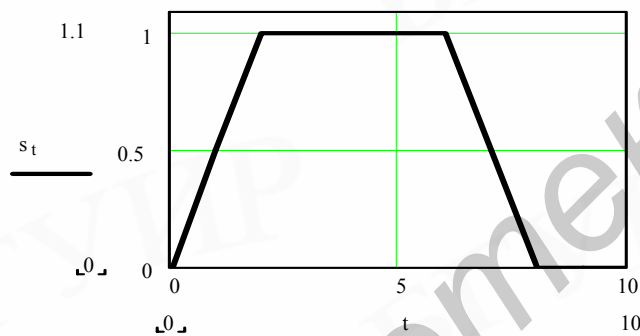
3.10. Сравнение спектров периодического и одиночного сигналов

Проведенный анализ показал, что периодический сигнал имеет линейчатый спектр, а одиночный сигнал - сплошной. Однако форма огибающих спектров этих сигналов отличается только масштабом, а спектры - размерностью.

Сравнивая значения постоянной составляющей периодического сигнала (это величина коэффициента $a_0/2$ в разложении (3.1)) с выражением для постоянной составляющей одиночного сигнала (3.5), приходим к следующим выводам. В случае периодического сигнала коэффициент $a_0/2$ имеет ту же размерность, что и сигнал, и определяется отношением площади сигнала к его периоду следования. Постоянная составляющая же непериодического сигнала представляет собой площадь сигнала под описывающей его функцией $s(t)$ и потому имеет размерность в виде произведения размерности сигнала на длительность сигнала.

$$\tau := 8 \quad t1 := 2 \quad t2 := 6 \quad t := 0..511 \quad A := 1$$

$$s_t := \begin{cases} \left(\left(A \cdot \frac{t}{t1} \right) \right) & \text{if } 0 \leq t < t1 \\ A & \text{if } t1 \leq t \leq t2 \\ \left[\left[A \cdot \left[1 - \frac{(t-t2)}{\tau-t2} \right] \right] \right] & \text{if } t2 < t \leq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$c := \text{fft}(s)$$

$$n := 0..200$$

$$i := (-1)^{0.5}$$

$$c_n := \text{Re}(c_n) - i \cdot \text{Im}(c_n) \quad \phi_n := \text{atan} \left(\frac{\text{Im}(c_n)}{\text{Re}(c_n)} \right)$$

$$c_n := \left[(\text{Re}(c_n))^2 + (\text{Im}(c_n))^2 \right]^{0.5} \quad c_0 := \frac{c_0}{2}$$

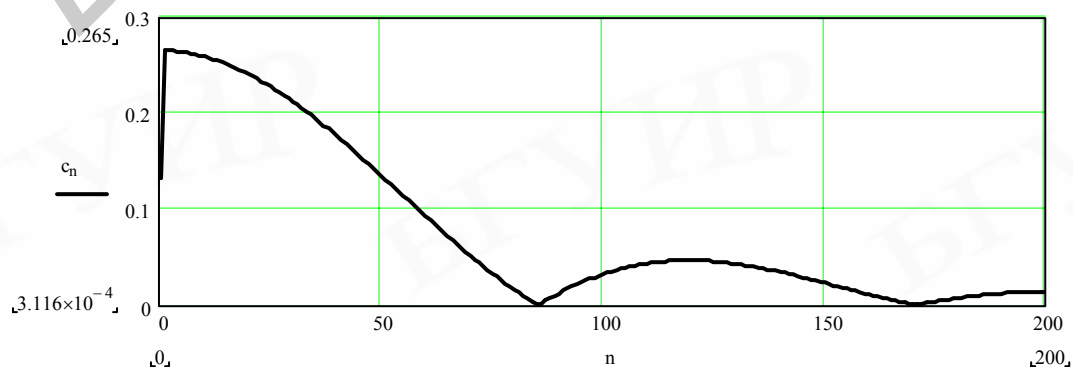


Рис. 3.21. Программа и результат расчета АЧХ спектра
одиночного трапецеидального импульса

В частности, если сигнал представляет собой одиночный прямоугольный импульс напряжения U_0 , то в этом случае постоянная составляющая его определяется произведением амплитуды импульса на длительность и имеет размерность [В·с]. Если этот импульс повторяется с периодом T , тогда постоянная составляющая такого сигнала имеет размерность [В] и зависит от отношения длительности импульса к его периоду следования. Таким образом, амплитуда основного лепестка спектральной диаграммы одиночного импульса определяется соотношением $S_0 = U_0 \cdot \tau$. При двух импульсах в сигнале величина S_0 удваивается, отражая физический факт увеличения энергии сигнала в два раза.

Равенство примерно единице произведения технической ширины спектра периодического и непериодического сигналов на их длительности оказывается справедливым, как для периодического, так и для одиночного сигнала, но размерности этих произведений для периодического и непериодического сигналов оказываются разными вследствие различия между величинами, определяющими спектральные характеристики этих сигналов. На практике, однако, это не имеет решающего значения.

Сигналы, для которых произведение технической ширины спектра на длительность равно примерно единице, называются *простыми*. В радиоэлектронике находят широкое использование сигналы, для которых это произведение имеет величину порядка нескольких тысяч. Такие сигналы называются *сложными*. Примером такого сигнала является прямоугольный импульс с линейной частотной модуляцией внутриимпульсного заполнения.

Результаты практических расчетов показывают, что если импульсы имеют крутые фронты, то в их спектре появляются значительной величины лепестки. Если же фронты у сигналов пологи, то величина лепестков уменьшается, а при гладких фронтах (экспоненциальный и косинусоидальный импульсы) они пропадают полностью. Из рассмотренных случаев наиболее сжатый спектр имеет импульс, представляющий собой положительный или отрицательный полупериод гармонического сигнала.

Особенности спектров сигналов нужно учитывать при разработке радиотехнических систем разного назначения. При близком расположении по частоте каналов радиосвязи из-за размытости спектра излучения происходит их взаимное влияние друг на друга. В этих случаях следует выбирать такие формы сигнала, у которых спектр излучения по возможности сжат. Сужение ширины спектра излучения весьма существенно при решении проблемы электромагнитной совместимости. В других случаях, например, при разработке хороших электромузыкальных инструментов, спектр сигнала должен быть по возможности размыт в широкой полосе частот и поэтому следует выбирать сигнал, имеющий расширенный спектр.

4. АМПЛИТУДНО-МОДУЛИРОВАННЫЕ (АМ) СИГНАЛЫ

4.1. Аналитическое выражение для тонального АМ-колебания

Пусть в качестве модулирующего (управляющего) колебания используется гармоническое колебание

$$u_M(t) = U_M \cos \Omega t,$$

где U_M – амплитуда модулирующего напряжения.

При амплитудной модуляции изменение $\Delta U(t)$ амплитуды U_m высокочастотного колебания (начальная фаза для простоты принята равной нулю)

$$U(t) = U_m \cos \omega_0 t$$

пропорционально управляющему сигналу:

$$\Delta U(t) = k_a u_M(t) = k_a U_M \cos \Omega t = \Delta U_m \cos \Omega t.$$

Поэтому для амплитудно-модулированного колебания можно записать

$$U_{AM}(t) = (U_m + \Delta U(t)) \cos \omega_0 t = U_m \left(1 + \frac{\Delta U_m}{U_m} \cos \Omega t \right) \cos \omega_0 t,$$

или

$$U_{AM}(t) = U_m (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t,$$

где $m = \Delta U_m / U_m$ – коэффициент модуляции, который характеризует степень воздействия низкочастотного модулирующего колебания на высокочастотное (модулируемое) колебание. В обычных режимах работы АМ-передатчиков коэффициент модуляции изменяется от 0 до 1 или, если он измеряется в процентах, от 0 до 100 %. При $m > 1$ наступает «перемодуляция», в результате чего возникают искажения при передаче сообщений.

Изобразим графически АМ-колебание для случая тональной модуляции, у которого коэффициент модуляции $m = 0,9$ и частота несущего колебания превышает частоту модуляции в 10 раз (рис.4.1).

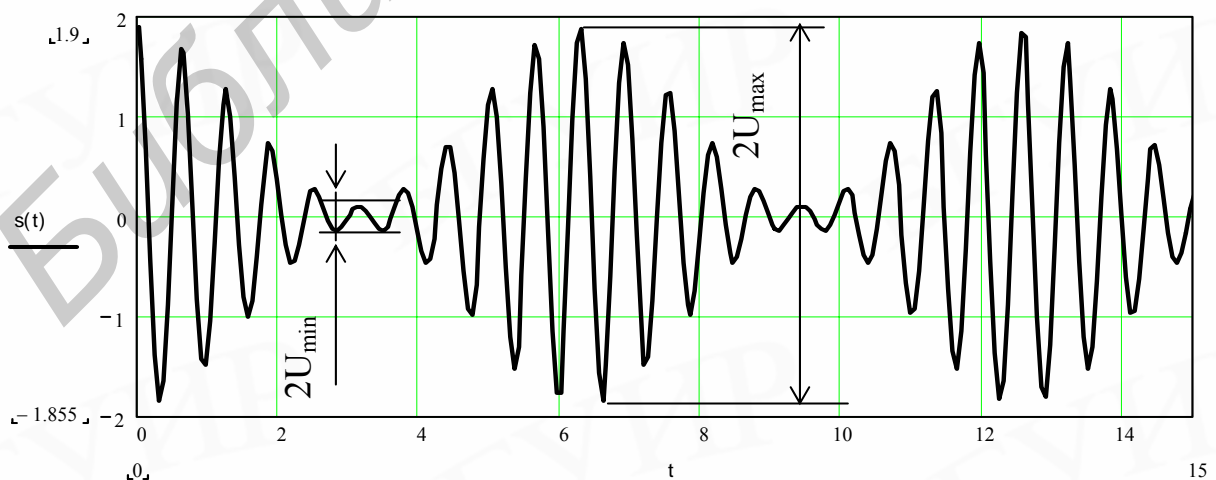


Рис. 4.1. Осциллограмма АМ-колебания с двумя боковыми частотами

Из рис. 4.1 видим, что приращение амплитуды высокочастотного колебания составляет

$$\Delta U_m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{2}.$$

Амплитуду высокочастотного колебания определим из того же рисунка:

$$U_m = \frac{U_{\max} + U_{\min}}{2}.$$

Это дает возможность получить простую расчетную формулу для экспериментальной оценки величины коэффициента модуляции:

$$m = \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}.$$

При осциллографическом методе измерения коэффициента глубины модуляции для повышения точности измерений в качестве U_{\max} и U_{\min} берут их удвоенные величины.

4.2. Спектр АМ-колебания

Спектр – это совокупность гармонических составляющих сигнала. Чтобы получить информацию о спектре АМ-колебания, перепишем его аналитическое выражение иначе:

$$\begin{aligned} U_{AM}(t) &= U_m \cos \omega_0 t + m U_m \cos \Omega t \cos \omega_0 t = \\ &= U_m \cos \omega_0 t + \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что спектр тонально-модулированного по амплитуде колебания состоит из трех составляющих: несущей ω_0 с амплитудой U_m , равной амплитуде высокочастотного колебания, и двух боковых частот $\omega_0 + \Omega$ и $\omega_0 - \Omega$ с одинаковыми амплитудами $m U_m / 2$, расположенными симметрично относительно несущей частоты ω_0 . Спектр амплитуд АМ-колебания представлен на рис. 4.2. Легко видеть, что ширина спектра АМ-колебания имеет величину, равную удвоенному значению частоты модуляции, т.е.

$$\Delta \omega_{sp} = 2\Omega.$$

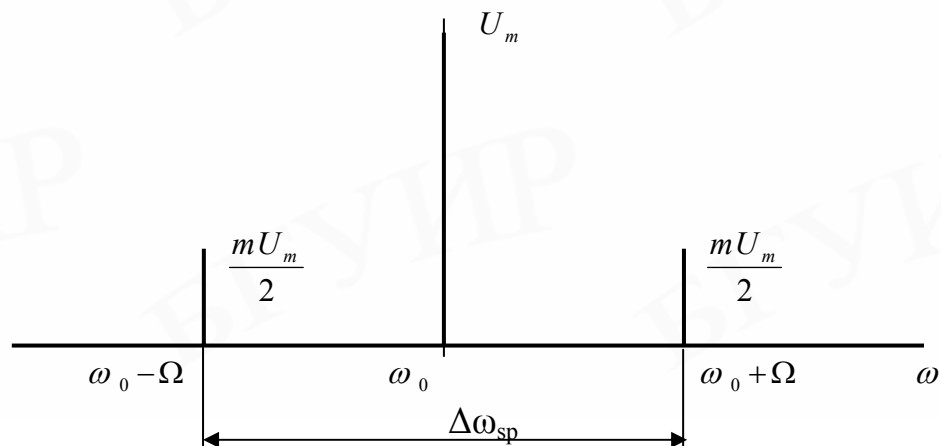


Рис. 4.2. Спектр тонально-модулированного по амплитуде колебания

Спектр такого сигнала можно представить в виде векторной диаграммы (рис.4.3), на которой вектор напряжения U_m несущего колебания представлен неподвижным, а векторы, соответствующие нижней и верхней боковым составляющим – вращающимися в противоположные стороны векторами с частотами Ω и $-\Omega$.

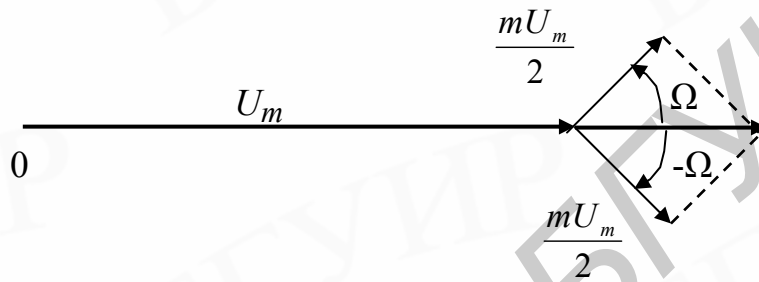


Рис. 4.3. Векторная диаграмма колебания с тональной амплитудной модуляцией

Если высокочастотное колебание модулируется сразу несколькими частотами (спектром частот), то легко понять, что поскольку каждая гармоника управляющего (модулирующего) напряжения создает две боковые частоты в спектре радиосигнала, расположенные симметрично относительно несущей частоты колебания, то спектр такого АМ-колебания состоит из несущей и двух боковых полос – верхней и нижней. Ширина каждой боковой полосы равна $\Omega_{\max} - \Omega_{\min}$, а ширина спектра АМ-колебания в этом случае получается равной

$$\Delta\omega_{sp} = 2\Omega_{\max}.$$

Графически спектр АМ-колебания в этом случае можно представить спектральной диаграммой, показанной на рис. 4.4.

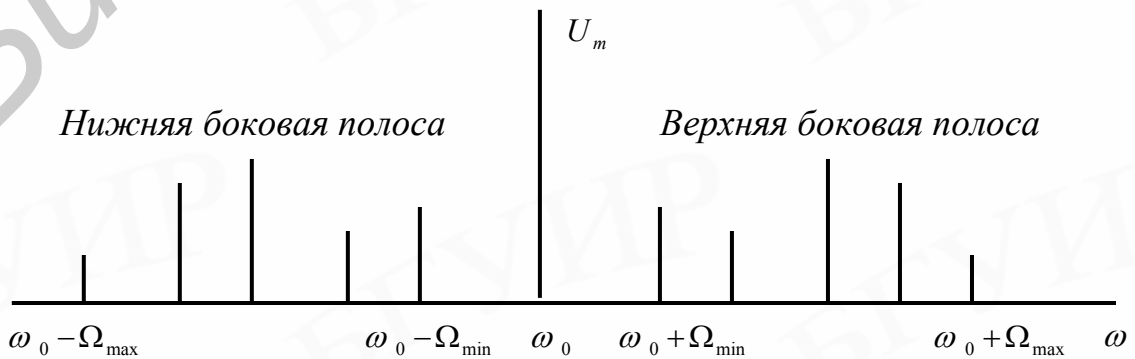


Рис. 4.4. Спектр колебания, модулированного по амплитуде спектром частот

4.3. АМ-колебания с однополосной модуляцией

Из рис. 4.4 мы видим, что в нижней боковой полосе содержится столько же информации, сколько и в верхней. Хотя в практике вещания информация передается с помощью излучения двух боковых полос частот, принципиальной необходимости это делать нет. Наоборот, передача информации с помощью одной боковой полосы позволит экономнее использовать место в эфире, так как полоса излучаемого сигнала сокращается при этом вдвое.

Часто при однополосной связи подавляется нижняя полоса частот и вместе с ней излучается 15-20 %-й остаток несущей частоты. При этом снижается нагрузка на передатчик, так как при однополосной передаче затрачивается мощность на излучение только одной боковой полосы частот. Отметим, что недостатком связи на одной боковой полосе частот является более сложная настройка приемной аппаратуры

4.4. АМ-колебания без несущей

Для получения сигналов с другими видами модуляции используют АМ-сигналы с подавленной несущей частотой. Такие сигналы называются АМ-колебаниями с балансной модуляцией. На рис. 4.5 показана осциллограмма АМ-колебания с подавленной несущей, построенная по уравнению

$$s1(t) = m \cos t \cos 10t,$$

когда $m = 0,9$. При этом частота несущего колебания в 10 раз превышает частоту управляющего сигнала.

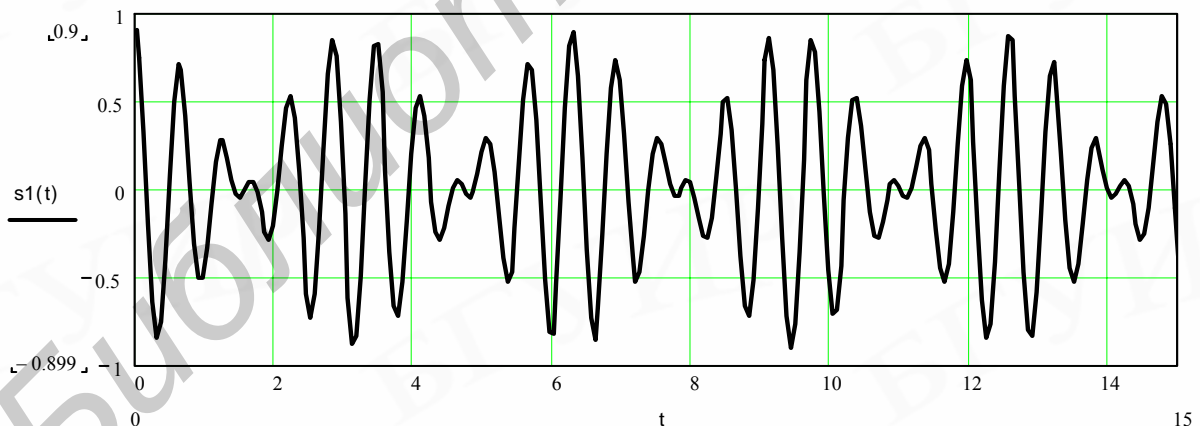


Рис. 4.5. Осциллограмма АМ-колебания с подавленной несущей

4.5. АМ-колебания с частично подавленной боковой полосой

Система связи с частично подавленной боковой полосой обладает преимуществами систем, работающих с одной или двумя боковыми полосами, так как не имеет присущих им недостатков. Эта система занимает практически ту же полосу частот, что и система с одной боковой полосой и составляет половину полосы, занимаемой системой с двумя боковыми полосами. Она

может получаться из сигнала с двумя боковыми полосами с помощью относительно простых фильтров с плавной характеристикой затухания и почти нечувствительна к селективным замираниям.

Если в сигнал с частично подавленной боковой полосой ввести несущее колебание большой амплитуды, тогда такой сигнал можно детектировать обычным детектором. В этом случае система с частично подавленной боковой полосой объединяет все преимущества систем с амплитудной модуляцией, как с одной боковой полосой, так и с двумя. Она используется в вещательных телевизионных системах связи для передачи сигналов изображения.

Сигналы с одной боковой полосой получать несколько затруднительно. Например, для получения сигнала с одной боковой полосой требуется фильтр с резкой отсечкой, что практически сложно реализовать. Эта трудность успешно преодолевается частичным подавлением боковой полосы. Такой способ передачи предусматривает плавную отсечку одной из боковых полос.

4.6. Мощность АМ-колебаний

Если модулирующий сигнал отсутствует (режим молчания), антенна, как нагрузка передатчика, эквивалентна некоторому активному сопротивлению R , питается током

$$i = I_m \cos \omega_0 t$$

и потребляет от передатчика мощность

$$P_H = \frac{1}{2} I_m^2 R,$$

которая называется мощностью в режиме несущей.

Сравним с этой мощностью мощности, характеризующие АМ-колебание в простейшем случае, когда модулирующий сигнал является гармоническим колебанием, т.е. когда ток выражается соотношением

$$i = I_m \cos \omega_0 t + \frac{m I_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{m I_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Найдем среднюю мощность за период T колебания низкой частоты – так называемую телефонную мощность:

$$P_T = P_H + 2P_G,$$

где P_G – мощность нижней или верхней полосы боковых частот.

Имеем

$$P_T = \frac{1}{2} I_m^2 R + 2 \frac{1}{2} \left(\frac{m I_m}{2} \right)^2 R = P_H \left(1 + \frac{m^2}{2} \right).$$

Отсюда видно, что P_T может превышать мощность в режиме несущей при $m = 1$ в 1,5 раза.

Найдем среднюю мощность P_T за период высокочастотного колебания. Так как амплитуда АМ-колебания меняется от максимального значения $I_m(1 + m)$ до минимального $I_m(1 - m)$ в течение периода модулирующего

напряжения, то и мощность P_{τ} от периода к периоду высокочастотного сигнала будет меняться. Оценим максимальную $P_{\tau \max}$ и минимальную $P_{\tau \min}$ мощности АМ-колебания за период высокочастотного колебания:

$$P_{\tau \max} = \frac{1}{2}[I_m(1 + m)]^2 R = \frac{1}{2}I_m^2 R(1 + m)^2 = P_H(1 + m)^2,$$

$$P_{\tau \min} = P_H(1 - m)^2.$$

Очевидно, что при $m = 1$ $P_{\tau \max} = 4P_H$. Отсюда видно, что при амплитудной модуляции выходной каскад передатчика в случае, когда $m = 1$, кратковременно отдает в нагрузку (антенну) четырехкратную мощность по сравнению с мощностью в режиме молчания. Это является весьма существенным недостатком амплитудной модуляции, так как выходные каскады всегда оказываются недогруженными по мощности. Особенно это важно при конструировании передатчиков значительной мощности. Например, у передатчика с выходной мощностью 10 кВт выходные каскады должны быть рассчитаны на выходную мощность 40 кВт.

Само по себе несущее колебание не содержит передаваемой информации и служит для переноса высокочастотной энергии через окружающее пространство к месту приема этой информации. С информационной точки зрения энергия, используемая для передачи несущего колебания, расходуется бесполезно. Понимая под эффективностью передачи отношение мощности сигналов, содержащих в себе передаваемую информацию, к излучаемой мощности АМ-колебания, оценим эффективность передачи информации с помощью амплитудной модуляции. Имеем

$$\eta = \frac{2P_{\sigma}}{P_H + 2P_{\sigma}} = \frac{m^2}{2 + m^2} 100 \%$$

При наибольшем коэффициенте модуляции эффективность передачи равна 33 %, так как 67 % мощности передается несущим колебанием и расходуется без всякой пользы. При $m < 1$ эффективность передачи еще меньше чем 33 %. Однако при однополосной амплитудной модуляции, когда несущая частота не излучается, эффективность передачи является высокой и равна 100 %.

Легко понять, что как при однополосной, так и при балансной модуляции эффективность передачи информации будет значительно выше, чем при использовании АМ-колебания с несущей и двумя боковыми полосами частот.

5. СИГНАЛЫ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ

Наиболее общим выражением для мгновенного значения радиосигнала является

$$u(t) = U_m(t) \cos \Psi(t),$$

где амплитуда $U_m(t)$ и фазовый угол $\Psi(t)$ суть произвольные функции времени.

При амплитудной модуляции изменяется по закону управляющего напряжения амплитуда радиосигнала. Если амплитуда U_m постоянна при изменении фазового угла $\Psi(t)$ по закону управляющего сигнала, то модуляция называется угловой. Эта модуляция делится на фазовую и частотную.

При частотной модуляции происходит изменение несущей частоты по закону управляющего сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_\omega U_M(t).$$

При фазовой модуляции по закону управляющего сигнала изменяется фаза высокочастотного колебания

$$\varphi(t) = \varphi_0 + k_\varphi U_M(t).$$

В физическом смысле ЧМ и ФМ имеют сходство, т.е. колебание, модулированное по фазе, претерпевает изменение несущей частоты сигнала. Действительно, мгновенное значение частоты высокочастотного сигнала равно

$$\omega = d\Psi/dt,$$

откуда

$$\Psi = \int_0^t \omega dt.$$

Производная показывает, что закон изменения фазы колебания определяет его частоту, а интеграл показывает, что всякое изменение частоты колебания отражается на изменении его фазы. При модуляции одним тоном ФМ- и ЧМ-колебания вообще неразличимы. Различие между ФМ- и ЧМ-сигналами проявляется лишь при модуляции спектром частот, благодаря чему частотная модуляция получила более широкое распространение.

Рассмотрим более подробно ФМ- и ЧМ-колебания, модулированные одним тоном:

$$u_M(t) = U_M \cos \Omega t.$$

5.1. ФМ-колебания

При фазовой модуляции фазовый угол изменяется по закону управляющего сигнала:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \Delta\varphi(t) = \varphi_0 + k_\varphi u_M(t) = \varphi_0 + k_\varphi U_M \cos \Omega t = \varphi_0 + \beta \cos \Omega t,$$

где $\beta = k_\varphi U_M$ – индекс модуляции.

Индекс модуляции физически показывает наибольшее отставание или опережение по фазе модулированного напряжения по сравнению с фазой, которую имел бы немодулированный сигнал. Измеряется индекс модуляции в радианах.

При фазовой модуляции индекс модуляции зависит только от амплитуды управляющего сигнала и не зависит от его частоты (рис. 5.1).

Так как мгновенное значение фазового угла модулированного колебания определяется формулой

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) = \omega_0 t + \beta \cos \Omega t,$$

то угловая частота, являющаяся производной фазового угла по времени, равна

$$\omega = \frac{d\Psi}{dt} = \omega_0 - \beta \Omega \sin \Omega t = \omega_0 - \Delta\omega \sin \Omega t,$$

где $\Delta\omega = \beta \Omega$ определяет амплитуду отклонения частоты модулированного колебания от значения ω_0 и называется девиацией частоты.

Как видно из рис. 5.1, девиация частоты линейно зависит от частоты управляющего сигнала.

Следовательно, при фазовой модуляции изменяется не только фаза колебания, но и его частота, причем величина отклонения частоты зависит как от амплитуды, так и от частоты управляющего сигнала.

Запишем выражение для мгновенного значения ФМ-колебания:

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \cos \Omega t + \varphi_0).$$

Полагая $\varphi_0 = 0$, имеем

$$U_{\text{ФМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \cos \Omega t).$$

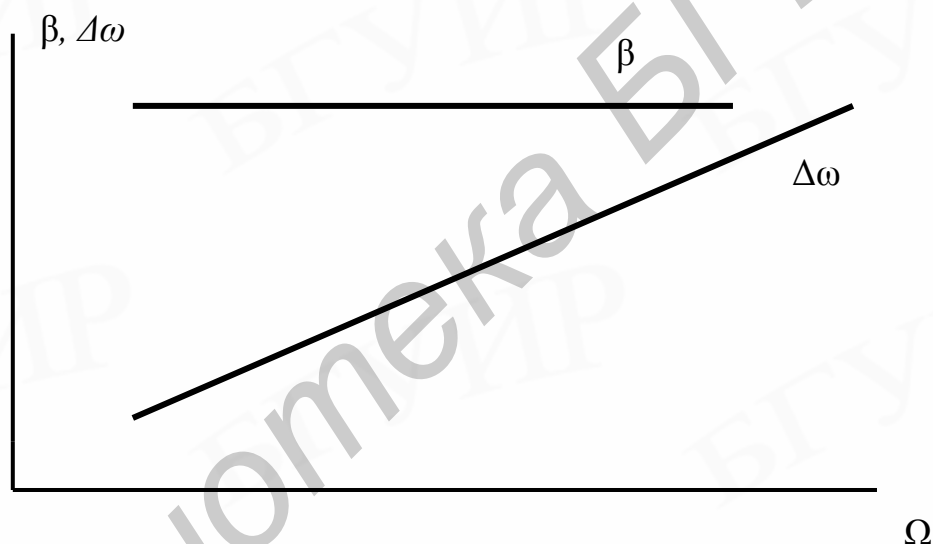


Рис. 5.1. Зависимости индекса фазовой модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала

5.2. ЧМ-колебания

При частотной модуляции несущая частота изменяется по закону управляющего сигнала:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t) = \omega_0 + k_q U_M(t) = \omega_0 + k_q U_M \cos \Omega t = \omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t,$$

где $\Delta\omega = k_q U_M$ — девиация частоты, которая физически представляет собой амплитуду отклонения несущей частоты от среднего значения ω_0 . При частотной модуляции девиация зависит только от амплитуды управляющего сигнала и не зависит от частоты модулирующего сигнала.

Учитывая, что угловая частота есть скорость изменения во времени фазового угла, имеем

$$\omega(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}.$$

Отсюда

$$\Psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt = \int (\omega_0 + \Delta\omega \cos \Omega t) dt = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \varphi_0.$$

Положим $\varphi_0 = 0$, тогда

$$\Psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \Omega t = \omega_0 t + \beta \sin \Omega t.$$

Величина $\beta = \Delta\omega / \Omega$ называется индексом частотной модуляции и измеряется в радианах. Индекс частотной модуляции зависит и от амплитуды управляющего сигнала, и от его частоты. Физический смысл индекса частотной модуляции такой же, как и индекса фазовой модуляции. Таким образом, при частотной модуляции происходит изменение не только частоты несущего колебания, но и его фазы. На рис. 5.2 показаны зависимости индекса частотной модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала.

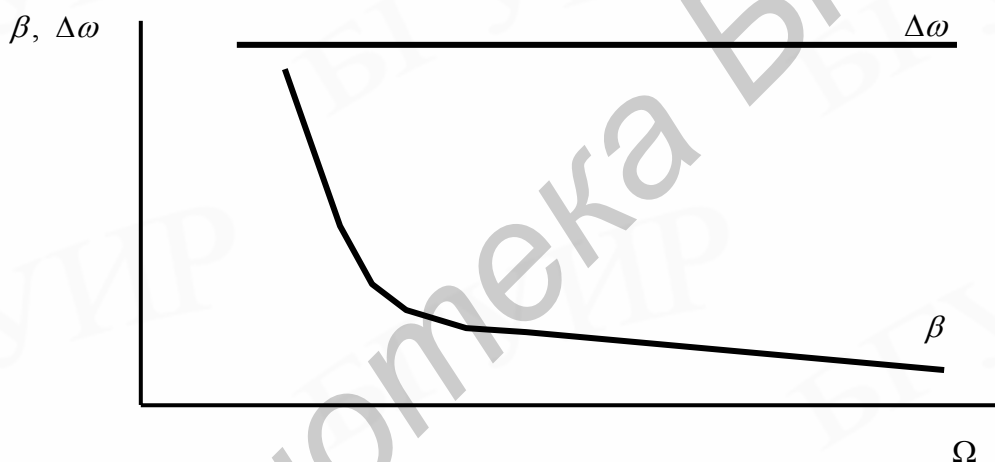


Рис. 5.2. Зависимости индекса частотной модуляции и девиации от частоты управляющего сигнала

Запишем выражение для мгновенного значения ЧМ-колебания:

$$U_{\text{ЧМ}}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t).$$

Оно полностью совпадает с выражением для мгновенного значения фазомодулированного колебания. Следовательно, при тональной модуляции ЧМ- и ФМ-колебания действительно неразличимы. Но при модуляции широким спектром частот выявляются преимущества частотной модуляции, что и обусловило ее большее распространение.

5.3. Спектр сигнала с угловой модуляцией

Мгновенное значение ФМ- и ЧМ-сигнала, промодулированного напряжением

$$u(t) = U_M \cos \Omega t,$$

имеет вид

$$U_{УМ}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \beta \sin \Omega t).$$

Запишем это выражение в другом виде:

$$U_{УМ}(t) = U_m \cos(\beta \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(\beta \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Отсюда видно, что колебание с угловой модуляцией можно разложить на два колебания частоты ω_0 с амплитудами $A_1 = U_m \cos(\beta \sin \Omega t)$ и $A_2 = U_m \sin(\beta \sin \Omega t)$. При этом интересны два случая: $\beta \ll 1$ и $\beta \gg 1$, соответствующие узкополосной и широкополосной модуляции.

5.3.1. Спектр сигнала с узкополосной угловой модуляцией

В случае узкополосной угловой модуляции
 $\cos(\beta \sin \Omega t) \approx 1$, $\sin(\beta \sin \Omega t) \approx \beta \sin \Omega t$.

Сигнал с тональной угловой модуляцией можно описать выражением

$$\begin{aligned} U_{УМ}(t) &= U_m \cos \omega_0 t - U_m \beta \sin \Omega t \sin \omega_0 t = \\ &= U_m \cos \omega_0 t + \frac{\beta U_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{\beta U_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ФМ- и ЧМ-колебания с тональной модуляцией можно представить при $\beta \ll 1$ как АМ-колебание в виде несущей и двух боковых частот.

Амплитудный спектр сигнала с узкополосной тональной угловой модуляцией совпадает со спектром АМ-колебания, показанным на рис. 4.2, из которого видно, что такой сигнал занимает в эфире полосу частот шириной 2Ω . Роль коэффициента модуляции в таком сигнале играет индекс частотной модуляции. Однако используют узкополосную угловую модуляцию редко, поскольку ее помехозащищенность не превосходит помехозащищенности амплитудной модуляции. Чтобы оттенить разницу между тонально модулированным по амплитуде колебанием и колебанием с тональной угловой модуляцией, построим векторную диаграмму колебания с узкополосной тональной угловой модуляцией (рис. 5.3).

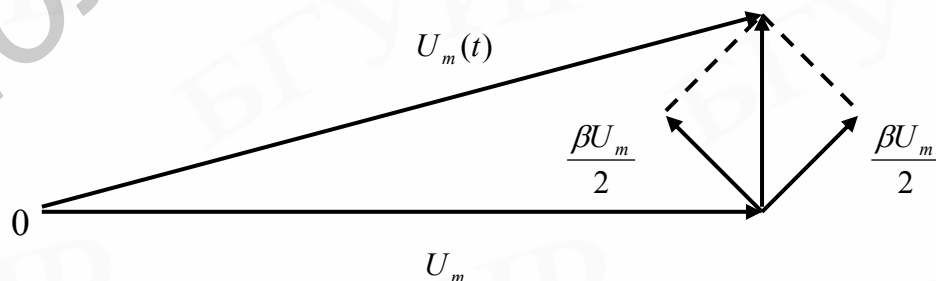


Рис. 5.3. Векторная диаграмма колебания с узкополосной тональной угловой модуляцией

Сравнив рис. 5.3 с рис. 4.2, видим, что действительно этому колебанию присуще изменение фазового угла при модуляции, а также имеет место

паразитное изменение амплитуды несущего колебания вследствие изменения длины вектора $U_m(t)$.

5.3.2. Спектр сигнала с широкополосной угловой модуляцией

Итак, мы убедились, что фазовая и частотная модуляции – это разные виды угловой модуляции, но различие между ними не столь существенно. При фазовой модуляции фаза изменяется линейно с модулирующей функцией, тогда как при частотной модуляции фаза изменяется линейно с интегралом от модулирующей функции.

Если проинтегрировать модулирующую функцию, а затем полученным колебанием модулировать несущую частоту по фазе, то получится сигнал с частотной модуляцией.

Если продифференцировать модулирующую функцию и полученное колебание использовать для модуляции частоты, то получим сигнал с фазовой модуляцией.

На практике легче получить сигнал с фазовой модуляцией, чем с частотной. Сначала интегрируют модулирующую функцию, а затем подают ее на фазовый модулятор, в результате чего получают сигнал с частотной модуляцией. Поэтому во многих системах сигналы с частотной модуляцией получают с помощью фазовых модуляторов, на которые в качестве модулирующей функции поступает напряжение, равное результату интегрирования той функции.

Девиация частоты при фазовой модуляции не постоянна, а пропорциональна частоте модулирующего напряжения. Следовательно, полоса частот, необходимая для передачи сигналов с фазовой модуляцией, не остается постоянной и сильно зависит от формы модулирующей функции.

Чтобы решить вопрос о спектре широкополосной частотной модуляции, представим аналитическое выражение частотно-модулированного колебания следующим образом:

$$U_{ЧМ}(t) = U_m \cos(\beta \sin \Omega t) \cos \omega_0 t - U_m \sin(\beta \sin \Omega t) \sin \omega_0 t.$$

Учитывая, что

$$\cos(\beta \sin \Omega t) = J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\Omega t + 2J_4(\beta) \cos 4\Omega t + \dots,$$

$$\sin(\beta \sin \Omega t) = 2J_1(\beta) \sin \Omega t + 2J_3(\beta) \sin 3\Omega t + \dots,$$

для сигнала с частотной модуляцией получим:

$$\begin{aligned} U_{ЧМ}(t) &= U_m [J_0(\beta) + 2J_2(\beta) \cos 2\Omega t + 2J_4(\beta) \cos 4\Omega t + \dots] \cos \omega_0 t - \\ &\quad - U_m [2J_1(\beta) \sin \Omega t + 2J_3(\beta) \sin 3\Omega t + \dots] \sin \omega_0 t = \\ &= U_m J_0(\beta) \cos \omega_0 t + U_m J_1(\beta) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] + \\ &\quad + U_m J_2(\beta) [\cos(\omega_0 + 2\Omega)t + \cos(\omega_0 - 2\Omega)t] + \\ &\quad + U_m J_3(\beta) [\cos(\omega_0 + 3\Omega)t - \cos(\omega_0 - 3\Omega)t] + \dots \end{aligned}$$

Таким образом, спектр частотно-модулированного колебания состоит из бесконечного числа составляющих, расположенных симметрично относительно

несущей частоты ω_0 и отстоящих от последней на $n\Omega$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$
 Амплитуда составляющих равна

$$U_{nm} = U_m J_n(\beta),$$

т.е. амплитуда спектральных составляющих определяется величиной индекса частотной модуляции β .

Оказывается, что при $\beta \gg 1$ величина $J_n(\beta)$ изменяется более или менее равномерно при всех значениях n , меньших β (рис.5.4). При n , близких к β , функция $J_n(\beta)$ образует всплеск, и при дальнейшем увеличении n быстро убывает до нуля. Отсюда следует, что наивысший номер боковой спектральной составляющей, с амплитудой которой надо считаться, приблизительно равен индексу модуляции. Это позволяет оценить ширину спектра колебания с тональной частотной модуляцией:

$$\Delta\omega_{cn} \approx 2n_{\max}\Omega \approx 2\beta\Omega = 2\Delta\omega.$$

Следовательно, при больших индексах модуляции ширина спектра модулированного колебания близка к удвоенной девиации частоты.

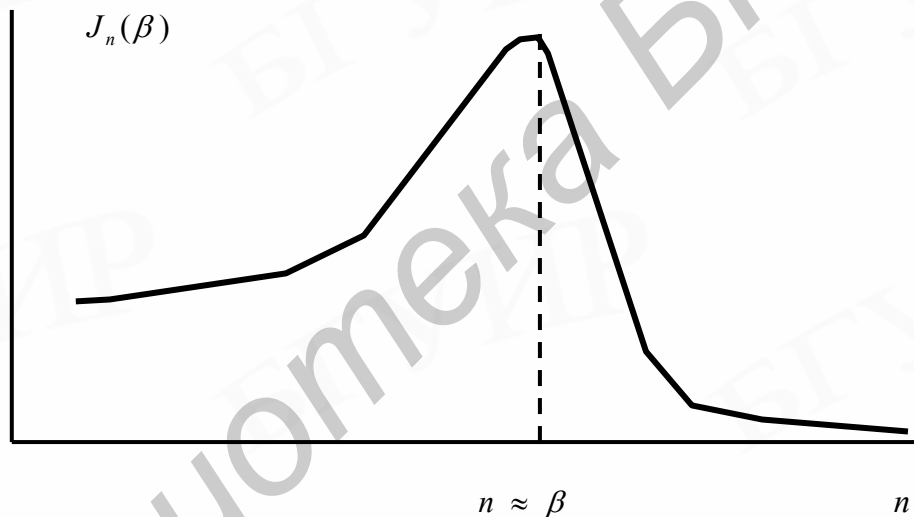


Рис. 5.4. Зависимость значений функции Бесселя порядка n первого рода от n

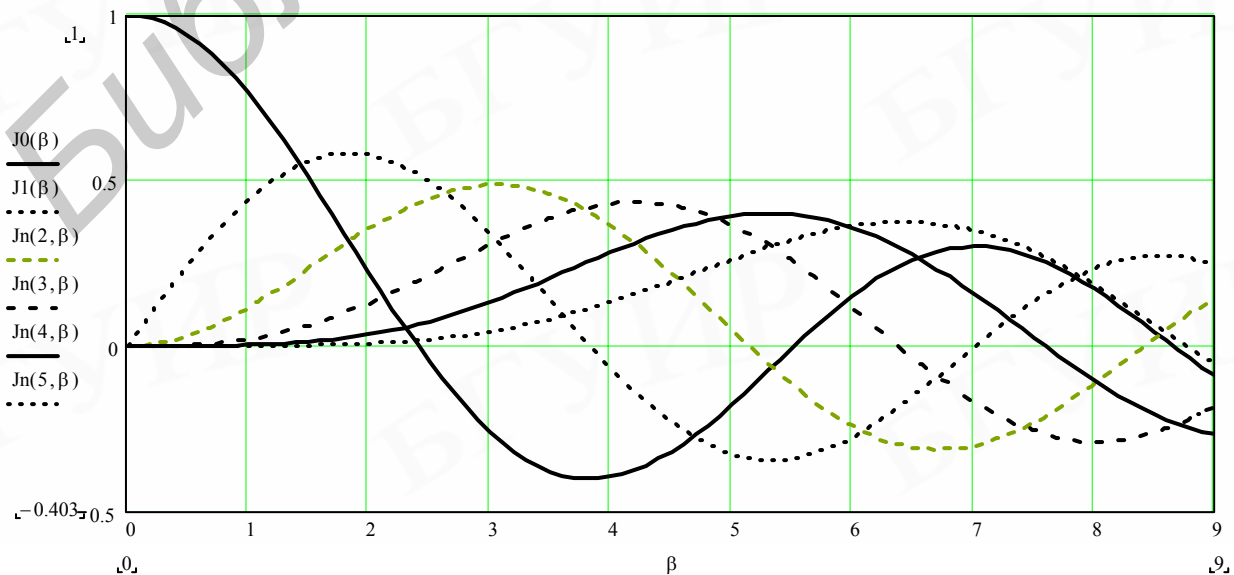


Рис. 5.5. Графики функций Бесселя первого рода порядка от нулевого до пятого включительно, построенные в зависимости от индекса модуляции, изменяющегося от 0 до 9

Используя возможности математического пакета Mathcad, построим спектральные диаграммы колебаний с широкополосной угловой модуляцией, осуществляемой гармоническим колебанием частоты Ω для нескольких характерных случаев. На рис.5.6 – 5.8 показаны спектры колебания с широкополосной угловой модуляцией, из рассмотрения которых можно убедиться в том, что с увеличением индекса модуляции возрастает ширина спектра модулированного колебания. При этом расстояния между спектральными составляющими определяются величиной частоты модулирующего сигнала. Видим, что амплитудный спектр сигнала с угловой модуляцией симметричен относительно несущей частоты.

Можно построить большое количество подобных спектральных диаграмм. Например, из рис. 5.5 ясно, что вторая пара боковых составляющих будет отсутствовать в спектре сигнала с угловой модуляцией, когда функция Бесселя второго порядка будет проходить через нуль, т.е. при значении $\beta \approx 5,2$. Поясним, как это можно сделать.

Чтобы построить подобный график, нужно сформировать соответствующий вектор. Для этого нужно набрать имя создаваемого вектора, нажать клавиши Shift+: и вызвать запрос системы о количестве строк и столбцов в формируемом объекте, нажав клавиши Ctrl+M. Дело в том, что по этому запросу мы можем формировать и матрицы. Поскольку нам нужно сформировать вектор, то устанавливаем количество столбцов, равное 1, а количество строк – в зависимости от желаемой ширины спектра. Чтобы изобразить спектры, приведенные на рис. 5.5–5.7, мы установили количество строк, равное 15. Если нужна более полная информация о величине спектральных составляющих в спектре исследуемого сигнала, то следует установить большее число. После этого появится шаблон создаваемого вектора, который необходимо заполнить соответствующими числами. В данном случае используются встроенные функции Бесселя первого рода, являющиеся решениями дифференциального уравнения

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0,$$

где n – порядок соответствующей функции.

Чтобы построить график, соответствующий заданному вектору, следует нажать клавиши Shift+@. Появится шаблон графика, на котором достаточно указать по оси абсцисс индекс модуляции β , а по оси ординат – имя вектора. После нажатия клавиши ВВОД система построит график созданного вектора.

На практике используется более точная формула для оценки ширины спектра:

$$\Delta\omega = 2(\Delta\omega + \Omega).$$

Обратимся к рис. 5.1 и 5.2. Из рис. 5.2 видно, что девиация частоты $\Delta\omega$, определяющая ширину спектра ЧМ-сигнала $\Delta\omega_{\text{сш}} \approx 2\Delta\omega$, не зависит от частоты управляющего напряжения. Это обстоятельство обеспечивает постоянство ширины спектра ЧМ-сигнала при передаче как узкополосных, так и широкополосных сигналов.

С другой стороны, из рис. 5.1 видно, что девиация ФМ-сигнала линейно зависит от частоты управляющего напряжения. Это значит, что ФМ-сигнал будет занимать полосу частот, ширина которой определяется верхней частотой модулирующего напряжения. Чем выше частота управляющего напряжения, тем более широкий спектр будет иметь сигнал с фазовой модуляцией. Становится понятно, почему фазовая модуляция не используется для организации радиовещания. Чтобы полностью использовать возможности фазовой модуляции, пришлось бы делать как минимум два типа приемников: узкополосный (для речевых программ) и широкополосный (для программ высокохудожественных).

Кроме того, помехоустойчивость связи определяется также шириной полосы используемого сигнала. В случае применения фазовой модуляции для радиовещания происходила бы передача с переменной помехоустойчивостью.

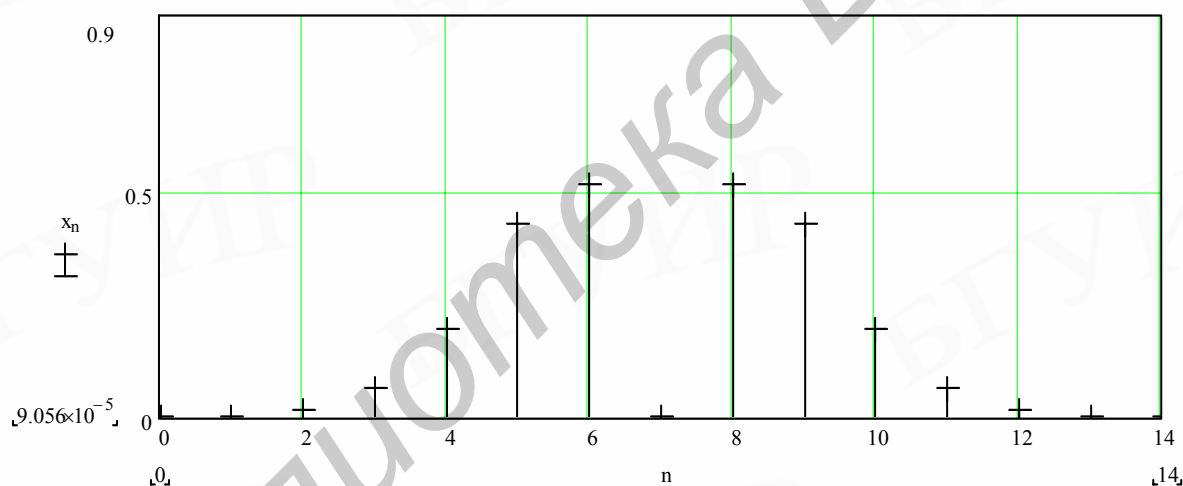


Рис. 5.6. Спектр амплитуд сигнала с угловой модуляцией гармоническим сигналом при отсутствии несущего колебания при индексе модуляции $\beta=2,405$

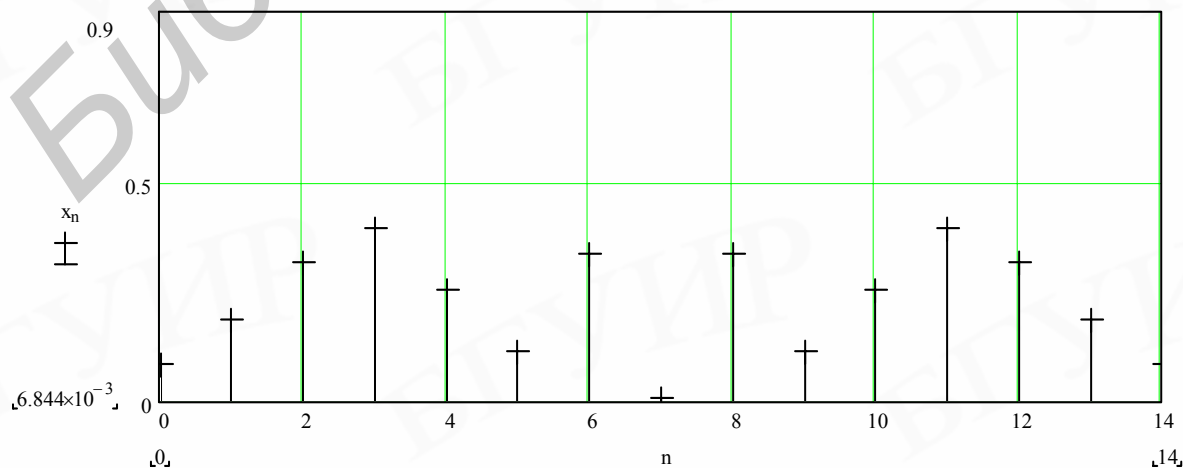


Рис. 5.7. Спектр амплитуд сигнала с угловой модуляцией гармоническим

сигналом при отсутствии несущего колебания при индексе модуляции $\beta=5,5$

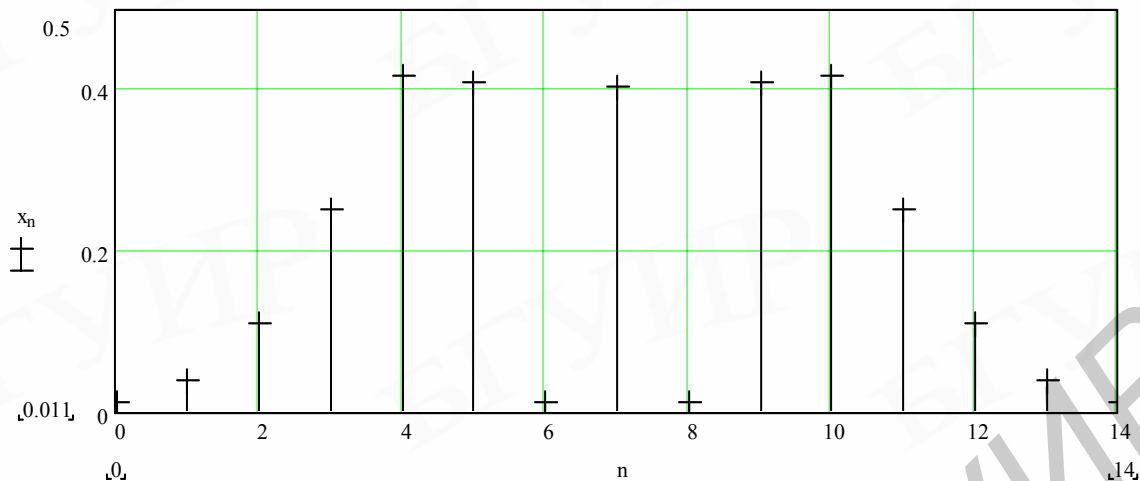


Рис. 5.8. Спектр амплитуд сигнала с угловой модуляцией гармоническим сигналом при отсутствии колебаний, соответствующих первой паре боковых составляющих при индексе модуляции $\beta=3,8$

Поэтому было отдано предпочтение частотной модуляции, которая используется в радиовещании повсеместно во всем мире.

5.4. Мощность сигнала с угловой модуляцией

Мощность сигнала с угловой модуляцией равна сумме мощностей отдельных частотных составляющих спектра сигнала

$$P_{УМ} = \frac{I_m^2}{2} R \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\beta).$$

Можно показать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n^2(\beta) = 1.$$

Тогда

$$P_{УМ} = \frac{I_m^2}{2} R,$$

т.е. равна мощности немодулированного колебания.

Мощность на несущей частоте можно сделать как угодно малой, например, выбрав $J_0(\beta) = 0$ при $\beta = 2,405, 5,52$ и т.д. В этом случае почти вся мощность сигнала переносится боковыми составляющими. Следовательно, эффективность передачи можно довести до сколь угодно близкой к 100 %. (При увеличении β растет число боковых составляющих и уменьшается $J_0(\beta)$, что и приводит к возрастанию эффективности передачи).

6. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ СООБЩЕНИЙ И СИГНАЛОВ

Операция замены непрерывного сигнала $s(t)$ последовательностью его значений (выборок) в соответствии с теоремой Котельникова называется дискретизацией.

6.1. Теорема Котельникова

Если функция $s(t)$ не содержит частот выше f_B , то она полностью определяется последовательностью своих значений в моменты, отстоящие друг от друга на $\Delta t = \pi / \omega_B = 1 / 2f_B$.

Дополним функцию $S(\omega)$ значениями, симметричными относительно нуля значениям на участке $0 \dots \omega_B$, и повторим ее с периодом $2 \omega_B$. Тогда функцию $S(\omega)$ можно будет представить рядом Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in \frac{\pi}{\omega_B} \omega}, \quad (6.1)$$

где

$$C_n = \frac{2}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in \frac{2\pi}{2\omega_B} \omega} d\omega = \frac{1}{\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in \frac{\pi}{\omega_B} \omega} d\omega. \quad (6.2)$$

С другой стороны,

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{-in \frac{\pi}{\omega_B} \omega} d\omega = s(-n \Delta t). \quad (6.3)$$

Отсюда получаем

$$C_n = \frac{2\pi}{\omega_B} s(-n \Delta t). \quad (6.4)$$

Таким образом, коэффициенты ряда Фурье функции $S(\omega)$ определяются через значения функции $s(t)$ в точках отсчета.

Запишем ряд Фурье, определяющий спектральную плотность $S(\omega)$, по коэффициентам C_n :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\omega_B} s(-n \Delta t) e^{in \frac{\pi}{\omega_B} \omega} = \frac{\pi}{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(-n \Delta t) e^{in \frac{\pi}{\omega_B} \omega} = \\ &= \frac{\pi}{\omega_B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n \Delta t) e^{-in \frac{\pi}{\omega_B} \omega}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Полученное выражение означает, что функция $s(t) = s(n \Delta t)$, которой соответствует спектральная плотность $S(\omega)$, однозначна и проходит через

заданные значения в точках отсчета $n\Delta t$, лежащих на расстоянии $\Delta t = 1/2f_B$ одна от другой.

Запишем выражение для функции $s(t)$, подставив в (6.3) значение $S(\omega)$:

$$s(t) = \int_{-\omega_B}^{\omega_B} S(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \frac{\pi}{\omega_B} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} s(n\Delta t) e^{-in\frac{\pi}{\omega_B}} \right) e^{i\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\omega_B} \int_{-\omega_B}^{\omega_B} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} s(n\Delta t) \right) e^{i\omega(t - n\frac{\pi}{\omega_B})} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - n\Delta t)}{\omega_B(t - n\Delta t)}. \quad (6.6)$$

Если функция $s(t)$ конечна в интервале T , а спектр ее ограничен полосой частот вплоть до ω_B , то число дискретных значений (отсчетов) функции $s(n\Delta t)$, которое необходимо для полного задания ее в интервале T , будет равно

$$n = T / \Delta t + 1 = 2f_B T + 1 \approx 2f_B T, \quad (6.7)$$

так как $T/\Delta t \gg 1$.

Выражение для $s(t)$ при этом принимает вид

$$s(t) = \sum_{n=-f_B T}^{n=f_B T} s(n\Delta t) \frac{\sin \omega_B(t - n\Delta t)}{\omega_B(t - n\Delta t)}. \quad (6.8)$$

Принципиальное отличие дискретизации с использованием ряда Котельникова заключается в том, что отсчеты мгновенных значений сигнала производятся непосредственно в процессе его поступления на вход преобразующего устройства, а для представления в виде ряда Фурье необходимо предварительно полностью зарегистрировать сигнал. Большим преимуществом ряда Котельникова является простота определения его коэффициентов. Полученные в процессе дискретизации мгновенные значения сигнала могут быть равны любой величине в диапазоне изменения сигнала $s(t)$ от S_{\min} до S_{\max} .

Пример 6.1. Найти минимальное число отсчетов, с помощью которых можно передать информацию, содержащуюся в прямоугольном видеоимпульсе длительностью $\tau = 1$ мкс.

Поскольку спектр видеоимпульса является бесконечно широким, то ограничимся его технической шириной, определяемой частотой, соответствующей первому нулю. Эта частота равна $f_B = 1/\tau$. Поэтому будем считать, что анализируемый видеоимпульс обладает финитным спектром с наивысшей частотой $f_B = 10^6$ Гц = 1 МГц. В соответствии с требованиями теоремы Котельникова расстояние между отсчетами нужно выбирать равным $1/2 f_B = 0,5$ мкс. Это значит, что достаточно трех выборок, чтобы передать информацию, содержащуюся в прямоугольном видеоимпульсе. Однако лучше выбрать пять отсчетов. При этом возрастет точность передачи передаваемой информации за счет ее количественного увеличения вследствие появления избыточности.

Пример 6.2. Изобразить спектральную диаграмму последовательности $n = 5$ отсчетов, соответствующих дискретизированному видеоимпульсу длительностью 1 с.

Прежде всего отметим, что в отличие от спектра исходного видеоимпульса, который считается финитным и ограниченным верхней частотой f_b , спектр последовательности отсчетов является бесконечным, содержит гармоники, кратные частоте $1/\Delta t$, и имеет период $n\Delta t$, а огибающая описывается функцией $\sin x/x$ (рис. 6.1). Этот спектр соответствует ситуации, когда отсчеты формируются с помощью δ -импульсов. Однако на практике моделью δ -импульса часто служит прямоугольный видеоимпульс достаточно малой длительности. Если допустить, что длительность отсчетного импульса составляет 0,04 длительности исходного импульса, т.е. 40 мс, то его огибающая будет накладываться на бесконечный периодический спектр, изображенный на рис.6.1. При этом частота, соответствующая первому нулю огибающей спектра импульса длительностью 40 мс, равна 25 Гц (рис. 6.2).

6.2. Скорость передачи информации по каналу связи и скорость модуляции

Если сигнал изменяется так, что равновероятно можно различать только 2 составляющие его информационного параметра, то в соответствии с оценкой Р.Хартли, любое изменение сигнала соответствует наименьшей единице информации – биту.

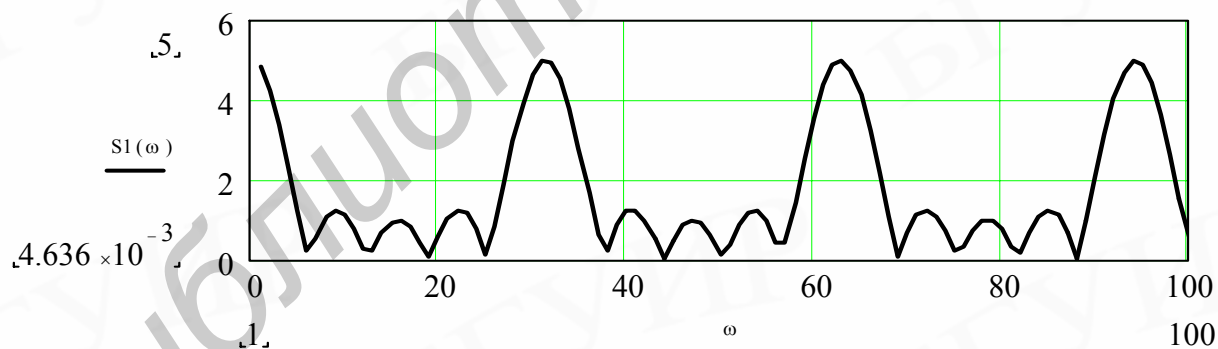


Рис. 6.1. Огибающая спектра дискретизированного сигнала, полученного из видеосигнала длительностью 1 мкс, с помощью пяти выборок, представляющих собой δ -импульсы

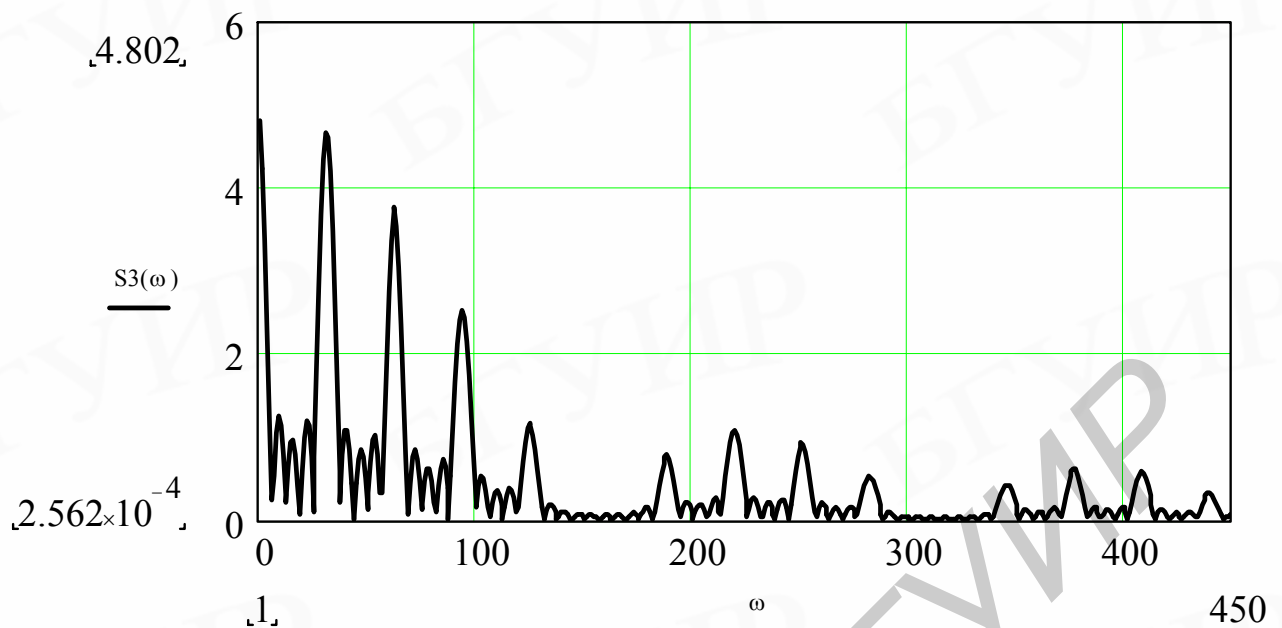


Рис. 6.2. Огибающая спектра дискретизированного сигнала, полученного из видеосигнала длительностью 1 с с помощью пяти выборок, представляющих собой импульсы длительностью 40 мс

Если же сигнал может иметь более двух различных изменений, то любое его изменение несет несколько битов информации.

Количество изменений информационного параметра сигнала в секунду измеряется в бодах (baud). Промежуток времени между соседними изменениями информационного параметра сигнала называется тактом работы передатчика или бодовым интервалом.

При использовании кодированных сигналов нужно различать скорость передачи информации, измеряемой количеством битов, передаваемых по каналу связи в одну секунду, и скорость модуляции, представляющей собой скорость генерации сигнальных посылок и измеряемой в бод/с.

Связь между скоростью модуляции D и скоростью передачи битов по каналу связи $R=1/t_b$, где t_b – длительность передачи одного бита, характеризуется соотношением: $D=R/b$, где b – число битов в посылке.

Если сигнал имеет более 2 различных состояний, то скорость передачи в бит/с будет выше, чем число бод. Например, если информационными параметрами являются фаза и амплитуда синусоиды, причем различаются 4 состояния фазы в $0, 90, 180, 270^\circ$ и два значения амплитуды сигнала, то информационный сигнал в этом случае может иметь 8 различных состояний. В этом случае модем, работающий со скоростью модуляции, равной 2400 бод/с (с тактовой частотой 2400 Гц), передает информацию со скоростью 7200 бит/с, так как при одном изменении сигнала передается 3 бита информации.

При использовании сигнала с 2 различными состояниями может наблюдаться обратная картина. Это часто происходит потому, что для надежного распознавания приемником передаваемой информации каждый бит в последовательности кодируется с помощью нескольких изменений

информационного параметра несущего колебания. Например, при кодировании единичного значения бита импульсом положительной полярности, а нулевого значения – импульсом отрицательной полярности, физически сигнал дважды изменяет свое состояние при передаче каждого бита. При таком кодировании скорость передачи в 2 раза ниже, чем число бод, передаваемых по линии.

В 1924 г. Г. Найквист (Harold Nyquist) открыл функциональную зависимость между полосой пропускания $f_{\text{гр}}$ канала связи и максимальной скоростью модуляции, измеряемой в бод/с, при передаче информации по этому каналу связи. Найквист установил, что скорость модуляции в бод/с не может превышать более чем в два раза полосу пропускания канала.

Без учета шума в канале связи зависимость скорости передачи информации, измеряемой в бит/с, определяется выражением

$$C=2f_{\text{гр}} \log_2 m, \quad (6.9)$$

где m – число различных состояний информативного параметра сигнала.

Таким образом, для телефонной линии с полосой пропускания 3000 Гц скорость модуляции не может быть выше, чем 6000 бод/с.

В схеме «1 бит за 1 бод» скорость передачи информации в бит/с равна скорости модуляции в бод/с. Многие схемы кодирования сигналов способны передавать более одного бита в течение одного сигнализирующего события. Поэтому в таких системах «несколько бит за 1 бод» скорость передачи информации превышает скорость модуляции в бод/с.

Хотя формула Найквиста явно не учитывает наличие шума, косвенно его влияние отражается в выборе числа состояний информационного параметра сигнала. Для повышения пропускной способности канала хотелось бы увеличивать это число до значительных величин, но на практике этого делать нельзя из-за шума на линии. Поэтому число возможных состояний сигнала фактически ограничивается соотношением мощности сигнала к мощности шума, а формула Найквиста определяет предельную скорость передачи данных в том случае, когда количество состояний уже выбрано с учетом возможностей устойчивого распознавания приемником.

В 1948 г. К.Шеннон (Claude Shannon) указал, что теорема Найквиста применима только к каналам связи с отсутствием шума. В реальном мире таких каналов нет. Шум устанавливает ограничения, но не на скорость модуляции в бод/с, а на количество битов, которые могут быть закодированы одним сигнализирующим событием. Из теоремы Шеннона следует, что для обычной телефонной линии (с отношением сигнал/шум, равным приблизительно 30 дБ) максимальное количество битов, которое может быть закодировано одним сигнализирующим событием, равно 5. Следовательно, максимальная скорость передачи информации, достигаемая при таком ограничении, приблизительно составляет 30 Кбит/с (передается 6000 бод по 5 битов, передаваемых за 1 бод).

Выбор способа представления дискретной информации в виде сигналов, подаваемых на вход линии связи, называется линейным или физическим кодированием. Логическое кодирование выполняется до физического и подразумевает замену битов исходной информации новой

последовательностью битов, несущей ту же информацию, но обладающей дополнительными свойствами, например, возможностью для приемной стороны обнаруживать ошибки в принятых данных. Другой пример логического кодирования – шифрование данных. Логическое кодирование уменьшает скорость передачи информации по линии связи.

6.3. Объем сигнала и пропускная способность канала связи

Объем (емкость) сигнала V_c – это произведение трех его физических характеристик: длительности T_c , ширины спектра F_c и динамического диапазона уровней сигнала D_c : $V_c = F_c T_c D_c$. При этом $D_c = 10 \lg(P_{\max}/P_{\min})$, где P_{\max} и P_{\min} – максимальное (пиковое) и минимальное значения мощности сигнала.

Объем (емкость) канала определяется аналогичными величинами:
 $V_k = F_k T_k D_k$.

Для передачи информации по каналу необходимо выполнение условия $V_c \leq V_k$.

Увеличение числа уровней сигнала приводит к увеличению скорости передачи. Однако большое число уровней сигнала и, следовательно, малый интервал между соседними градациями при сравнительно слабом шуме в приемнике не позволяет различать соседние градации и приводит к большой вероятности ошибок. К.Шеннон показал, что существует предельная скорость передачи, называемая *пропускной способностью канала*, при которой возможна передача с произвольной малой вероятностью ошибки.

Шеннон вывел формулу для пропускной способности канала:

$$C = f_{\text{гр}} \log_2(P_c/P_{\text{ш}} + 1), \quad (6.10)$$

которая, характеризуя предельные возможности гауссовского канала, кардинальным образом расширяет представления о возможности передачи информации по каналам радиосвязи с ограниченным по полосе аддитивным белым шумом. Из (6.10) следует, что пропускная способность канала связи C , измеряемая в *бит/с*, после того, как она задана, в условиях действия аддитивной гауссовской помехи (шума) с ограниченной средней мощностью $P_{\text{ш}}$ (*Вт*), может быть обеспечена либо использованием широкой полосы частот $f_{\text{гр}}$ (*Гц*) с малым отношением сигнал/помеха $P_c/P_{\text{ш}}$, либо узкой полосой частот $f_{\text{гр}}$ (*Гц*) с более высоким отношением $P_c/P_{\text{ш}}$, где P_c – средняя мощность сигнала. Следовательно, между полосой пропускания канала $f_{\text{гр}}$ и отношением сигнал/помеха $P_c/P_{\text{ш}}$ в этом канале возможен взаимобмен.

При этом наиболее целесообразным является обмен мощности сигнала на полосу пропускания канала. Например, требуется обеспечить пропускную способность $C = 16 \text{ Кбит/с}$ при отношении сигнал/помеха $P_c/P_{\text{ш}} = 10^{-2}$. Как следует из только что полученной формулы (6.10), канал радиосвязи должен

иметь полосу 1,115 МГц ($f_{гр} = C / \log_2 1,01 = 1,115 \cdot 10^6$ Гц). При большем отношении сигнал/помеха $P_c/P_{ш}=10$ пропускная способность $C=16$ Кбит/с может быть реализована достаточно узкой полосой частот $f_{гр}=4,625$ кГц. Формула (6.10) показывает, что при заданном отношении сигнал/помеха в канале с аддитивным белым гауссовым шумом пропускная способность может быть увеличена путем соответствующего расширения ширины спектра сигнала $f_{гр}$.

При малых отношениях $P_c/P_{ш}$ формула (6.10) принимает вид

$$C \approx 1,44 f_{гр} \ln(P_c/P_{ш}),$$

при больших отношениях $P_c/P_{ш}$ выражение (6.10) принимает вид

$$C \approx f_{гр} \log_2(P_c/P_{ш}).$$

Предельное значение пропускной способности C для гауссовского канала радиосвязи имеет место при $f_{гр} \rightarrow \infty$:

$$\lim_{f_{гр} \rightarrow \infty} C \approx \frac{P_c}{G_0} \log_2 e. \quad (6.11)$$

Здесь G_0 – односторонняя спектральная плотность мощности белого шума. Выражение (1.6) указывает, что в канале с шумом даже в предельном случае при $f_{гр} \rightarrow \infty$ отношение сигнал/помеха должно превышать определенное пороговое значение.

Так, для передачи бита информации требуется энергия сигнала $P_c T > G_0 / \log_2 e = G_0 \ln 2 = 0,69 G_0$.

Если пропускная способность C равна требуемой скорости передачи информации R_b , то из формул (6.10) и (6.11) видно, что при $f_{гр} > R_b$ канал радиосвязи может работать при значительном превышении мощности помехи $P_{ш}$ над мощностью сигнала P_c .

Тепловой шум равномерно распределен по спектру частот и поэтому называется белым. Он задает верхнюю границу производительности системы связи. Уровень шума для ширины полосы 1 Гц любого устройства определяется выражением

$$N_0 = kT,$$

где N_0 – плотность мощности шума в Вт/Гц частотной полосы, k – постоянная Больцмана, равная $1,3803 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, T – температура в градусах по шкале Кельвина.

Пример 6.3. Рассчитать плотность мощности белого шума при комнатной температуре.

При комнатной температуре $T = 17^{\circ}\text{C} = 290^{\circ}\text{K}$ плотность мощности белого шума равна $N_0 = 1,3803 \cdot 10^{-23} \cdot 290 = 4 \cdot 10^{-21}$ Вт/Гц = -204 дБВт/Гц. Здесь мы учли, что уровню 1 Вт соответствует уровень мощности 0 дБВт. Тогда абсолютный уровень мощности, измеряемый в дБВт, определится по формуле

$$P, \text{ дБВт} = 10 \lg(P, \text{ Вт} / 1 \text{ мВт}).$$

Например, мощности 1000 Вт соответствует 30 дБВт, а мощности 1 мВт соответствует – 30 дБВт.

Пример 6.4. Считая, что шум приемника с эффективной температурой 100^0К не зависит от частоты в полосе шириной 100 МГц, оценить уровень создаваемого им шума.

Шум, измеряемый в ваттах, в полосе частот шириной $\Delta f=100$ МГц определится, как $N = kT\Delta f$, или в децибел-ваттах $N = 10\lg k + 10\lg T + 10\lg \Delta f = (-228,6 + 20 + 70)$, дБВт = –138,6 дБВт.

6.4. Безошибочная пропускная способность канала связи

Максимально возможная при данных условиях скорость передачи данных, при которой информация может передаваться по данному тракту связи, называется пропускной способностью канала связи. Пропускная способность характеризуется:

- скоростью передачи данных, измеряемой в бит/с, показывающей с какой скоростью могут передаваться данные;
- шириной полосы рабочих частот, измеряемой в герцах;
- средним уровнем шума в канале связи;
- уровнем ошибок или скоростью появления ошибок.

При этом ширина полосы, определяемая по Найквисту, определяется, как половина скорости передачи информации по каналу. Например, при скорости передачи информации по каналу связи 6200 бит/с ширина полосы канала равна 3100 Гц. При m -уровневой передаче данных формулировка Найквиста становится следующей: $C = 2\Delta f \log_2 m$, где m – число уровней передаваемого по каналу связи сигнала. Следовательно, при $m = 8$ пропускная способность для этого сигнала равна 18600 бит/с – величине, используемой некоторыми модемами.

Ключевым параметром системы связи является отношение сигнал/шум, представляющее собой отношение мощности сигнала к мощности шума, существующие в определенный момент в канале связи. Поскольку в формуле Шеннона учитывается только белый шум, то в этом случае пропускная способность канала связи называется *безошибочной*. Шенноном доказано, что если действительная скорость передачи данных по каналу связи меньше безошибочной пропускной скорости, то при использовании соответствующих сигнальных кодов, теоретически возможно добиться безошибочной передачи данных по каналу. Если же действительная скорость передачи информации больше пропускной способности канала ($R > C$), то кода, на основе которого можно добиться сколь угодно малой вероятности возникновения ошибки, не существует. Шеннон показал, что величины Δf , P_c , $P_{ш}$ устанавливают пределы скорости передачи, а не вероятности появления ошибки. К сожалению, теорема Шеннона не дает способа нахождения таких кодов, но она дает критерий измерения производительности практических схем связи.

Пример 6.5. Найти число уровней передаваемого сигнала с шириной полосы 1 МГц по каналу связи с отношением сигнал/шум, равным 24 дБ.

Рассчитаем сначала пропускную способность канала связи:

$$C = 10^6 \cdot \log_2(251+1) \approx 8 \cdot 10^6 = 8 \text{ Мбит/с.}$$

Это теоретический предел. Количество уровней сигнала определим по формуле Найквиста $C = 2\Delta f \log_2 m$. Имеем $8 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^6 \cdot \log_2 m$, откуда $m=16$.

Важным параметром, связанным с отношением сигнал/шум, является отношение E_b/N_0 энергии одного бита информации к плотности мощности шума, приходящейся на 1Гц. При передаче аналогового или цифрового сигнала, содержащего двоичную информацию, которая передается со скоростью R энергия, приходящаяся на 1 бит информации равна $E_b = P_c T_b$, где P_c – мощность сигнала, а T_b – время, затрачиваемое на передачу одного бита информации. Скорость передачи данных $R=1/T_b$. Следовательно, $E_b/N_0 = (P_c/R)/N_0$

Если предположить, что мощности P_c и $P_{ш}$ выделяются на сопротивлении 1 Ом, то изменения входного сигнала, меньшие, чем $\sqrt{P_c}$, приемник различить не может. Следовательно, число уровней, которое может различаться без ошибок, определяется выражением $n = \sqrt{1 + P_c/P_{ш}}$. Итак, наибольшее количество информации, переносимое каждым импульсом, имеющим $\sqrt{1 + P_c/P_{ш}}$ уровней,

$$I = \log_2 \sqrt{1 + P_c/P_{ш}} = 0,5 \log_2(1 + P_c/P_{ш}) \text{ бит.}$$

Теперь можно определить емкость канала как максимальное количество информации, которое может быть передано по каналу в секунду.

Если канал способен передать максимум K импульсов в 1 с, очевидно, его емкость

$$C = (K/2) \log_2(1 + P_c/P_{ш}) \text{ бит.}$$

Если спектр каждого сообщения ограничен частотой $f_{гр}$ Гц, то надо передавать $2f_{гр}$ отсчетов в секунду.

Скорость передачи можно увеличить за счет увеличения как полосы пропускания, так и отношения сигнал/шум. Например, при сжатии сигнала во времени (для передачи большего числа сообщений за данный промежуток времени) возрастает скорость передачи сообщений, что объясняется тем, что при уменьшении длительности сигнала их мгновенные значения меняются быстрее, т.е. увеличивается их частота изменения. Следовательно, при сжатии сигнала возникает проблема передачи его с более высокими частотами, что требует расширения полосы пропускания канала связи. Таким образом, *скорость передачи* можно увеличить за счет *расширения полосы пропускания* канала связи.

Итак, емкость канала – это максимальное количество информации, которое можно передать в одну секунду. Чтобы достичь такой скорости

информация должна быть соответствующим образом обработана или закодирована наиболее эффективно.

Утверждение, что такое кодирование возможно, представляет важнейший результат теории информации. К настоящему времени используемые системы связи без кодирования не достигают этой максимальной скорости.

Пример 6.6. Рассчитать полосу частот видеосигнала черно-белого телевизионного изображения.

Телевизионное черно-белое изображение можно считать состоящим из $625 \cdot 625 \cdot 3/4 = 291618 \approx 300000$ мелких элементов изображения. Каждый из этих элементов может принимать 10 различных градаций яркости. Допустим, что все градации яркости равновероятны и за одну секунду передается 25 кадров изображения. Кроме того, пусть для удовлетворительного воспроизведения изображения необходимое отношение сигнал/помеха составляет 1000, т.е. 30 дБ.

Тогда один элемент изображения содержит $\log_2 10 = 3,32$ бита, один кадр $3,32 \cdot 300000 = 996000$ битов. Так как в 1 с передается 25 кадров, то количество информации в 1 с равно $996000 \cdot 25 = 24,9 \cdot 10^6$ битов. По формуле (1.5) при $P_c/P_{ш} = 1000$ находим $C = 24,9 \cdot 10^6 \approx f_{гр} \log_2 1000 \approx f_{гр} \cdot 9,966$. Поэтому $f_{гр} = 24,9 \cdot 10^6 / 9,966 \approx 2,5$ МГц.

7. СЛУЧАЙНЫЕ СИГНАЛЫ

До сих пор рассматривались модулирующие электрические и радиосигналы на основе детерминированных математических моделей. Такой подход позволил получить четкое представление о многих важных характеристиках и свойствах сигналов. Однако многие важные задачи радиоэлектроники детерминированные модели не позволяют решать. Основная трудность здесь в том, что практически все реальные модулирующие сигналы и принимаемые радиосигналы *недетерминированные*.

7.1. Основные понятия теории случайных сигналов

Сущность перехода к новым методам математического описания сигналов и новым методам решения задач при недетерминированных сигналах состоит в том, что в его основу положен статистический подход ко всем рассматриваемым проблемам. Согласно этому подходу в качестве модели недетерминированного сигнала предлагается использовать случайный процесс с подходящими вероятностными характеристиками.

Под случайным процессом мы будем понимать упорядоченные семейства случайных величин, поставленные в соответствие значениям некоторого неслучайного параметра, например, времени t , так, что для каждого значения t последнего мы имеем вполне определенную случайную величину $X(t)$ с определенным законом распределения и, следовательно, с определенными характеристиками этого закона, такими, например, как *моментные функции*.

Введем обозначение $X(t)$ для случайного процесса, который будем использовать в качестве математической модели некоторого недетерминированного сигнала. Если этот сигнал должен рассматриваться на интервале времени от 0 до T_k , то и процесс $X(t)$ будем описывать на таком же интервале. Этот интервал обычно называют интервалом наблюдения длительности T_k . В частном случае T_k может быть неограниченно большим.

Определим те вероятностные характеристики процесса, которые оказываются наиболее существенными при решении основной задачи радиотехники – передачи информации с помощью электромагнитных волн.

Считается, что проводится одно испытание, если наблюдается процесс $X(t)$ на интервале времени от $t = 0$ до $t = T_k$ с регистрацией появляющихся мгновенных значений этого процесса. В результате можно получить график функции времени, который называется *реализацией* $x^{(1)}(t)$ случайного процесса $X(t)$. Для каждого момента времени t из интервала наблюдения эта реализация имеет вполне определенное значение, т.е. является детерминированной функцией времени. Совокупность всех разных реализаций, которые могут появиться при проведении испытаний, называется *ансамблем реализаций случайного процесса*. Подчеркнем, что каждая реализация случайного процесса является детерминированной функцией времени. Случайность любого процесса $X(t)$ проявляется в том, что до проведения испытания нельзя предсказать, какая именно реализация из ансамбля появится в данном испытании.

Моментные функции представляют собой временные зависимости числовых характеристик одномерных распределений случайных процессов, поскольку сами функции распределения случайных процессов в отличие от функций распределения случайных величин в общем случае изменяют свою форму во времени.

На рис.7.1 изображена реализация случайного процесса, первая моментная функция которого (среднее значение) неизменна во времени и равна нулю, а вторая центральная моментная функция (дисперсия) вполне определенным образом зависит от времени.

На рис.7.2 показана реализация процесса с неизменной дисперсией и переменным во времени средним значением. На рис.7.3 показаны реализации процессов, имеющих одинаковые первые и вторые моментные функции, но отличающиеся скоростью протекания процесса, т.е. смешанной моментной функцией второго порядка. При этом начальный смешанный момент второго порядка называется *ковариационной функцией*, а центральный смешанный момент второго порядка – *корреляционной функцией*.

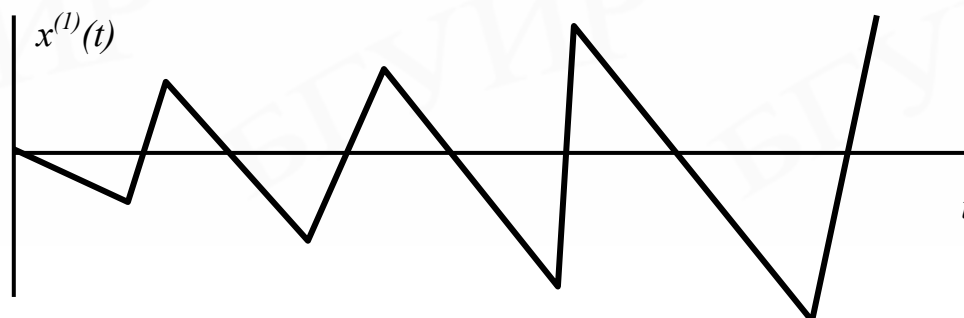


Рис. 7.1. Реализация случайного процесса с постоянным математическим ожиданием и переменной дисперсией



Рис. 7.2. Реализация случайного процесса с переменным математическим ожиданием и постоянной дисперсией

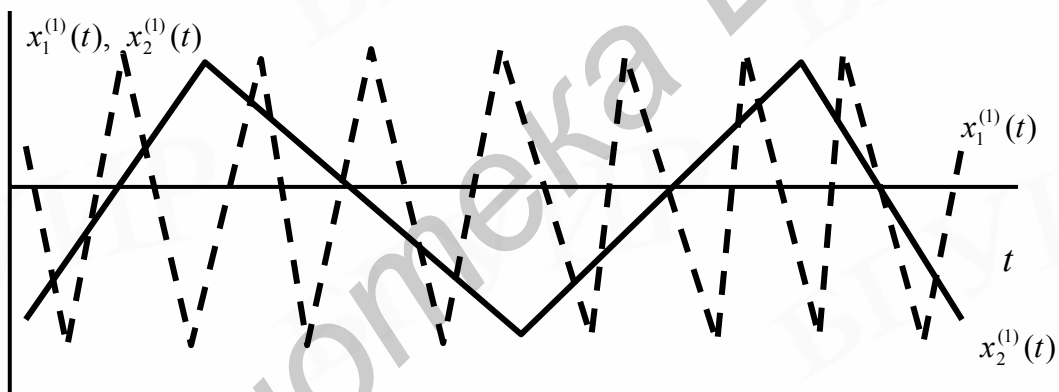


Рис. 7.3. Реализации случайного процесса с постоянными математическими ожиданиями и дисперсиями, но разными корреляционными функциями

Стационарный случайный процесс – это такой процесс, для которого моментные функции не меняются при любом сдвиге всей группы наблюдаемых значений процесса вдоль оси времени. Стационарные процессы имеют место в установившихся режимах работы устройств при неизменных внешних условиях и постоянстве параметров цепей, пропускающих эти сигналы.

Признаком *нестационарности* случайного процесса служит невыполнение условий неизменности его моментных функций.

Опыт показывает, что в реальных условиях отдельно взятая реализация случайного процесса может служить представителем ансамбля. Процессы подобного рода называются *эргодическими*. Эргодический случайный процесс обязательно является и стационарным, но не наоборот.

Вероятностные характеристики, полученные в результате усреднения по ансамблю реализаций, совпадают с таковыми, полученными в результате

усреднения по времени одной реализации. Иными словами, моментные функции, определяемые усреднением по времени, идентичны моментным функциям, полученным из ансамбля реализаций. Однако физическое содержание моментов эргодических случайных процессов более очевидно.

Стационарные случайные процессы могут и не обладать свойством эргодичности. Физической моделью неэргодического ансамбля может служить набор шумящих радиоприемников при произвольном положении регуляторов громкости в каждом из них. Характеристики, получаемые усреднением по отдельной реализации, в этом случае необязательно совпадают с аналогичными характеристиками ансамбля.

В теории случайных процессов различают понятия *стационарности в узком и широком смыслах*. Случайный процесс стационарен в узком (строгом) смысле, если выполняются условия стационарности распределения W_n , каким бы то ни было число n . Если же это условие гарантируется лишь для $n = 2$ (т.е. для функций распределения не выше второго порядка), то такой процесс называют стационарным в широком смысле. Изучение процессов последнего типа базируется на анализе одномерных моментов и корреляционных функций, а посвященный ему раздел теории назван корреляционной теорией случайных процессов.

7.2. Стационарные и нестационарные процессы

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в узком (строгом) смысле, если все функции распределения вероятностей любого порядка инвариантны относительно сдвига по времени.

Стационарный в узком смысле случайный процесс протекает однообразно во времени. Такие процессы имеют место в установившемся режиме, например, автогенератора при неизменных внешних условиях.

Очевидно, что стационарный случайный процесс представляет собой частный случай процессов более широкого класса, который составляют нестационарные процессы. Примером нестационарного случайного процесса может служить возбуждение автогенератора при подаче на него питания. Нестационарный случайный процесс продолжается до тех пор, пока в генераторе не установится режим стационарной амплитуды колебаний.

При решении ряда статистических задач используют только математические ожидания, дисперсию и ковариационные или корреляционные функции. В связи с этим вводится понятие стационарности в широком смысле.

Случайный процесс $\xi(t)$ называется стационарным в широком (нестрогом) смысле, если его математическое ожидание, дисперсия и ковариационная функция инвариантны относительно сдвига по времени. Иначе говоря, математическое ожидание и дисперсия случайного процесса постоянны, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$. Очевидно, что стационарный в узком смысле случайный процесс стационарен и в широком смысле. Однако обратное утверждение в общем случае неверно.

Пример 7.1. Дано колебание $\xi(t) = x(t) \cdot \psi(t)$, где $x(t)$ – случайный стационарный процесс, $\psi(t)$ – неслучайная функция времени. Определить, является ли это колебание стационарным процессом.

Для определения стационарности колебания $\xi(t)$ определим его математическое ожидание и дисперсию:

$$M[\xi(t)] = M[x(t) \psi(t)] = \psi(t) M[x(t)],$$

$$D[\xi(t)] = D[x(t) \psi(t)] = \psi(t)^2 D[x(t)].$$

Поскольку статистические характеристики $\xi(t)$ зависят от времени, процесс $\xi(t)$ является нестационарным.

Пример 7.2. Случайный процесс представлен в виде $\xi(t) = \psi(t) + Y$, где $\psi(t)$ – стационарный эргодический процесс, а Y – случайная величина. Определить, является ли процесс $\xi(t)$ эргодическим.

Поскольку математическое ожидание случайной величины Y не зависит от времени, а $\psi(t)$ – стационарный случайный процесс, то $\xi(t)$ представляет собой также стационарный процесс. Для эргодичности процесса $\xi(t)$ требуется, чтобы и случайный процесс $y(t)$, в сечении которого в момент времени $t = t_0$ получена случайная величина Y , был эргодическим.

Пример 7.3. Задан сигнал в виде постоянного напряжения случайного уровня $\xi(t) = U$. Можно ли процесс $\xi(t)$ назвать стационарным и эргодическим?

Случайный процесс $\xi(t)$ стационарен, так как при усреднении по множеству все статистические характеристики не зависят от времени. Процесс $\xi(t)$ не является эргодическим, так как при усреднении по времени результат будет зависеть от выбранной реализации.

7.3. Ковариационная и корреляционная функции

Важную роль в теории случайных процессов играет начальный момент

$$m_{11}(t_1, t_2) = K_{\xi}(t_1, t_2) = M[\xi(t_1)\xi(t_2)], \quad (7.1)$$

называемый *ковариационной функцией* случайного процесса, и центральный момент

$$\mu_{11}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) = M[(\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1))(\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2))], \quad (7.2)$$

называемый *корреляционной функцией* случайного процесса.

Из (7.1) и (7.2) можно установить связь между ковариационной и корреляционной функциями случайного процесса, а именно:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2). \quad (7.3)$$

Отсюда видно, что ковариационная функция отличается от корреляционной детерминированным слагаемым, представляющим собою произведение математических ожиданий $m_{\xi}(t_1)$ и $m_{\xi}(t_2)$. Очевидно, что если математическое ожидание случайного процесса $m_{\xi}(t) \equiv 0$, то ковариационная и корреляционная функции совпадают. Если для случайного процесса $R_{\xi}(t_1, t_2) \equiv 0$, то

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2) \quad (7.4)$$

и случайный процесс в этом случае называется *некоррелированным* случайным процессом (его функция корреляции равна нулю).

Если же $K_{\xi}(t_1, t_2) \equiv 0$, то рассматриваемые значения случайного процесса в момент времени t_1 и t_2 называются ортогональными.

В ряде случаев рассматривают нормированную корреляционную и взаимную корреляционную функции соответственно:

$$r_{\xi}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\xi}(t_2)}}, \quad (7.5)$$

$$r_{\xi\eta}(t_1, t_2) = \frac{R_{\xi\eta}(t_1, t_2)}{\sqrt{D_{\xi}(t_1)D_{\eta}(t_2)}}. \quad (7.6)$$

Эти функции количественно характеризуют степень линейной зависимости между соответствующими величинами одного или двух случайных процессов.

7.4. Математическое ожидание, ковариационная и корреляционная функции стационарного в узком смысле случайного процесса

Из определения стационарности следует, что

$$p(x; t_1) = p(x; t_1 - t_1) = p_1(x), \quad (7.7)$$

т.е. одномерная функция плотности вероятности стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени. Это значит, что процесс, протекающий быстро или медленно, имеет одну и ту же одномерную плотность вероятности.

Математическое ожидание стационарного в узком смысле случайного процесса не зависит от времени:

$$m_{\xi} = M[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_1(x) dx. \quad (7.8)$$

Ковариационная $K_{\xi}(t_1, t_2)$ и корреляционная $R_{\xi}(t_1, t_2)$ функции зависят только от разности аргументов $t_2 - t_1 = \tau$. Действительно,

$$\begin{aligned} R_{\xi}(\tau) &= M[(\xi(t) - m_{\xi})(\xi(t + \tau) - m_{\xi})] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m_{\xi})(x_2 - m_{\xi}) p_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = \\ &= M[\xi(t)\xi(t + \tau) - m_{\xi}^2] = K_{\xi}(\tau) - m_{\xi}^2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Дисперсия стационарного в узком смысле случайного процесса

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= \sigma_{\xi}^2 = M[(\xi(t) - m_{\xi})^2] = R_{\xi}(\tau)|_{\tau=0} = R_{\xi}(0) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_{\xi})^2 p_1(x) dx = M[\xi^2(t)] - m_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (7.10)$$

постоянна и равна значению корреляционной функции при $\tau = 0$.

7.5. Спектральный анализ случайных процессов

7.5.1. Случайный спектр

Для конкретной реализации процесса $\xi(t)$ вводят спектральную функцию

$$F(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (7.11)$$

Для разных реализаций одного и того же процесса $\xi(t)$ конечной мощности спектральная функция $F(f)$ будет изменяться случайным образом и потому называется *случайным спектром*.

Случайный спектр содержит всю информацию о конкретной реализации $\xi(t)$, для которой он записан, так как анализируемая реализация может быть восстановлена по $F(f)$ путем обратного преобразования Фурье. Поэтому для указанных процессов задачи анализа и синтеза можно перевести из временной области в частотную и в ней выполнять их решение. Случайный спектр – это случайный процесс. Применительно к стационарному в широком смысле случайному процессу $\xi(t)$ математическое ожидание и ковариационная функция $F(f)$ определяются выражениями

$$m_F = M[F(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} m_{\xi} e^{-i2\pi ft} dt = m_{\xi} \delta(f), \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} K_F(f_1, f_2) &= M[F(f_1, f_2) F^*(f_1, f_2)] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M[\xi(t_1) \xi(t_2)] e^{-i2\pi f_1 t_1 + i2\pi f_2 t_2} dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(t_1 - t_2) e^{-i2\pi f_1 (t_1 - t_2) + i2\pi (f_2 - f_1) t_2} dt_1 dt_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi (f_2 - f_1) t} dt \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-2\pi f_1 \tau} d\tau = S(f_1) \delta(f_2 - f_1), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-2\pi f \tau} d\tau. \quad (7.14)$$

Функция $S(f)$ – преобразование Фурье ковариационной функции $K(\tau)$ – называется спектральной плотностью стационарного процесса $\xi(t)$. Из (7.11) следует, что случайный спектр $F(f)$ – нестационарный случайный процесс даже для стационарного случайного процесса $\xi(t)$, причем значения $F(f)$ для разных частот некоррелированы.

Полагая в (7.12) $m_F(f) = 0$, убеждаемся, что $D_F(f) = K_F(f, f) = R_F(f, f)$ бесконечна. Процессы с корреляционной функцией вида (7.13) называются *белым шумом*. Следовательно, случайный спектр $F(f)$ для стационарного случайного процесса $\xi(t)$ является процессом типа белого шума.

7.5.2. Спектральная плотность

Мы определили спектральную плотность $S(f)$ стационарного в широком смысле случайного процесса $\xi(t)$ как преобразование Фурье от ковариационной функции. На основании обратного преобразования Фурье имеем

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df. \quad (7.15)$$

Таким образом, спектральная плотность и ковариационная функция – это пара взаимных преобразований Фурье.

Аналогичным образом связаны между собой спектральная плотность $S_0(f)$ и корреляционная функция $R(\tau)$ стационарного в широком смысле случайного центрированного процесса $\xi_0(t) = \xi(t) - m_\xi$:

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau, \quad (7.16)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) e^{i2\pi f\tau} df. \quad (7.17)$$

Подставив в (7.14) выражение ковариационной функции (7.3) через корреляционную и воспользовавшись определением дельта-функции, получим

$$S(f) = S_0(f) + m_\xi^2 \delta(f). \quad (7.18)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность стационарного процесса с не равным нулю математическим ожиданием отличается от спектральной плотности соответствующего центрированного процесса лишь наличием дискретной линии на нулевой частоте.

Формулы (7.14) – (7.17) – это формулы Винера – Хинчина.

Рассмотрим физический смысл спектральной плотности. Если понимать под $\xi(t)$ случайный ток или напряжение, то величины $S(f)$ и $S_0(f)$ в (7.14) и (7.16) будут иметь размерность энергии. Полагая в (7.17) $\tau = 0$, имеем

$$D_\xi = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) df. \quad (7.19)$$

Эта формула показывает, что дисперсия («полная энергия») стационарного случайного процесса равна площади под кривой спектральной плотности. Величину $S_0(f)df$ можно трактовать как долю «энергии», сосредоточенную в малом интервале частот от $f - df/2$ до $f + df/2$.

7.6. Свойства спектральной плотности

1. Спектральная плотность стационарного вещественного или комплексного случайного процесса – неотрицательная величина, что является определяющим свойством процесса.

2. Спектральная плотность стационарного в широком смысле случайного процесса – всегда вещественная функция, так как $K(-\tau) = K(\tau)$, причем для вещественного процесса она – четная функция частоты. Так как корреляционная функция $R(\tau)$ вещественного процесса – четная функция аргумента, то

$$S_0(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{i2\pi f\tau} d\tau = S_0(f). \quad (7.20)$$

Учитывая четность спектральной плотности, формулы (7.17) и (7.18) можно переписать

$$S_0(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad (7.21)$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f) \cos 2\pi f\tau df = 2 \int_0^{\infty} S_0(f) \cos 2\pi f\tau df. \quad (7.22)$$

Следовательно, спектральная плотность и корреляционная функция вещественного стационарного в широком смысле случайного процесса связаны друг с другом взаимными косинус-преобразованиями Фурье. Так как корреляционная функция вещественного процесса – вещественная функция аргумента, то из (7.21) видно, что спектральная плотность является также вещественной функцией частоты.

3. Чем шире спектр $S_0(f)$, тем уже корреляционная функция $R(\tau)$, и наоборот.

4. Спектральная плотность определена для положительных и отрицательных значений частоты, причем согласно (7.21) для вещественных случайных процессов $S_0(f) = S_0(-f)$. В отличие от такого двустороннего «математического» спектра вводится односторонний «физический» спектр $S_0^+(f)$, отличный от нуля лишь при положительных частотах $f \geq 0$,

$$S_0^+(f) = S_0(f) + S_0(-f) = 2S_0(f). \quad (7.23)$$

Тогда из (7.21) и (7.22) получим следующие окончательные формулы Винера – Хинчина:

$$S^+(f) = 4 \int_0^{\infty} K(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau, \quad f \geq 0, \quad (7.24)$$

$$K(\tau) = \int_0^{\infty} S^+(f) \cos 2\pi f\tau df, \quad f \geq 0. \quad (7.25)$$

6. Эффективной шириной спектра называется «протяженность» спектральной плотности по оси частот. Ее определяют по-разному. Иногда указывают ширину $\Delta f_{0,5}$ спектральной плотности на уровне $0,5 S_0^+(f)$.

7. Стационарный случайный процесс, спектральная плотность которого сконцентрирована в узкой полосе частот Δf около частоты $f_0 \gg \Delta f$, называется

узкополосным случайным процессом. Если это неравенство не выполняется, то процесс не является узкополосным.

8. Формулам Винера –Хинчина можно придать другой вид, а именно:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (7.26)$$

$$S_0(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (7.27)$$

Нулевой индекс часто опускают, помня, однако, что

$$S(\omega) = S_0(\omega) + 2\pi m^2 \delta(\omega). \quad (7.28)$$

9. В отличие от спектральной плотности детерминированного сигнала спектральная плотность случайного процесса не дает возможности восстановить какую-либо реализацию процесса, так как она не содержит сведений о фазах отдельных спектральных составляющих. Поэтому можно указать несколько различных по характеру случайных процессов, имеющих одинаковую спектральную плотность и корреляционную функцию. Отсюда следует, что эти две характеристики описывают случайный процесс явно неполно.

Пример 7.4. Корреляционная функция гауссовского процесса имеет вид

$$R(\tau) = R(0) e^{-\tau^2 / 2\beta^2}, \quad \beta = const.$$

Найти спектральную плотность мощности процесса.

В соответствии с (7.21) имеем

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega\tau d\tau = \beta \sqrt{2\pi} R(0) e^{-\beta^2 \omega^2 / 2} = N(0) e^{-\beta^2 \omega^2}.$$

Пример 7.5. Найти корреляционную функцию процесса с равномерным энергетическим спектром в полосе частот от $-f$ до $+f = 10$ МГц и средним квадратическим напряжением $U_{с.кв} = 2$ В.

Спектральная функция процесса $S_0(\omega) = U_{с.кв}^2 / 2f = 2 \cdot 10^{-7} \text{ В}^2/\text{Гц}$ равномерна в полосе частот от $-f$ до $f = 10$ МГц. Корреляционную функцию вычислим в соответствии с (7.27). Имеем

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} S_0(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega}^{\omega} S_0(\omega) \cos \omega\tau d\omega = R(0) \frac{\sin \omega\tau}{\omega\tau},$$

где $R(0) = \sigma^2 = 4 \text{ В}^2$.

Пример 7.6. Найти корреляционную $R(\tau)$ и спектральную $S(\omega)$ функции для случайного процесса $\zeta(t) = A_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$, где A_m и ω_0 – постоянные амплитуда и угловая частота, φ – случайная начальная фаза, равномерно распределенная на интервале $[-\pi, \pi]$, т.е. $\rho(\varphi) = 1/2\pi$.

В соответствии с определением корреляционной функции имеем

$$R_{\xi}(\tau) = M[\xi(t) \xi(t + \tau)] - m_{\xi}^2.$$

Так как

$$\begin{aligned} m_{\xi} &= M[\xi(t, \varphi)] = \int_{-\pi}^{\pi} A_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \rho(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A_m}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) d(\omega_0 t + \varphi) = \frac{A_m}{2\pi} \cos(\omega_0 t + \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{\xi}(\tau) &= M[\xi(t, \varphi) \xi(t + \tau, \varphi)] = \int_{-\pi}^{\pi} A_m^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \varphi) \rho(\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{A_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\omega_0 t + \varphi) \sin(\omega_0 t + \varphi + \omega_0 \tau) d\varphi = \\ &= \frac{A_m^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos \omega_0 \tau - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi + \omega_0 \tau)] d\varphi = \frac{A_m^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned}$$

Спектральную плотность найдем по формулам Винера – Хинчина:

$$\begin{aligned} S_0(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{\xi}(\omega) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{A_m^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau = \\ &= \frac{A_m^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\omega - \omega_0)\tau} + e^{-i(\omega + \omega_0)\tau}] d\tau = \frac{\pi A_m^2}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)], \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} d\tau = \delta(\omega).$$

7.7. Понятие о ковариации (моменте связи) и коэффициенте ковариации

Простейшей характеристикой связи между случайными величинами X и Y служит математическое ожидание произведения отклонений X и Y от их центров, т.е.

$$\text{cov}(X, Y) = M[(X - M[X])(Y - M[Y])], \quad (7.29)$$

которая называется *ковариацией*, или начальным смешанным моментом второго порядка, или моментом связи. Выражение для ковариации можно преобразовать к

$$\text{cov}(X, Y) = M[XY - YM[X] - XM[Y] + M[X]M[Y]] = M[XY] - M[X]M[Y] \quad (7.30)$$

Если величины X и Y независимы, то, поскольку математическое ожидание произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их математических ожиданий, ковариация независимых ожиданий равна нулю. Величина $\text{cov}(X, Y)$ зависит от единиц измерения, в которых выражаются X и Y , поэтому сама по себе она не может служить

показателем связи. Чтобы иметь дело с безразмерным показателем, рассматривают ковариации нормированных отношений

$$X^* = \frac{X - M[X]}{\sigma_x} \quad \text{и} \quad Y^* = \frac{Y - M[Y]}{\sigma_y}. \quad (7.31)$$

Каждое из них имеет центром нуль и единичную дисперсию. Отношение

$$\frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = \rho_{XY} \quad (7.32)$$

называется коэффициентом ковариации случайных величин X и Y . Для независимых случайных величин X и Y $\rho_{XY} = 0$. Однако это не значит, что если $\rho_{XY} = 0$, то X и Y будут независимы: величины могут быть связаны функционально, а коэффициент ковариации при этом будет равен нулю. Например, при $M[X] = 0$, $Y = X^2$ $M[XY] = M[X^3] = 0 = M[X] M[Y]$ и, значит, $\text{cov}(X, Y) = 0$, а также $\rho_{XY} = 0$, несмотря на то что Y является функцией X .

7.8. Корреляционная функция

Центральный смешанный момент второго порядка, записанный для двух случайных величин, называется корреляцией этих величин и характеризует связь между ними. Точно так же, как и ковариация, сама по себе корреляция отражает связь между величинами не очень рельефно. Поэтому на практике используют понятие коэффициента корреляции, представляющее собой отношение центрального смешанного момента к стандартным отклонениям соответствующих величин. Корреляция совпадает с ковариацией, если математические ожидания сравниваемых величин равны нулю.

Спектральный подход не всегда является подходящим для анализа сигналов. В качестве временной характеристики сигнала используется автокорреляционная функция, определяемая соотношением

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) dt, \quad (7.33)$$

где τ – величина временного сдвига сигнала.

Из выражения (7.33) следует, что $\psi(\tau)$ характеризует степень связи (корреляцию) сигнала $s(t)$ со своей копией, сдвинутой на величину τ по оси времени.

Ясно, что функция $\psi(\tau)$ достигает максимума при $\tau = 0$, так как любой сигнал полностью коррелирован сам с собой. Если рассматривать сигнал, представляющий собой напряжение или ток, выделяемый на резисторе величиной в 1 Ом , то при $\tau = 0$

$$\psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = E, \quad (7.34)$$

т.е. максимальное значение автокорреляционной функции равно энергии сигнала. С увеличением τ функция $\psi(\tau)$ убывает (необязательно монотонно) и

при относительном сдвиге сигналов $s(t)$ и $s(t-\tau)$ на величину, превышающую длительность сигнала, обращается в нуль.

Отметим, что при вычислении автокорреляционной функции сигнала $\psi(\tau)$ нет абсолютно никакой разницы в том, сдвигается сигнал относительно своей копии или копия сдвигается относительно сигнала. Это значит, что автокорреляционная функция является четной. Поэтому справедливо

$$\psi(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t+\tau) dt. \quad (7.35)$$

Если случайный процесс образуется наложением одинаковых импульсов, беспорядочно расположенных на оси времени, то при значении τ , превышающем длительность импульсов, $\psi(\tau)=0$.

Вычислив преобразование Фурье для корреляционной функции

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)e^{-i\omega\tau} dt d\tau = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)e^{i\omega(t-\tau)} d(t-\tau) dt = S(\omega)S^*(\omega) = |S(\omega)|^2, \end{aligned}$$

видим, что корреляционная функция связана с квадратом модуля спектральной плотности (энергетическим спектром) сигнала $s(t)$. Отсюда следует, что корреляционная функция не зависит от фазового спектра сигнала, т.е. сигналы с одинаковыми АЧХ, но разными ФЧХ имеют одну и ту же корреляционную функцию. Таким образом, из-за утраты информации о ФЧХ по корреляционной функции нельзя восстановить форму исходного сигнала.

Если шум образуется хаотическим положением импульсов, длительность которых бесконечно мала, то и время корреляции стремится к нулю. Это означает, что корреляционная функция равна нулю для всех значений $\tau \neq 0$ и обращается в бесконечность при $\tau=0$. Иными словами, корреляционная функция приобретает характер дельта-функции $\delta(t)$. Подобный процесс называется дельта-коррелированным процессом, или белым шумом.

Для периодического процесса автокорреляционная функция определяется выражением

$$\psi(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) dt. \quad (7.36)$$

Отсюда видно, что для периодического сигнала $s(t)$ функция $\psi(\tau)$ также является периодической функцией. Период функции $\psi(\tau)$ совпадает с периодом сигнала $s(t)$.

Пример 7.7. Построить автокорреляционную функцию гармонического напряжения $s(t)=A\cos(\omega t-\varphi)$.

Имеем

$$\psi(\tau) = \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t - \varphi) \cos[\omega(t - \tau) - \varphi] dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t - \varphi) [\cos(\omega t - \varphi) \cos \omega \tau + \sin(\omega t - \varphi) \sin \omega \tau] dt = \\
 &= \frac{A^2}{T} \left[\cos \omega \tau \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(\omega t - \varphi) dt + \sin \omega \tau \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t - \varphi) \cos(\omega t - \varphi) dt \right] = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau.
 \end{aligned}$$

Мы видим, что при $\tau = 0$ $\psi(0) = A^2/2$, т.е. $\psi(0)$ представляет собой мощность гармонического колебания, определяемую амплитудой A . Кроме того, отметим, что автокорреляционная функция не дает никакой информации о начальной фазе φ сигнала.

Иначе обстоит дело со взаимной корреляционной функцией двух гармонических сигналов с одинаковыми частотами, но разными начальными фазами.

Пример 7.8. Пусть $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$, $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$. Выполнив вычисления, аналогичные предыдущим, получим

$$\psi_{12}(\tau) = \frac{A_1 A_2}{2} \cos[\omega \tau - (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Отсюда видно, что взаимная корреляционная функция для двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω зависит от разности фаз φ_1 и φ_2 . Максимум функции $\psi_{12}(\tau)$ получим не при $\tau = 0$, как в случае автокорреляционной функции, а при $\tau = (\varphi_1 - \varphi_2)/\omega$.

Читателю предоставляется возможность теоретически рассмотреть случай с двумя гармоническими колебаниями с кратными частотами и начальными фазами φ_1 и φ_2 , а мы приведем программы, составленные для исполнения в среде MathCAD 2000 Professional для расчета автокорреляционной и взаимной корреляционной функций для рассмотренных выше случаев (рис. 7.4, 7.5 и 7.6).

$$\begin{aligned}
 T &:= 10 & A &:= 1 & N &:= 200 & n &:= 0..N & \tau_n &:= -40 + 0.4 \cdot n \\
 f &:= \frac{1}{T} \\
 s(t) &:= A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t) & R_n &:= \left(\frac{A^2}{T} \right) \cdot \int_0^T s(t) \cdot s(t - \tau_n) dt
 \end{aligned}$$

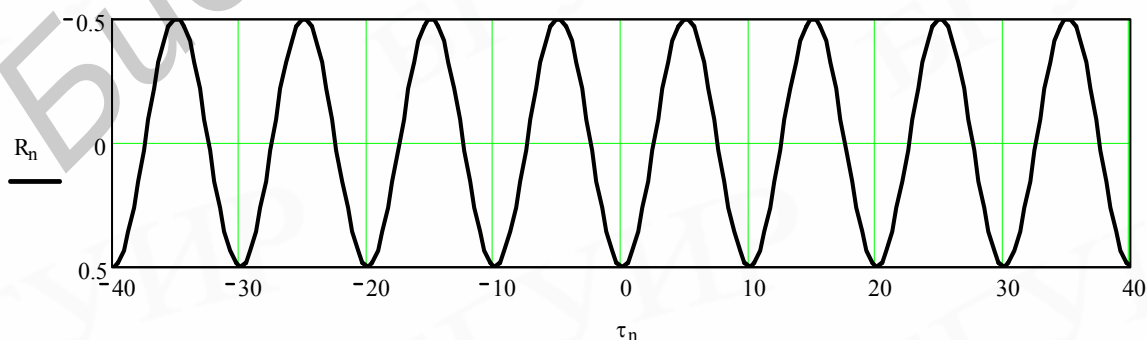


Рис. 7.4. Программа расчета автокорреляционной функции гармонического сигнала и график полученной автокорреляционной функции

$$\begin{aligned}
\phi_1 &:= \pi & \phi_2 &:= \frac{\pi}{2} \\
T &:= 10 & A &:= 1 & f &:= \frac{1}{T} & N &:= 200 & n &:= 0..N & \tau_n &:= -40 + 0.4 \cdot n \\
R_n &:= \left(\frac{A^2}{T} \right) \cdot \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t - \tau_n) dt \\
s_1(t) &:= A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_1) \\
s_2(t) &:= A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_2)
\end{aligned}$$

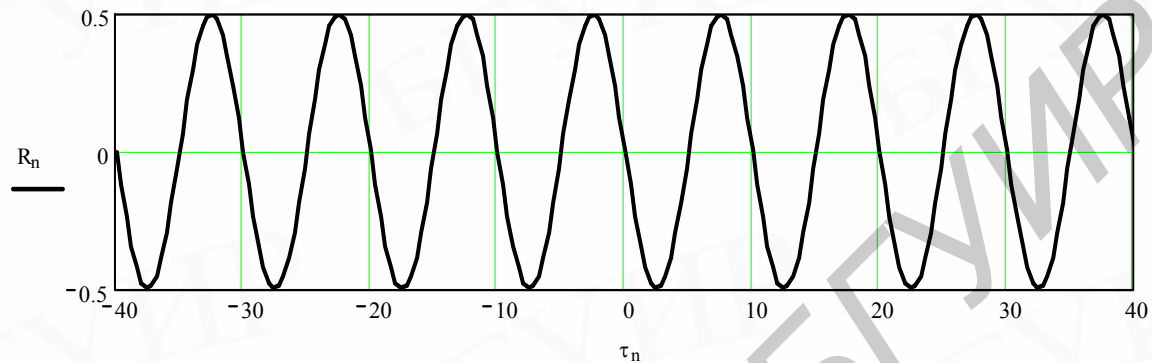


Рис. 7.5. Программа расчета взаимной корреляционной функции двух гармонических колебаний одной частоты с различными начальными фазами и график полученной взаимной корреляционной функции

Пользуясь этими программами, легко составить много новых программ, с помощью которых можно изучить другие случаи построения взаимных корреляционных функций.

С помощью программ, составленных для использования в среде пакета Mathcad, легко убедиться, что автокорреляционная функция гармонического колебания не зависит от его начальной фазы, т.е. для гармонического сигнала с различными начальными фазами корреляционная функция будет одной и той же. Также легко убедиться в том, что вид взаимной корреляционной функции для двух гармонических сигналов с одинаковыми частотами и различными начальными фазами зависит от разности начальных фаз этих колебаний. Читатель может поэкспериментировать, проводя расчеты взаимной корреляционной функции в среде пакета MathCAD также с гармоническими колебаниями, имеющими кратные частоты.

7.9. Взаимная корреляционная функция неперiodических сигналов

Взаимная корреляционная функция двух неперiodических сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ определяется выражением

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt, \quad (7.37)$$

где τ – смещение одного сигнала относительно другого в единицах времени.

Выражение (7.37) имеет смысл при $\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt < \infty$, $\int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t) dt < \infty$. Имеет значение порядок следования функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$. Для $R_{12}(\tau)$ и $R_{21}(\tau)$ получим соотношения

$$R_{12}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) s_2(t + \tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t) s_1(t + \tau) dt = -R_{21}(\tau).$$

Для периодических сигналов понятие взаимной корреляционной функции не применяется, хотя его можно ввести для сигналов, имеющих одинаковые периоды.

$$\begin{aligned}
 T &:= 10 & A &:= 1 & f &:= \frac{1}{T} & N &:= 200 & n &:= 0..N & \tau_n &:= -40 + 0.4 \cdot n \\
 & & \phi_1 &:= 0 & \phi_2 &:= 0 & & & & & s_1(t) &:= A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_1) \\
 & & & & & & & & & & s_2(t) &:= A \cdot \cos(3 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi_2) \\
 R_n &:= \left(\frac{A^2}{T} \right) \cdot \int_0^T s_1(t) \cdot s_2(t - \tau_n) dt
 \end{aligned}$$

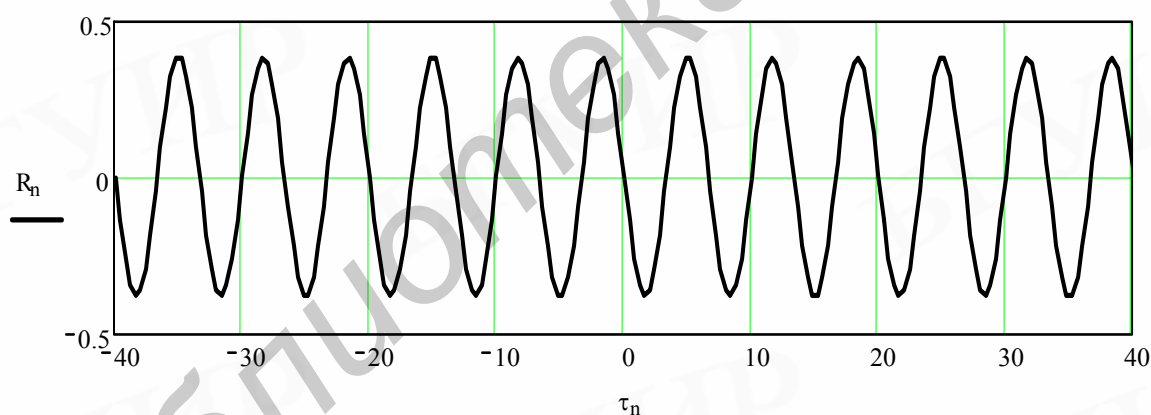


Рис. 7.6. Программа расчета взаимной корреляционной функции гармонических колебаний с отличающимися в частотами и нулевыми начальными фазами и график полученной взаимной корреляционной функции

Пример 7.9. Вычислить функции $R_{12}(\tau)$ и $R_{21}(\tau)$ для экспоненциального $s_1(t) = \exp(-at)$, $t \geq 0$ и прямоугольного

$$s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_u; \\ 0, & t < 0, \quad t > \tau_u \end{cases}$$

сигналов.

При $\tau < 0$

$$R_{12}(\tau) = \int_0^{\tau_u - \tau} e^{-at} dt = \frac{1}{a} e^{-a\tau} [1 - e^{-a(\tau_u - \tau)}],$$

при $\tau > 0$

$$R_{21}(\tau) = \int_0^{\tau u + \tau} e^{-at} dt = \frac{1}{a} e^{-a\tau} [1 - e^{-a\tau u}].$$

Если изменить порядок следования функций в выражении для корреляционной функции, то при $\tau < 0$

$$R_{21}(\tau) = \int_{\tau}^{\tau u} e^{-at} dt = \frac{1}{a} e^{-a\tau} (1 - e^{-a\tau u}),$$

что равно $R_{12}(\tau)$ при $\tau > 0$.

При $\tau > 0$

$$R_{21}(\tau) = \int_0^{\tau u - \tau} e^{-at} dt = \frac{1}{a} [1 - e^{-a(\tau u - \tau)}]$$

равно $R_{12}(\tau)$ при $\tau < 0$. Графики $R_{12}(\tau)$ и $R_{21}(\tau)$ приведены на рис. 7.7, в, г.

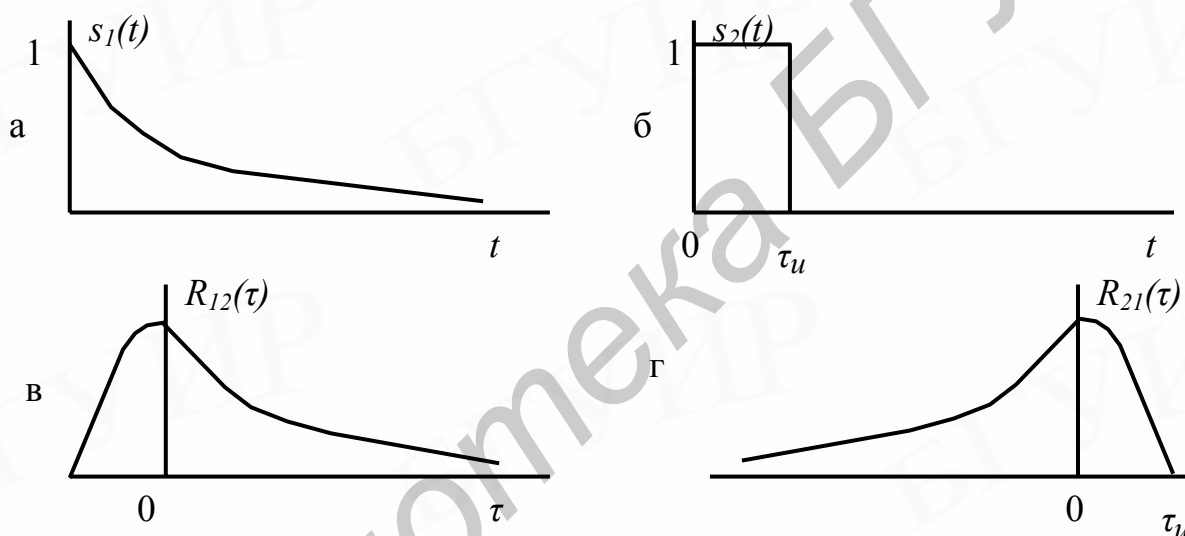


Рис. 7.7. Экспоненциальный (а) и прямоугольный (б) импульсы и их взаимные корреляционные функции $R_{12}(\tau)$ (в) и $R_{21}(\tau)$ (г)

Пример 7.10. Вычислить функции $R_{12}(\tau)$ и $R_{21}(\tau)$ для треугольного $s_1(t) = t/\tau_u$, $0 \leq t \leq \tau_u$ и прямоугольного

$$s_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau_u; \\ 0, & t < 0, t > \tau_u \end{cases}$$

импульсов.

При $\tau < 0$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau u - \tau} t dt = \frac{1}{2\tau_u} (\tau_u - \tau)^2.$$

При $\tau > 0$

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{\tau_u} \int_{\tau}^{\tau u} t dt = \frac{1}{2\tau_u} (\tau_u^2 - \tau^2).$$

Изменяя порядок следования функций $s_1(t)$ и $s_2(t)$, получим: при $\tau < 0$

$$R_{21}(\tau) = \frac{1}{\tau_u} \int_{\tau}^{\tau_u} t dt = \frac{1}{2\tau_u} (\tau_u^2 - \tau^2),$$

что равно $R_{12}(\tau)$ при $\tau > 0$.

При $\tau > 0$

$$R_{21}(\tau) = \frac{1}{\tau_u} \int_0^{\tau_u - \tau} t dt = \frac{1}{2\tau_u} (\tau_u - \tau)^2,$$

что равно $R_{12}(\tau)$ при $\tau < 0$. Графики функций $R_{12}(\tau)$ и $R_{21}(\tau)$ приведены на рис. 7.8, в, г.

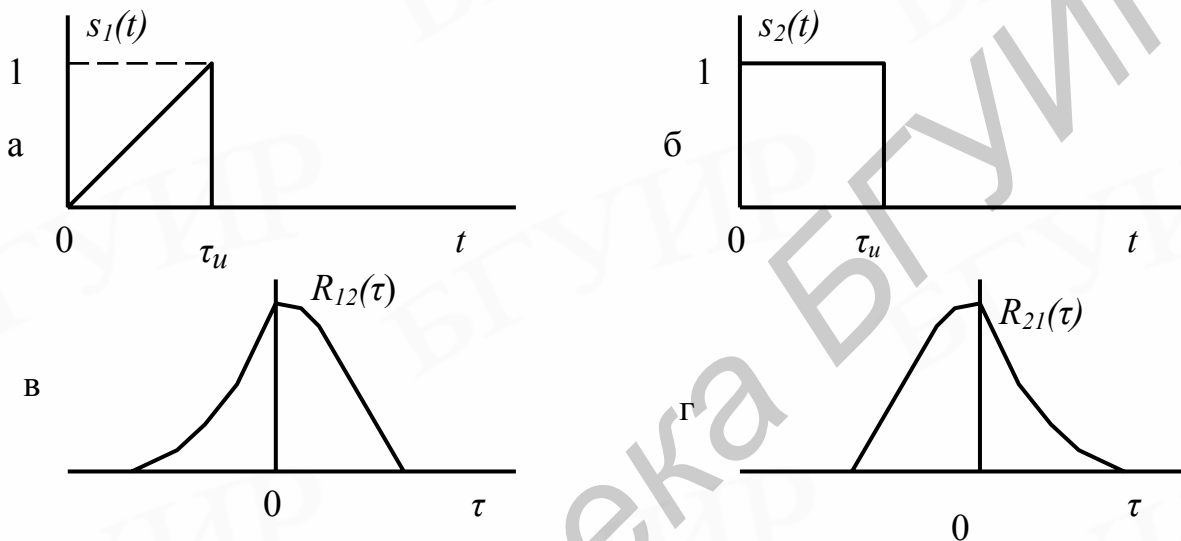


Рис. 7.8. Треугольный (а) и прямоугольный (б) импульсы и их взаимно корреляционные функции $R_{12}(\tau)$ (в) и $R_{21}(\tau)$ (г)

Подвергнем взаимную корреляционную функцию преобразованию Фурье:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) e^{-i\omega\tau} dt d\tau = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{i\omega(t - \tau)} d(t - \tau) dt = S_1(\omega) S_2^*(\omega). \end{aligned}$$

Итак, взаимная корреляционная функция связана с взаимным спектром сигналов. Отсюда следует, что если спектры сигналов не перекрываются, то их взаимный спектр равен нулю на всех частотах, а значит, равна нулю и их взаимная корреляционная функция при любых временных сдвигах τ . Таким образом, сигналы с неперекрывающимися спектрами некоррелированы.

7.10. Помехи. Их свойства и математическое описание

Помехой радиоприему называют стороннее возмущение, препятствующее приему радиосигнала. Большой частью помеха создается

непреднамеренно в процессе развития различных физических явлений, никак не связанных с процессом передачи информации с помощью электромагнитных волн.

В процессе передачи информации помеха может воздействовать на сигнал практически в любой части канала связи, начиная с преобразования сообщения в электрический сигнал и кончая обратным преобразованием принятого электрического сигнала в сообщение, которое предоставляется получателю.

Разные помехи радиоприему, если их рассматривать как случайные процессы, имеют, вообще говоря, разные вероятностные характеристики.

При одновременном воздействии сигнала и помехи на входные цепи приемника возмущения, обусловленные ими, накладываются друг на друга. Математически такое взаимодействие сигнала и помехи можно записать следующим образом:

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad (7.38)$$

где $s(t)$ – функция времени, описывающая возмущение, вызванное воздействием на приемную антенну электромагнитной волны сигнала, $n(t)$ – возмущение, обусловленное воздействием помехи, $x(t)$ – отклик на одновременное воздействие сигнала и помехи.

Мы видим, что в каждый момент времени значение принятого сигнала равно сумме мгновенных значений сигнала и помехи. Такая смесь сигнала и помехи называется *аддитивной*.

Существует и другой вид помехи, при которой мощность сигнала на входе приемника случайным образом меняется во времени. Математически при такой помехе принимаемое колебание

$$x(t) = s(t) n(t). \quad (7.39)$$

Принятые здесь обозначения являются теми же, что и раньше, но предполагается, что $n(t)$ – случайный процесс, реализации которого не могут принимать отрицательных значений. Таким образом, в данном случае имеем произведение сигнала на некоторый случайный процесс, который называется *мультипликативной помехой*.

В реальных каналах связи распространяющиеся электромагнитные волны подвергаются и более сложным преобразованиям, так что указанные аддитивная и мультипликативная помехи не исчерпывают возможных способов воздействия помех на сигналы.

7.11. Корреляционный анализ сигналов и корреляционный прием

Спектральный подход к изучению сигналов дает полную информацию о внутренней структуре сигналов. Однако при решении многих задач, например, обнаружения сигналов в помехах, когда решение о наличии сигнала в смеси

сигнал+шум принимается после сравнения этой смеси с заранее известной копией сигнала, не требуется знания всей информации о сигнале. В этих случаях информацию о сигнале, достаточную для решения задачи обнаружения, можно ограничить только временной характеристикой сигнала. В качестве такой характеристики как детерминированного, так и случайного сигнала можно использовать автокорреляционную функцию сигнала. Приемник, решающий задачу обнаружения, вычисляет максимальное значение автокорреляционной функции, которое равно энергии сигнала. Мы видели, что спектральная плотность сигнала равна площади сигнала независимо от его формы и ничего не говорит о форме сигнала. Объясняется это тем, что спектральная плотность определяет сигнал полностью лишь совместно с его фазочастотной характеристикой.

Легко понять принцип работы корреляционного приемника, предназначенного, например, для определения направления на цель путем обработки отраженных от нее сигналов. Структурная схема приемника приведена на рис. 7.9. Здесь принятый приемником сигнал $s(t)$ поступает на перемножитель, в котором он перемножается со своей копией, задержанной на какой-то промежуток времени с помощью линии задержки, имеющей n выводов, каждый из которых подключен к соответствующему перемножителю. Далее сигнал с выхода перемножителя подвергается интегрированию, т.е. вычисляется автокорреляционная функция, максимум которой регистрируется только на одном индикаторе I_k . По номеру индикатора оператор определяет направление, с которого пришел сигнал. Тем самым определяется направление наблюдения цели.

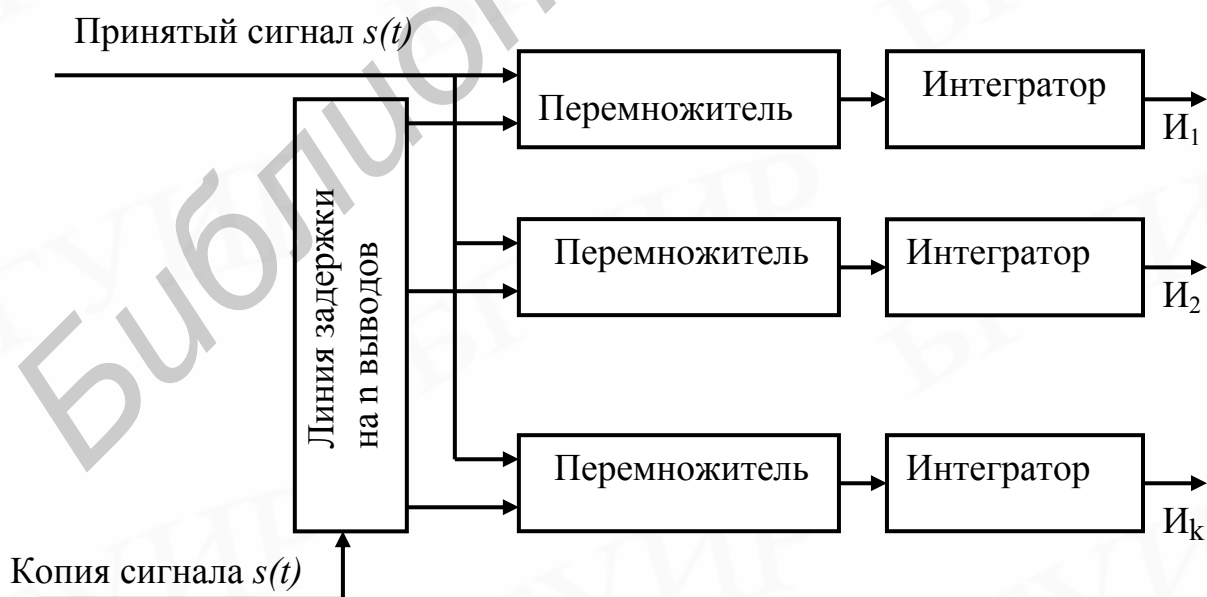


Рис. 7.9. Структурная схема автокорреляционного приемника

На практике форма принимаемого сигнала часто неизвестна. Даже в радиолокации, где работают с известными сигналами, форма отраженного сигнала может сильно отличаться от формы излучаемого. В этом случае как раз и используется автокорреляционный приемник, который позволяет решать задачи обнаружения при уровне шумов, в тысячи раз превышающих уровень полезного сигнала.

7.12. Сравнение случайных и детерминированных сигналов

Детерминированный сигнал во временной области характеризуется временной функцией $y(t)$ и, например, в случае описания напряжения имеет размерность $[B]$, в частотной области он характеризуется спектральной плотностью $S(f)$, имеющей размерность $[B/Гц]$.

Случайный сигнал во временной области характеризуется корреляционной функцией $R(\tau)$, имеющей размерность $[B^2]$, а в частотной области – энергетическим спектром $W(f)$ с размерностью $[B^2/Гц]$.

Следовательно, если детерминированный сигнал описывается в координатах напряжение – время и спектральная плотность – частота, то случайный сигнал – в координатах мощность – время и энергетический спектр – частота. В этом различие в описании детерминированного и случайного сигналов.

Базовым соотношением для детерминированного сигнала, устанавливающим связь между временной и спектральной характеристиками, является прямое и обратное преобразования Фурье, определяемые соответствующими интегральными преобразованиями. Для случайного сигнала такими базовыми соотношениями являются формулы Винера – Хинчина.

Как для простых детерминированных, так и для простых случайных сигналов справедливо соотношение, представляющее собой произведение ширины Δf спектра на длительность τ и равное примерно единице. При этом длительности детерминированного сигнала соответствует время корреляции, при котором функция корреляции $R(\tau)$ близка к нулю при случайном сигнале. Отсюда следует, что чем короче импульс или уже корреляционная функция, тем шире спектр сигнала. При расширении спектра его амплитуда пропорционально уменьшается.

При $\tau \rightarrow 0$ величина $\Delta f \rightarrow \infty$. Такой случай соответствует сигналу, называемому белым шумом.

Отметим также, что вероятностные и корреляционные (или спектральные) характеристики случайных процессов – это совершенно разные и независимые друг от друга функции. Тем не менее рассчитать дисперсию случайного процесса можно как на основе его одномерной плотности вероятности, так и исходя из его корреляционной функции.

8. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ

И МАНИПУЛЯЦИИ

8.1. Основные виды импульсной модуляции

Успехи в освоении СВЧ и развитие импульсной техники способствовали созданию новых видов управления колебаниями, а именно импульсной модуляции. Термин «импульсная модуляция» означает, по существу, выполнение двойной модуляции: первичной модуляции некоторой вспомогательной последовательности передаваемых сообщений и вторичной модуляции радиочастотного колебания (несущей) напряжением, полученным от первичной модуляции.

Структурная схема передающей части системы импульсной радиосвязи приведена на рис. 8.1.

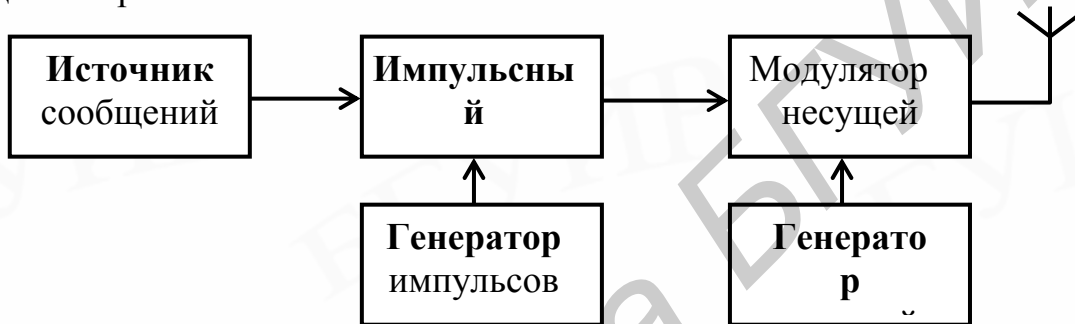


Рис. 8.1. Структурная схема передающей части системы импульсной радиосвязи

Вторичная модуляция, представляющая собой обычную амплитудную модуляцию несущего колебания импульсами, не требует дополнительного рассмотрения. Как и при простой амплитудной модуляции, спектр колебания в этом случае будет состоять из несущей частоты и двух симметричных полос боковых частот, каждая из которых определяется спектром импульсной последовательности.

В зависимости от выбора меняющегося параметра импульсная модуляция подразделяется на следующие виды:

- *амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)*, когда по закону управляющего сигнала меняется приращение амплитуды импульсов;
- *модуляция по длительности импульсов (ДИМ)*, называемая еще модуляцией по ширине импульса (ШИМ), когда по закону управляющего сигнала меняется длительность импульсов;
- *временная импульсная модуляция (ВИМ)*, когда по закону управляющего сигнала происходит смещение импульсов по временной оси. При этом ВИМ можно разделить на частотно-импульсную (ЧИМ) и фазоимпульсную (ФИМ), в зависимости от того, изменяется ли положение импульса на оси времени пропорционально частоте или фазе передаваемого сигнала, как при ЧИМ, так и при ФИМ. Наиболее широко распространены высокочастотная импульсная модуляция по частоте (В-ЧИМ) и по фазе (В-ФИМ).

На рис. 8.2 показаны реализации модулирующего линейно изменяющегося сигнала $s(t)$ и результаты его запечатления в изменяющихся параметрах высокочастотного колебания. При этом возможно осуществить различные виды импульсной модуляции. Наиболее широко распространены высокочастотная модуляция по частоте и по фазе. В этих случаях ни амплитуда, ни длительность, ни тактовая частота следования импульсов не меняются. Меняются в процессе модуляции только частота или начальная фаза высокочастотного заполнения по закону изменяющегося сообщения.

Теоретической базой всех перечисленных видов импульсной модуляции является теорема В.А.Котельникова, на основании которой выбирается тактовая частота следования импульсов.

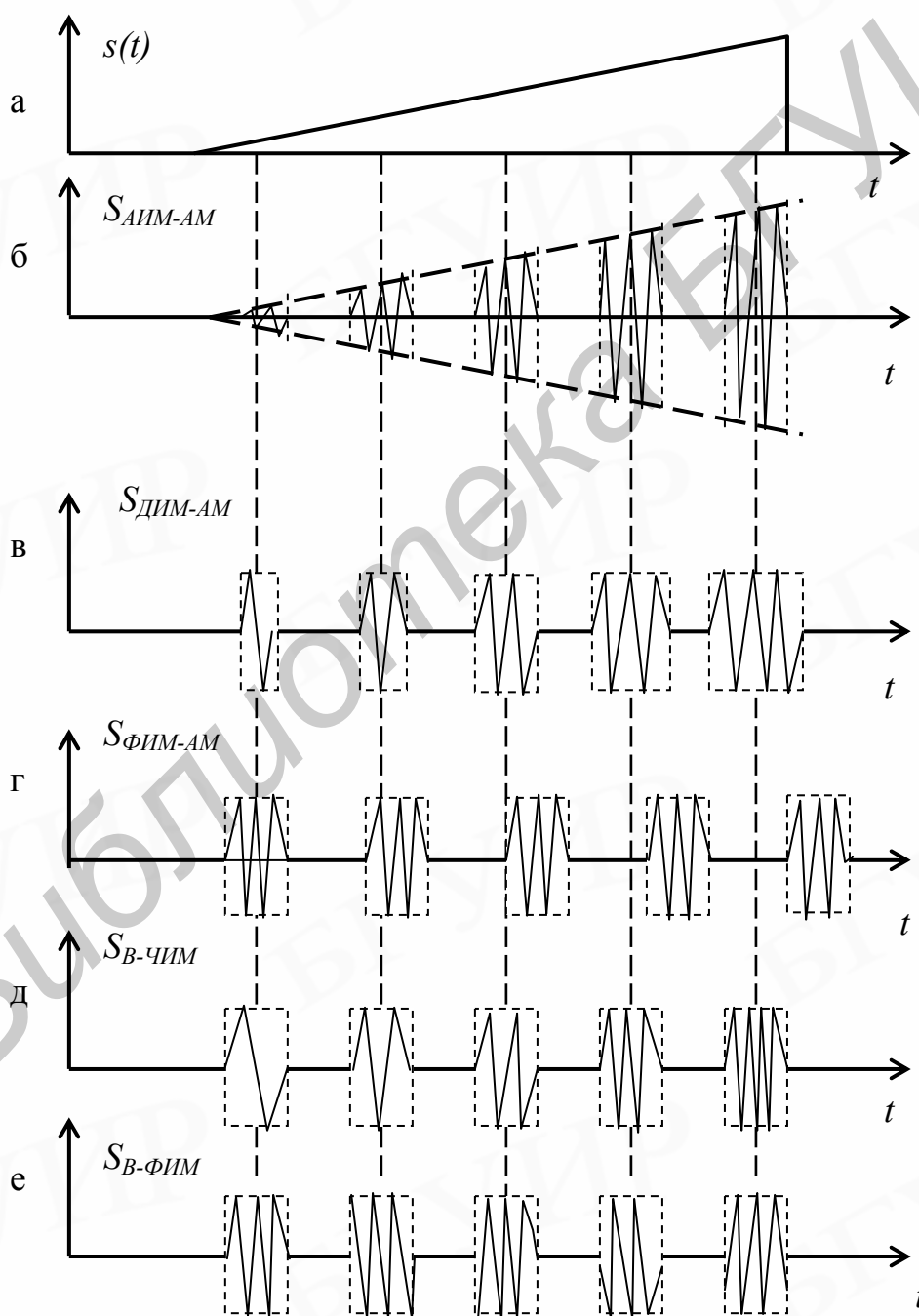


Рис. 8.2. Основные виды импульсной модуляции

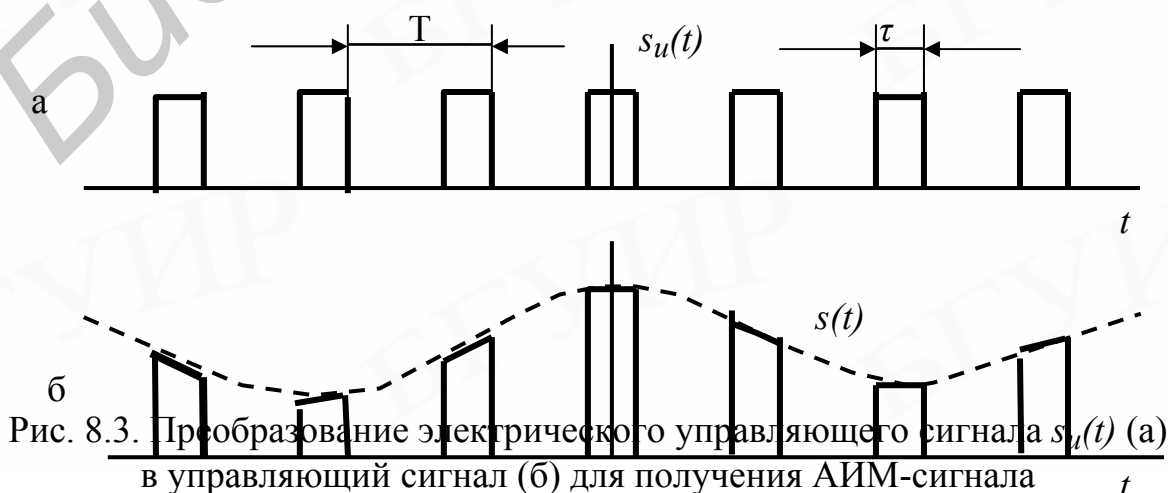
Амплитудный спектр последовательности прямоугольных импульсов мы уже не раз строили. Положение спектральных компонент на оси частот определяется частотой повторения импульсов, а амплитуды этих компонент зависят от длительности импульсов τ . Интервал частот от 0 до $1/\tau$ часто называют главным лепестком. Число гармоник частоты повторения, расположенных на этом интервале, равно скважности импульсов $q=T/\tau$. В главном лепестке сосредоточена большая часть мощности периодической последовательности импульсов, поэтому эквивалентной шириной спектра периодической импульсной последовательности считают ширину главного лепестка $\Delta f=1/\tau$.

Спектр сигнала после первичной импульсной модуляции лежит в низкочастотной области. Поэтому для радиопередачи производится повторная модуляция: модулированными видеоимпульсами модулируется высокочастотное гармоническое колебание. В результате антенна передатчика излучает в окружающее пространство последовательность модулированных радиоимпульсов.

8.1.1. Амплитудно-импульсная модуляция

АИМ – простейший вид импульсной модуляции, поскольку обладает наибольшей простотой как при получении модулированных колебаний, так и при их детектировании. Однако этому виду модуляции присущ недостаток – он не допускает амплитудного ограничения. В связи с этим АИМ мало пригодна в тех случаях, когда одним из главных требований является повышение помехоустойчивости радиоканала. АИМ находит применение в качестве промежуточного преобразования при осуществлении, а также при детектировании более сложных видов модуляции (ДИМ и ВИМ).

Определим спектр АИМ-колебания при модуляции прямоугольных видеоимпульсов напряжением $s_u(t)$. На рис.8.3,а изображена исходная периодическая последовательность $s_u(t)$ прямоугольных импульсов, имеющих длительность τ и период следования T , а на рис.8.3,б – та же последовательность, промодулированная сигналом $s(t)$, близким к гармоническому колебанию.



Тонально модулированную последовательность видеоимпульсов в соответствии с законом модуляции $s(t) = U_m \cos \Omega t$ можно записать (при $U_m = 1$):

$$\begin{aligned}
 s_{АИМ}(t) &= (1 + m \cos \Omega t) \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_u t - \varphi_n) \right] = \\
 &= \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_u t - \varphi_n) \right] + \left[\frac{m c_0}{2} \cos \Omega t + m \cos \Omega t \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_u t - \varphi_n) \right] = \\
 &= \left[\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_u t - \varphi_n) \right] + \\
 &+ \left[\frac{m c_0}{2} \cos \Omega t + \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos((n\omega_u + \Omega)t - \varphi_n) + \frac{m}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos((n\omega_u - \Omega)t - \varphi_n) \right].
 \end{aligned}$$

На основании этого выражения построим спектр модулированной импульсной последовательности (рис. 8.4).

Можно заметить, что при $m = 0$ в правой части анализируемого соотношения остаются только первые два слагаемых, которые образуют спектр исходной периодической последовательности прямоугольных импульсов. Благодаря модуляции около каждой компоненты (включая нулевую составляющую $c_0/2$), играющей роль несущей, появляются боковые составляющие с амплитудами $m c_n/2$ и частотами $n\omega_u \pm \Omega$, в том числе низкочастотная составляющая с амплитудой $m c_0/2$ и частотой модуляции Ω .

В случае модуляции спектром частот при АИМ около каждой гармонической составляющей спектра $n\omega_u$ появляются боковые составляющие с частотами $n\omega_u + \Omega$ и $n\omega_u - \Omega$. Если АИМ сигнал получен в результате модуляции спектром частот от Ω_{min} до Ω_{max} , то с обеих сторон каждой из составляющих спектра $n\omega_u$ появятся нижняя и верхняя боковые полосы частот шириной от Ω_{min} до Ω_{max} . При этом, чтобы боковые полосы при каждой следующей и предыдущей частотах $n\omega_u$ не перекрывались, вследствие чего появились бы искажения при передаче сигнала, необходимо, чтобы частота следования импульсов $f_u = \omega_u/2\pi = 1/T$ была не менее чем в два раза больше максимальной частоты спектра управляющего сигнала $F_{max} = 2\pi/\Omega_{max}$.

Наконец, при модуляции непериодическим сигналом, обладающим спектром $S(\omega)$, вместо отдельных пар боковых составляющих наблюдаются сплошные боковые полосы, смещенные на частоты $n\omega_u$, т.е. формируется спектр вида, полученный для дискретизированного по времени непрерывного сигнала.

Чтобы уменьшить ошибки дискретизации исходного колебания, возникающие при использовании АИМ, тактовую частоту $\omega_u = 2\pi/T$ импульсов выбирают из условия $\omega_u > (2...5)\omega_g$, где $\omega_g = 2\pi f_g$ – максимальная частота в спектре $S(\omega)$ модулирующего сигнала. Этому условию соответствует интервал дискретизации $T = 2\pi/\omega_u$, меньший, чем интервал дискретизации, который определяется теоремой Котельникова: $\Delta t < 1/(2...5)f_g$. Поскольку передаваемое сообщение заложено в низкочастотную часть спектра АИМ, прилегающую к нулевой частоте, то для восстановления сообщения на приемном конце канала связи после амплитудного детектора достаточно использовать ФНЧ.

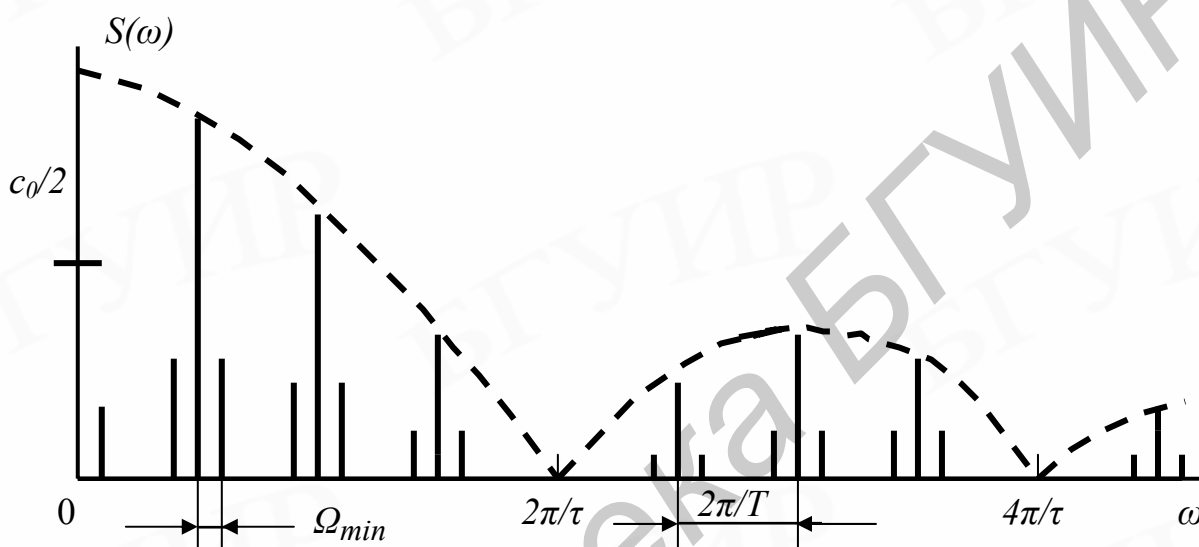


Рис. 8.4. Спектр модулированной импульсной последовательности

Приходим к выводу, что ширина спектра АИМ-сигнала не зависит от частоты модулирующего сигнала, поскольку определяется только длительностью импульса. Для прямоугольных импульсов несущей последовательности ширину спектра АИМ-сигнала можно принять равной

$$\Delta\omega_{сп\ АИМ} = 2\pi/\tau.$$

8.1.2. Широтно-импульсная модуляция (ШИМ)

При широтно-импульсной модуляции модулируется ширина (длительность) импульсов, а остальные параметры остаются неизменными. Различают одностороннюю и двустороннюю ШИМ. При односторонней ШИМ положение одного из фронтов импульса (например переднего) остается неизменным относительно тактовой точки, а положение другого фронта (заднего) меняется в соответствии с модулирующим сообщением. Максимальный временной сдвиг модулируемого фронта $\Delta\tau_m$ относительно его начального значения называется *девиацией фронта импульса*. При ШИМ всегда должно выполняться условие $\Delta\tau_m/\tau < 1$.

Благодаря модуляции около каждой компоненты (включая нулевую составляющую $c_0/2$), играющей роль несущей, появляются боковые составляющие с амплитудами $mc_n/2$ и частотами $n\omega_u \pm \Omega$, в том числе низкочастотная составляющая с амплитудой $mc_0/2$ и частотой модуляции Ω .

Спектр ШИМ отличается от спектра АИМ тем, что при ШИМ гармоники частоты повторения оказываются модулированными по амплитуде и по фазе. При малых величинах индекса модуляции, что практически всегда имеет место, различие между спектрами АИМ и ШИМ незначительно.

8.1.3. Временная импульсная модуляция (ВИМ)

При ВИМ модулируется положение импульсов t_k относительно тактовых точек t_{0k} немодулированной последовательности. Длительность импульсов и их амплитуды при модуляции остаются неизменными. Имеем

$$t_k = t_{0k} + \Delta\tau_m x(t_k), \quad \tau = \text{const}, \quad U_0 = \text{const}.$$

Максимальный временной сдвиг импульсов $\Delta\tau_m$ относительно тактовой точки называется девиацией импульса. При ВИМ $\Delta\tau/\tau > 1$ каждому импульсу длительности τ нужно отвести временной интервал не менее $\tau + 2\Delta\tau_m$.

Анализ показывает, что низкочастотная компонента ВИМ описывается выражением

$$u_{ВИМ}(t) = \frac{U_0\tau}{T_p} + \frac{U_0\tau}{T_p} \Delta\tau_m x'(t) + \dots$$

Гармоники частоты повторения имеют амплитудную и фазовую модуляцию. Если сообщение $x(t) = \sin\Omega_M t$, то $x'(t) = \Omega_M \cos\Omega_M t$ и

$$u_{ВИМ}(t) = \frac{U_0\tau}{T_p} + \frac{U_0\tau}{T_p} \Delta\tau_m \Omega_M \cos\Omega_M t + \dots$$

Наиболее важное различие между спектрами ВИМ и ШИМ заключается в величине амплитуд составляющих на частоте F_M . При ШИМ имеем

$$U_{F_M} = \frac{U_0\tau m}{T_p}, \quad \text{а при ВИМ } U_{F_M} = \frac{U_0\Delta\tau m}{T_p} \tau \Omega_M.$$

Если число каналов велико ($N \gg 1$), то можно показать, что $\tau \Omega_M \ll 1$. Отсюда следует, что амплитуда составляющей на частоте F_M при ВИМ много меньше, чем при ШИМ. Кроме того, при ВИМ эта амплитуда зависит от частоты модулирующего напряжения F_M .

Анализируя спектры различных импульсно-модулированных сигналов, приходим к выводу, что ширина спектра этих сигналов определяется прежде всего длительностью последовательности импульсов, которая подвергается амплитудной, частотной или фазовой модуляции.

8.2. Основные виды манипуляции сигналов

В цифровой радиосвязи в качестве переносчика первичного сигнала можно использовать периодическую последовательность видео- или радиоимпульсов, характеризующуюся амплитудой, длительностью, частотой следования, положением импульсов во времени относительно тактовых импульсов. Изменением одного из перечисленных параметров в соответствии с изменением модулирующей функции можно получать различные виды импульсной модуляции: АИМ, ДИМ (или ШИМ), ЧИМ, ФИМ и т. д.

Спектр сигнала после первичной импульсной модуляции лежит в низкочастотной области, поэтому для радиопередачи производится повторная модуляция: модулированными видеоимпульсами модулируется гармоническое колебание высокой частоты. В результате передающее устройство излучает в окружающее пространство последовательность модулированных радиоимпульсов.

В цифровой связи передается не аналоговый сигнал, а последовательность целых чисел n_0, n_1, n_2, \dots , которые могут принимать значения из некоторого конечного множества. Эти числа, называемые символами, поступают от источника информации с периодом T , а частота, соответствующая этому периоду, называется символьной скоростью. На практике часто используется двоичная последовательность из символов, когда каждое из n_i может принимать одно из двух значений – 0 или 1. Последовательность передаваемых импульсов является дискретным сигналом. Так как символы принимают значения из конечного множества, то этот сигнал является и квантованным, т.е. его можно назвать цифровым сигналом.

Способ модуляции, когда параметры несущего колебания меняются скачкообразно, называется манипуляцией. В зависимости от того, какие именно параметры несущего колебания изменяются в соответствии с модулирующим сигналом, различают АМн-, ФМн-, ЧМн-, квадратурную (КАМн)-манипуляцию. Кроме того, при передаче цифровой информации можно использовать несущее колебание, отличное по форме от гармонического. Так, при использовании в качестве несущего колебания последовательности прямоугольных импульсов возможны АИМ, ШИМ и ВИМ и другие виды модуляции.

8.2.1. Частотная манипуляция

При частотной манипуляции каждому возможному значению передаваемого символа соответствует своя частота. В течение каждого символьного интервала передается гармоническое колебание с частотой, соответствующей текущему символу.

Сформируем двухпозиционный (бинарный) ЧМн-сигнал, в котором возможным значениям символов 0 и 1 соответствуют частоты f_1 и f_2 . Так как каждая посылка формируется независимо, сформированный сигнал содержит скачки фазы при переходе от одной посылки к другой. Чтобы спектр сигнала был компактнее, используется частотная модуляция с непрерывной фазовой функцией (continuous phase frequency shift keying, CPFSK). При этом

формируется линейно меняющаяся полная фаза колебания, а передаваемые символы управляют скоростью ее изменения. При этом передаваемые символы переключают значения мгновенной частоты; эта частота интегрируется, в результате чего получается непрерывная функция, описывающая поведение фазового угла колебания, косинус которого также получается непрерывной функцией.

Прием ЧМн-сигнала, как правило, осуществляется корреляционным методом. Сущность его состоит в вычислении функции взаимной корреляции между принятым сигналом и колебанием, играющим роль образцового, которое может генерироваться в приемнике. В качестве выходного символа выбирается тот, частота которого оказывается максимально коррелирована со входным сигналом.

Корреляционный прием может быть когерентным или некогерентным. Когерентный алгоритм может использоваться, если известна начальная фаза колебания. Опорными сигналами в этом случае служат вещественные гармонические сигналы, обладающие нужными частотами и начальными фазами. Для принятия решения о принятом символе сравниваются вещественные результаты вычисления корреляционных сумм.

На практике начальные фазы, как правило, неизвестны. Тогда используют некогерентный корреляционный прием, при котором опорные сигналы представляют гармонические колебания нужной частоты. Для принятия решения о принятом символе сравниваются модули результатов вычисления корреляционных сумм. Модуль комплексной взаимной функции корреляции не зависит от начальной фазы сигналов, но помехоустойчивость такого алгоритма хуже, чем в случае когерентного приема.

Для повышения помехоустойчивости ЧМн желательно, чтобы посылки, соответствующие разным символам, были некоррелированы. Считая начальные фазы посылок нулевыми, ЧМн-сигналы для символов 0 и 1 можно записать

$$S_0(t) = A \cos \omega_0 t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$S_1(t) = A \cos \omega_1 t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Из выражения для взаимной корреляционной функции при нулевом временном сдвиге получаем

$$\begin{aligned} R_{01}(0) &= \int_0^T S_0(t) S_1(t) dt = A^2 \int_0^T \cos \omega_0 t \cos \omega_1 t dt = \\ &= \frac{A^2 T}{2} \int_0^T \cos(\omega_1 + \omega_0) t dt + \frac{A^2 T}{2} \int_0^T \cos(\omega_1 - \omega_0) t dt = \\ &= \frac{A^2 \sin(\omega_1 + \omega_0) T}{2(\omega_1 + \omega_0)} + \frac{A^2 \sin(\omega_1 - \omega_0) T}{2(\omega_1 - \omega_0)}. \end{aligned}$$

Если $(\omega_1 + \omega_0)T \gg 1$, то первое слагаемое значительно меньше второго и им можно пренебречь. Тогда

$$R_{01}(0) = \frac{A^2 \sin(\omega_1 - \omega_0)T}{2(\omega_1 - \omega_0)}.$$

Это значение функции взаимной корреляции равно нулю при $(\omega_1 - \omega_0)T = \pi k$, где k – целое число, не равное нулю.

Таким образом, минимальное расстояние между частотами манипуляции, при котором посылки, соответствующие разным символам оказываются некоррелированными, составляет $\Delta\omega_{\min} = \pi/T$ или $\Delta f_{\min} = 1/2T = f_T/2$, где f_T – символьная скорость.

Двухпозиционная (бинарная) ЧМн, частота которой выбрана согласно этому условию, называется минимальной частотной манипуляцией (minimum shift keying, MSK).

В бинарной системе передачи термин «символ» синонимичен биту, поэтому символьная скорость f_s эквивалентна битовой скорости f_b , т.е. $f_s = f_b$ только для двоичной передачи. В других случаях символ может содержать несколько битов. В системе QPSK $f_s = f_b/2$, $T_s = 2T_b$, т.е. один символ содержит 2 бита информации.

В системе GSM для модуляции радиосигнала используется спектрально эффективная гауссовская частотная манипуляция с минимальным частотным сдвигом (GMSK). Последовательность информационных битов до модулятора проходит через фильтр НЧ с гауссовской АЧХ, что дает значительное уменьшение ширины полосы частот излучаемого сигнала.

GMSK-сигнал формируется следующим образом. На интервале, соответствующем 1 биту, фаза несущей изменяется на 90° . Это наименьшее изменение фазы, которое может быть обнаружено при данном типе манипуляции. Выходной сигнал с непрерывным изменением фазы аналогичен сигналу, полученному в результате частотной модуляции с дискретным изменением частоты.

В системе GSM используется модуляция с величиной нормированной полосы $BT = 0,3$, где B – ширина полосы фильтра на уровне минус 3дБ, T – длительность передачи 1 бита.

Основой формирования GMSK-сигнала является квадратурный (I/Q) модулятор с синфазной (Inphase) и квадратурной (Quadrature) компонентами, который состоит из двух умножителей и одного сумматора. Применение модуляции GMSK позволяет:

- использовать передающие устройства с усилителем мощности, работающем в классе C;
- получить низкий уровень внеполосного излучения;
- обладает хорошей помехозащищенностью.

В системе GSM для максимальной защиты от несанкционированного подключения применяется специальный модуль подлинности абонента – SIM-карта (Subscriber Identification Module) – модуль идентификации абонента. Это карточка со встроенной микросхемой, в которой хранится специальная информация о конкретном абоненте. SIM-карта выдается оператором сотовой

связи при подключении телефона и может быть использована с любой моделью мобильного аппарата стандарта GSM.

8.2.2. Фазовая манипуляция

При ФМн скачкообразно изменяется фаза несущего колебания. На практике ФМн используется при небольшом числе возможных значений начальной фазы – как правило, 2, 4 или 8. Поскольку при приеме трудно измерить абсолютное значение начальной фазы, то значительно проще определить относительный фазовый сдвиг между двумя соседними символами. Поэтому обычно используется фазоразностная манипуляция (differential phase shift keying – DPSK).

8.2.3. Квадратурная манипуляция

При квадратурной манипуляции (quadrature amplitude shift keying, QASK) каждому из возможных значений дискретного символа C_i ставится в соответствие пара величин: амплитуды синфазной и квадратурной составляющих либо амплитуда и начальная фаза несущего колебания. Параметры аналогового колебания, соответствующего дискретному символу, удобно представлять в алгебраической или комплексной форме. Совокупность этих комплексных чисел для всех возможных значений дискретного символа называется *созвездием*. На практике используются созвездия, содержащие от 4 до нескольких тысяч точек. Модемы, предназначенные для передачи данных по телефонным линиям связи, используют созвездия:

- а) 16 точек (протокол v.32, скорость 9600 бит/с),
- б) 128 точек (протокол v.32 bis, скорость 14400 бит/с),
- в) 640 точек (протокол v.34, скорость 28800 бит/с).

График сигнала с квадратурной манипуляцией не очень нагляден из-за смешанного характера модуляции (амплитудной и фазовой). Изменения амплитуды и начальной фазы при переходе от символа к символу могут быть небольшими и потому плохо заметными на графике.

9. СИСТЕМЫ СВЯЗИ С РАЗДЕЛЕНИЕМ КАНАЛОВ

9.1. Системы связи с частотным разделением каналов

Структурная схема многоканальной системы связи с частотным разделением каналов приведена на рис. 9.1. Метод разделения состоит в следующем.

Сообщение от источника с номером i ($i=1...n$) поступает на соответствующий каналный модулятор ($КМ_i$), где модулирует по одному из параметров вспомогательное синусоидальное колебание (поднесущую f_i), вырабатываемое генератором поднесущей. Частоты поднесущих отдельных

каналов выбираются так, чтобы спектры модулированных поднесущих практически не перекрывались.

Модулированные поднесущие называются канальными сигналами. В зависимости от вида модуляции канальные сигналы могут быть АМ, ЧМ, ФМ, ИМ и т.д.

Канальные сигналы поступают на полосовые фильтры, чтобы уменьшить перекрытие спектров. После суммирования канальных сигналов образуется групповой сигнал. Так как по каналам многоканального передатчика могут передаваться сигналы от различных источников: телефонных аппаратов, фототелеграфных аппаратов и других источников сигнала, сигнал в групповом тракте возбуждителя и линейного усилителя является сложным многоисточниковым сигналом. Как видно, групповой сигнал можно рассматривать как случайный нестационарный узкополосный сигнал с известным спектром мощности.

Групповой сигнал поступает на общий модулятор (ОМ) для модуляции несущего колебания, создаваемого в передатчике. При этом также может использоваться АМ, ЧМ, ФМ или ИМ. Таким образом, модуляция получается двухступенчатой.

Высокочастотная несущая, модулированная групповым сигналом, поступает в антенну и далее – в эфир.

В селективных частях приемного устройства происходит выделение и частотное разделение сигналов разных каналов. После усиления принятых сигналов они подвергаются демодуляции в схемах соответствующих демодуляторов (ДМ_і).

Примерами таких систем являются системы радиовещания и телевидения. Например, весь диапазон СВ содержит 120 каналов. Первому каналу соответствует частота 531 кГц, второму – 540 кГц и т.д. до 120-го, которому соответствует частота 1602 кГц. Как видим, каналы отстоят друг от друга на 9 кГц. На приемной стороне спектры различных каналов выделяются соответствующими полосовыми фильтрами. После фильтров сигналы детектируются для получения переданных сообщений.

9.2. Системы связи с временным разделением

В соответствии с теоремой Котельникова информацию, содержащуюся в непрерывном сигнале с ограниченным частотой f_m спектром, можно передавать в виде отсчетов этого сигнала, взятых через промежутки времени $\Delta t \leq 1/2f_m$.

Для передачи канал используется не все время, и поэтому можно использовать временное разделение. При этом образуются выборки всех подлежащих передаче сигналов, которые затем передаются в интервалах между импульсами других сигналов. В приемнике отсчеты, принадлежащие каждому сигналу, выделяются с помощью соответствующих устройств. Структурная схема канала с временным разделением каналов показана на рис. 9.2.

В передатчике коммутатор, управляемый генератором импульсов $G1$, подключен ко всем источникам сообщений. Этот же генератор импульсов вырабатывает отсчетные импульсы. Таким образом, коммутатор последовательно подключает источник сообщений к устройству выборки, которое последовательно берет отсчеты с помощью импульсов, вырабатываемых задающим генератором. Коммутатор и устройство выборки действуют синхронно. Таким образом, выходом устройства выборки являются сигналы, которые состоят из последовательных отсчетов всех сообщений.

В приемнике для распределения импульсов по отдельным каналам используется свой задающий генератор импульсов и коммутатор, которые работают синхронно с коммутатором передатчика.

Отсчеты сообщений оказываются разделенными. Непрерывные сообщения в каждом канале восстанавливаются с помощью фильтров низких частот.

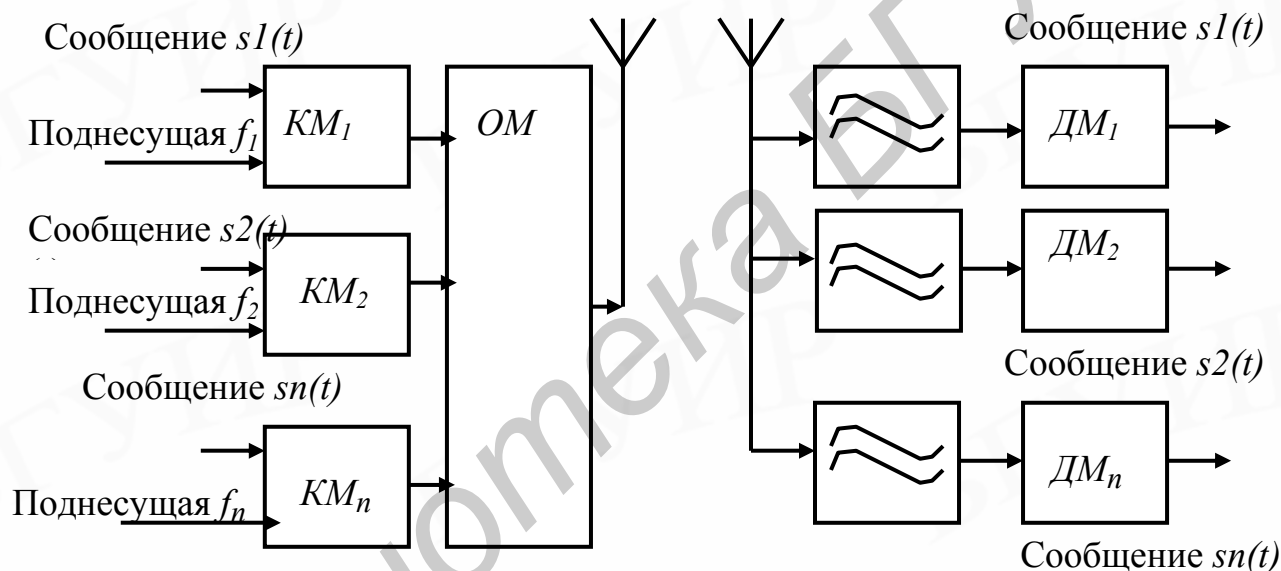


Рис. 9.1. Структурная схема системы связи с частотным разделением каналов

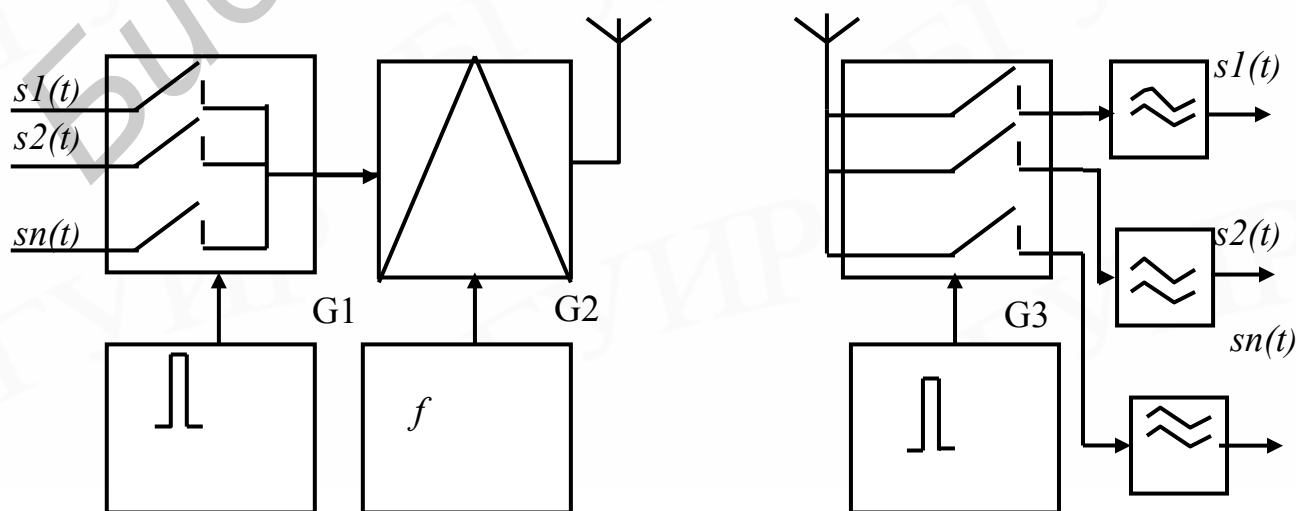


Рис. 9.2. Структурная схема системы связи с временным разделением каналов

Принципы временного разделения каналов базируются на теореме Котельникова. Возможность передачи не всего непрерывного сообщения, а только отдельных значений лежит в основе всех систем связи, использующих временное разделение каналов. При этом отсчеты сообщений N различных каналов нужно передавать не одновременно, а поочередно, один за другим, так, чтобы каждому каналу на некотором временном интервале $\Delta t = T_n$ предоставлялся свой промежуток ΔT_k , называемый канальным интервалом.

Практически передача мгновенных значений сообщений осуществляется с помощью последовательности коротких импульсов длительностью $\tau \ll T_n$, которая модулируется по одному из параметров: амплитуде, длительности или временному положению.

Таким образом, в канальных трактах возможен один из 3 видов импульсной модуляции: АИМ, ШИМ или ВИМ.

В общем тракте импульсная последовательность модулируется высокочастотным гармоническим колебанием. Здесь возможен любой вид модуляции: АМ, ЧМ или ФМ.

Системы с временным уплотнением каналов принято классифицировать по видам модуляции, используемым в канальном и общем трактах: АИМ-АМ, АИМ-ЧМ, ВИМ-АМ и т.д.

9.3. Сравнение систем с частотным и временным уплотнением

В системе связи с частотным уплотнением все сигналы непрерывны и смешиваются во временной области. Однако спектры различных сигналов занимают разные полосы в частотной области и могут быть разделены с помощью фильтров. При временном уплотнении отсчеты каждого сигнала различны и могут быть разделены во временной области. Тем не менее частотные спектры этих различных выборочных сигналов занимают одну и ту же полосу частот. Итак, при частотном уплотнении сохраняется частотный признак сигнала, тогда как признак формы колебания сохраняется при временном уплотнении. Поскольку сигнал полностью определяется либо своим частотным представлением, либо временным, принятые сигналы можно разделить в приемнике соответствующими способами.

При частотном разделении каждый сигнал передается по каналу все время, и все сигналы смешиваются, но каждый из них занимает свой конечный частотный диапазон, не занятый другими сигналами.

При временном разделении каждый сигнал занимает свой временной интервал, не занятый другими сигналами. Но спектры всех сигналов лежат в одной и той же частотной области.

Полосы частот, необходимые для передачи данного числа сигналов, одинаковы при частотном и временном уплотнении. Отсюда следует, что в данной полосе частот можно одновременно передавать одинаковое число сигналов, используя частотное или временное разделение.

С практической точки зрения системы с временным разделением имеют преимущества перед системами с частотным разделением. Система с временным разделением проще, так как в системе с частотным разделением надо генерировать свои несущие частоты, при этом каждый канал занимает свою полосу частот и требуются различные полосовые фильтры. А в системе с временным разделением в каждом канале используется одинаковое оборудование, состоящее из простых коммутаторов. Фильтры, необходимые для детектирования, – это ФНЧ одинаковые для всех каналов, они проще модуляторов, демодуляторов, генераторов и полосовых фильтров в системе с частотным разделением.

Система с временным разделением нечувствительна к искажениям в канале, которые возникают в системе с частотным разделением вследствие нелинейности вольт-амперных характеристик усилителей.

В системе с временным разделением сигналы передаются не одновременно, поэтому требования к нелинейности тракта многоканальной системы такие же, как и в одноканальной системе. По этим причинам в телефонной связи на большие расстояния используются системы с временным разделением каналов.

9.4. Методы множественного доступа

Понятие множественного доступа (Multiple Access) связано с организацией совместного использования ограниченного участка спектра многими пользователями. Можно выделить 5 вариантов множественного доступа:

множественный доступ с временным разделением каналов связи (Time Division Multiplex Access - TDMA);

множественный доступ с частотным разделением каналов связи (Frequency Division Multiplex Access – FDMA);

множественный доступ с кодовым разделением каналов связи (Code Division Multiplex Access – CDMA);

множественный доступ с пространственным разделением каналов связи (Space Division Multiplex Access – SDMA);

множественный доступ с поляризационным разделением каналов связи (Polarization Division Multiplex Access – PDMA).

Практический интерес представляют первые три.

9.4.1. TDMA

Технология TDMA представляет собой мультиплексирование с временным разделением сигналов в пределах одного канала. При создании системы TDMA канал связи должен иметь достаточно высокую пропускную способность, чтобы обеспечить множественным абонентам возможность пользоваться этим каналом одновременно. Система TDMA, как правило,

сочетается с FDMA. Различные спецификации сотовых сетей предусматривают несколько вариантов ширины канала связи.

В целях поддержания совместимости с аналоговыми системами североамериканский стандарт TDMA предусматривает использование каналов связи с полосой рабочих частот шириной 30 кГц. Европейский стандарт оперирует с каналами шириной 200 кГц. Число временных интервалов у этих каналов также разное.

Дуплексная связь в системе с TDMA осуществляется за счет подключения технологии FDMA, т.е. представляет собой дуплексную связь с частотным разделением каналов.

9.4.2. FDMA

Технология FDMA представляет собой систему связи, использующей частотное разделение каналов. Доступный спектр частот разбит на каналы нескольких типов, которые предназначены для управления, сигнализации или передачи собственно полезной информации, т.е. человеческой речи. Данная технология применяется с традиционными аналоговыми системами. Ширина каждого канала при этом составляет 30 кГц.

FDMA решает вопрос распределения каналов связи, однако, не может справиться с проблемой дуплексных операций. При осуществлении дуплексной связи с частотным разделением каналов решение этой проблемы состоит в использовании двух симплексных каналов связи, которые изолированы друг от друга для снижения вероятности интерференции в конечных точках электрических цепей.

Сам по себе множественный доступ с частотным разделением каналов способен функционировать только тогда, когда каналы для приема и передачи данных разделены друг от друга. В том случае, когда доступен только один канал из всего частотного диапазона, применяется дуплексная связь с временным разделением каналов. При сочетании FDMA с дуплексной связью и временным разделением каналов типичное разделение каналов по частоте сменяется их разделением по времени.

В отличие от «чистых» FDMA применяют дуплексные связи с временным разделением каналов в рамках системы. FDMA требует, чтобы все соты были синхронизированы. Более того, временное разделение каналов в данном случае, как правило, не обеспечивает увеличения эффективности спектра с точки зрения объема передаваемой информации или емкости канала связи. Это связано с тем, что защитный промежуток между временными интервалами получается больше, чем в «чистых» системах с временным разделением каналов (TDMA), а также больше времени прохождения полного цикла в системе с частотным разделением каналов (FDMA).

9.4.3. CDMA

Множественный доступ с кодовым разделением каналов относится к области военной и спутниковой связи, где главными достоинствами связи являются скрытность и высокая помехоустойчивость. Важная особенность CDMA – это работа в полосе частот, значительно превышающей полосу частот речевого сигнала в сочетании ее с таким кодированием информации, которое позволяет выделять ее из общей широкой полосы, используемой одновременно всеми физическими каналами. Системы связи, реализующие CDMA, являются системами с расширенным спектром (spread spectrum), спектр информационного сообщения в них искусственно расширяется посредством модуляции (кодирования) периодической псевдослучайной последовательностью импульсов с достаточно малым дискретом.

Множественный доступ с кодовым разделением каналов связи основан на принципе, который подразумевает, что если известно, где нужно услышать и что нужно услышать, то можно выделить отдельный диалог из множества диалогов, ведущихся вполголоса (т.е. на уровне фонового шума) в комнате, полной людей. В случае применения технологии CDMA множество абонентов использует один и тот же диапазон частот, не рискуя при этом помешать «чужим» диалогам. Предоставление каждому абоненту возможности однозначно идентифицировать нужный ему диалог среди множества других позволяет намного более интеллектуально использовать спектр частот.

9.4.4. Множественный доступ с пространственным и поляризационным разделением каналов

Спутник INTELSAT IVA использует метод множественного доступа пространственным разделением каналов, называемый многолучевым многократным использованием частоты. Полосы частот одинаковы, но сигналы разнесены в пространстве. В таких случаях полосу частот называют многократно используемой.

Спутник COMSTAR 1 использует множественный доступ с поляризационным разделением каналов, который еще называют методом двойного поляризационного многократного использования частоты. В данном случае используется антенна с разными поляризациями, каждая из которых соотносится со своим приемником. Это позволяет реализовать одновременный доступ к спутнику пользователям, находящимся на небольших расстояниях друг от друга. Каждая из передающих антенн на Земле должна быть поляризована в соответствии с антенной спутника.

9.5. Растянутый спектр

Разновидность связи с растянутым спектром не подпадает ни под одну из разновидностей, рассмотренных выше, так как она позволяет передавать аналоговые или цифровые сигналы с помощью аналоговых сигналов.

Технология растянутого спектра изначально разрабатывалась для удовлетворения требований военных и разведки. Суть метода сводится к растягиванию спектра информационного сигнала на более широкую полосу с целью затруднить его подавление и перехват.

Метод перескока частоты – первый метод связи с растянутым спектром. Более современный способ – метод прямой последовательности. Оба эти метода используются в беспроводной связи.

На рис. 9.3 отмечены ключевые характеристики системы с расширением спектра.

Входной сигнал подается на кодер, генерирующий сигнал с относительно узкой полосой. Затем сигнал модулируется с использованием последовательности псевдослучайных чисел. Задача модулирования – расширить полосу частот, занимаемых спектром сигнала. На приемном конце канала связи производится демодуляция сигнала с расширенным спектром, для чего используется та же последовательность псевдослучайных чисел. После этого сигнал подается на каналный декодер для восстановления сигнала.

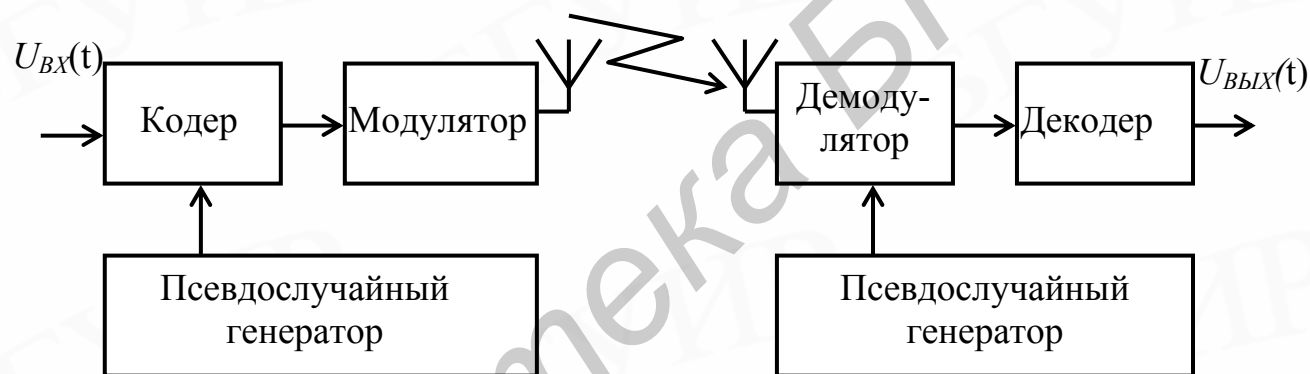


Рис. 9.3. Канал связи с расширением спектра

Последовательность псевдослучайных чисел генерируется по алгоритму, в котором используется некоторое исходное число. Алгоритм является детерминированным, поэтому генерируемые числа не являются случайными в статистическом смысле слова. В то же время последовательность успешно проходит испытания через тесты на их случайность. Поэтому числа называются псевдослучайными. Предсказать последовательность без знания алгоритма и начального числа невозможно. Следовательно, декодировать сигнал сможет только приемник, владеющий нужной информацией, совместно с передатчиком.

9.5.1. Метод перескока частоты

При использовании этого метода для передачи сигнала используются якобы случайные последовательности радиочастот, причем переход с одной частоты на другую происходит за доли секунд. Приемник, синхронно с передатчиком «перескакивающий» с частоты на частоту, может принимать

сообщения. Те же, кто будет подслушивать передачу, смогут услышать лишь невнятный шум. Глушить сигнал бесполезно: это сделает неразборчивыми лишь несколько первых битов сигнала.

9.5.2. Метод простой последовательности

При использовании этой схемы каждый бит исходного сигнала представляется несколькими битами передаваемого сигнала, называемого *раздробленным кодом*. Данный код растягивает сигнал на более широкую полосу частот, причем степень растяжения полосы прямо пропорциональна количеству используемых битов. Следовательно, десятибитовый растягивающий код растянет сигнал на полосу частот в 10 раз большую, чем однобитовый код.

Один из приемов – объединение цифрового информационного потока с потоком последовательности случайных чисел, для чего используется схема исключающего ИЛИ. Сказанное иллюстрируется рис. 9.4.

Отметим, что единичный бит информации инвертирует псевдослучайный бит, тогда как нулевой бит информации псевдослучайный бит не изменяет. Сигнал, получающийся после сложения информационного и псевдослучайного сигналов, передается со скоростью, равной скорости передачи исходной псевдослучайной последовательности. Поэтому полоса полученного сигнала шире полосы информационного сигнала. В примере, приведенном на рис. 9.4, скорость псевдослучайного потока битов в 4 раза выше скорости информационного потока.

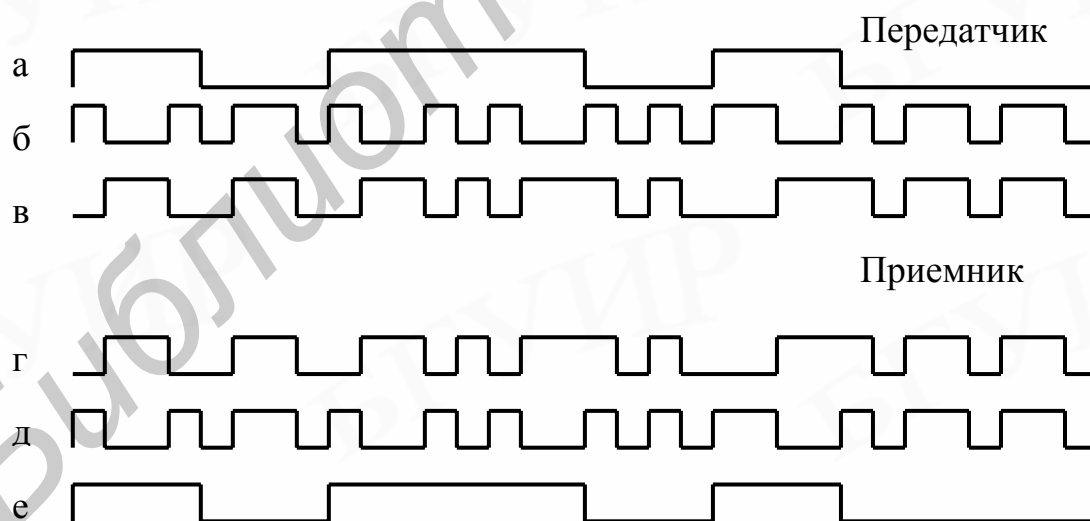


Рис. 9.4. Растягивание спектра методом прямой последовательности:

а – входные данные, б – локально генерируемый псевдослучайный поток битов, в – переданный сигнал ($v=a\oplus б$), г – принятый сигнал, г – локально генерируемый псевдослучайный поток битов, поток битов, идентичный потоку б, д – выходные данные ($a=б\oplus в$)

На рис. 9.4. раскрывается идея реализации метода прямой последовательности. В этом случае информационный поток и поток случайных чисел пропускаются через схему исключающего ИЛИ, после чего осуществляется процесс модуляции. Расширение спектра, происходящее за счет использования метода прямой последовательности, определяется довольно просто. Предположим, например, что ширина бита информационного сигнала равна t_b . Тогда ширина спектра сигнала равна $2/T_c$, где T_c – ширина спектра бита псевдослучайной последовательности. Ширина спектра суммарного сигнала приблизительно равна сумме всех битовых спектров. Очевидно, что величина полученного расширения прямо пропорциональна скорости передачи псевдослучайного потока: чем выше скорость передачи этого потока, тем больше расширение спектра.

10. СПЕКТР СТЕРЕОФОНИЧЕСКОГО СИГНАЛА

10.1. Спектр сигнала с полярной модуляцией

Полярная модуляция (ПМ) используется для осуществления стереовещания, когда одновременно передаются два сигнала: от левого $s_L(t)$ и правого $s_R(t)$ микрофонов. Положим, что $s_L = A_L \cos \Omega_L t$ и $s_R = A_R \cos \Omega_R t$. Эпюры этих сигналов показаны на рис 10.1 и 10.2 соответственно. При этом должны выполняться требования совместимости с уже имеющимися приемниками монофонических передач.

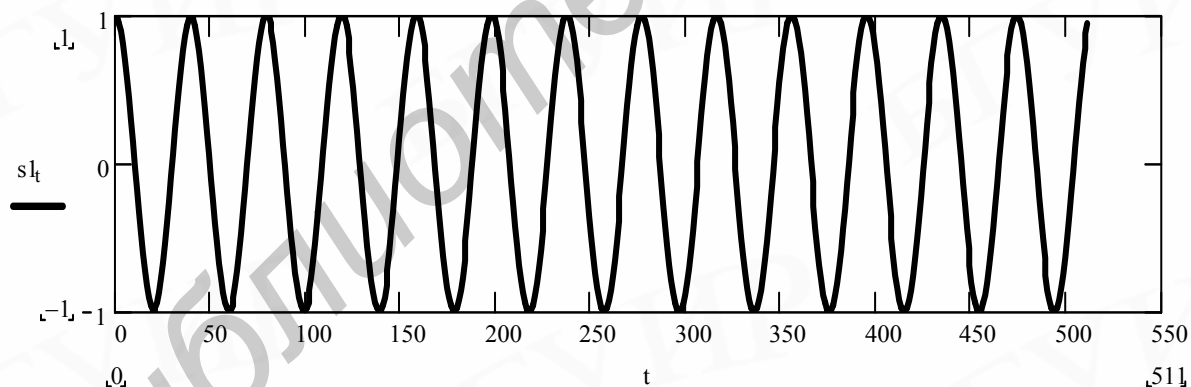


Рис. 10.1. Эпюра напряжения гармонического сигнала левого канала

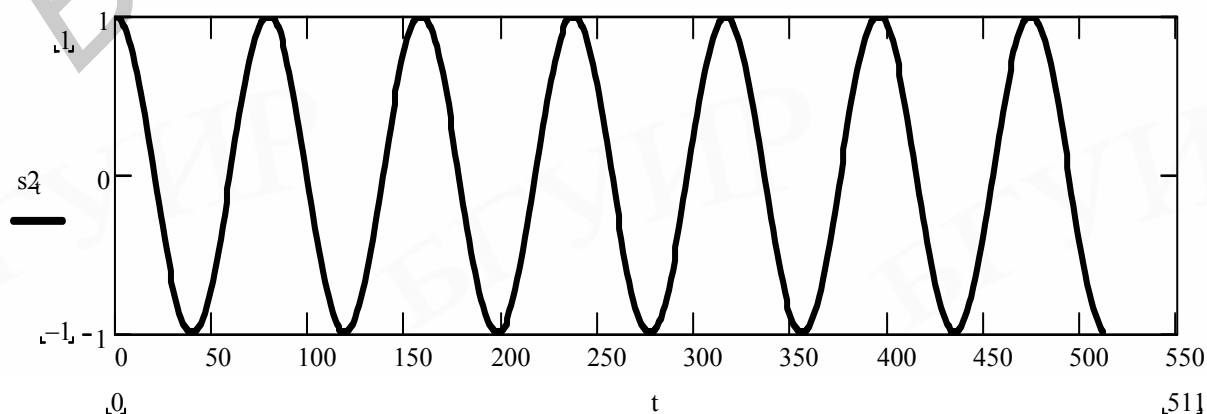


Рис. 10.2. Эпюра напряжения гармонического сигнала правого канала

Низкочастотная составляющая модулирующего сигнала для совместимости с монофоническими приемниками представляет собой монофонический сигнал, равный сумме сигналов $s_M = s_L(t) + s_R(t)$. Дополнительный сигнал s_D , позволяющий получить из смеси его с сигналом s_M сигналы s_L и s_R , располагается в области более высоких частот. Действительно, так как $s_M = s_L(t) + s_R(t)$, то, чтобы восстановить сигналы s_L и s_R из смеси $s_M + s_D$, последний формируют в виде $s_D = s_L(t) - s_R(t)$. Эпюры монофонического и дополнительного сигнала приведены на рис. 10.3 и 10.4 соответственно.

Складывая и вычитая сигналы s_M и s_D , легко восстановить $s_L = (s_M + s_D)/2$ и $s_R = (s_M - s_D)/2$. Итак, монофонический сигнал передается для совместимости как есть, а разностный сигнал модулирует поднесущую частоту, расположенную несколько выше звукового диапазона. Весь сигнал

$$s(t) = s_M + (A_0 + s_D) \cos \omega_0 t$$

затем используется для частотной модуляции несущей частоты радиопередатчика.

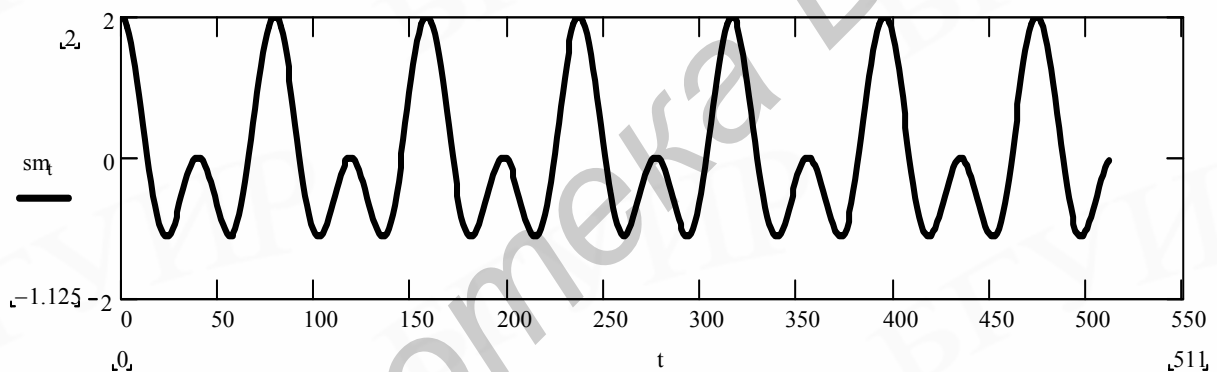


Рис. 10.3. Эпюра напряжения монофонического сигнала

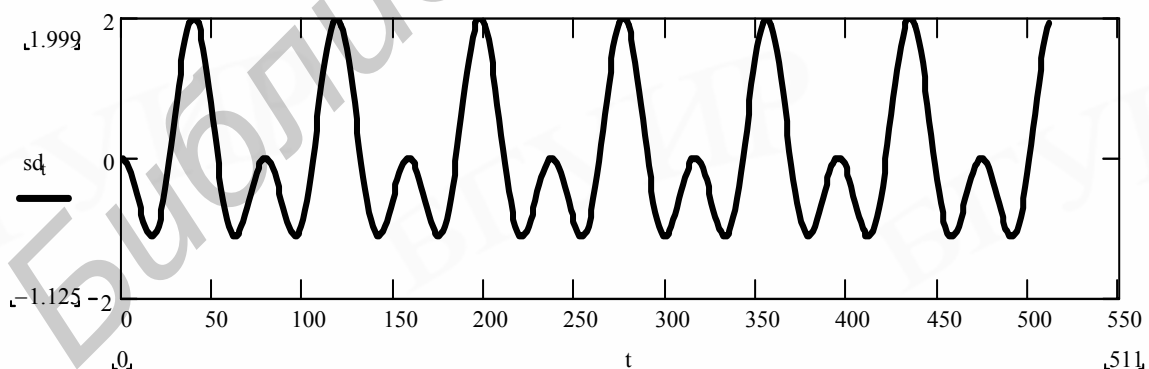


Рис. 10.4. Эпюра напряжения дополнительного сигнала

График этого сигнала приведен на рис.10.5. Однако в таком виде сигнал не используется из-за того, что при наличии несущего колебания размах сигнала сильно увеличивается по сравнению с монофоническим сигналом, что нежелательно. Поэтому несущее колебание частично или полностью подавляют, так что разностный сигнал передается в режиме перемодуляции.

В общем виде при модуляции в левом и правом каналах уравнение полярно-модулированного сигнала (ПМС) можно записать в виде

$$u(t) = U_m \left[\frac{m_R}{2} \cos \Omega_R t + \frac{m_L}{2} \cos \Omega_L t + \left(1 + \frac{m_R}{2} \cos \Omega_R t - \frac{m_L}{2} \cos \Omega_L \right) \cos \omega_0 t \right],$$

где m_R и m_L – коэффициенты модуляции соответственно сигналов правого и левого каналов, а U_m – амплитуда поднесущего колебания, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – поднесущая частота, $f_0 = 31,25$ кГц.

ПМК нельзя непосредственно передавать в эфир, так как он является низкочастотным процессом, который не может вызвать существенного электромагнитного излучения. Поэтому полярная модуляция осуществляется в два этапа: сначала получают ПМК с помощью поднесущей частоты $f_0 = 31,25$ кГц, а затем полученным сигналом модулируют несущую передатчика по частоте.

Отечественный стандарт, согласно которому вещание ведется в диапазоне 65-74 МГц, предусматривает частичное подавление поднесущей частоты, равной 31,25 кГц.

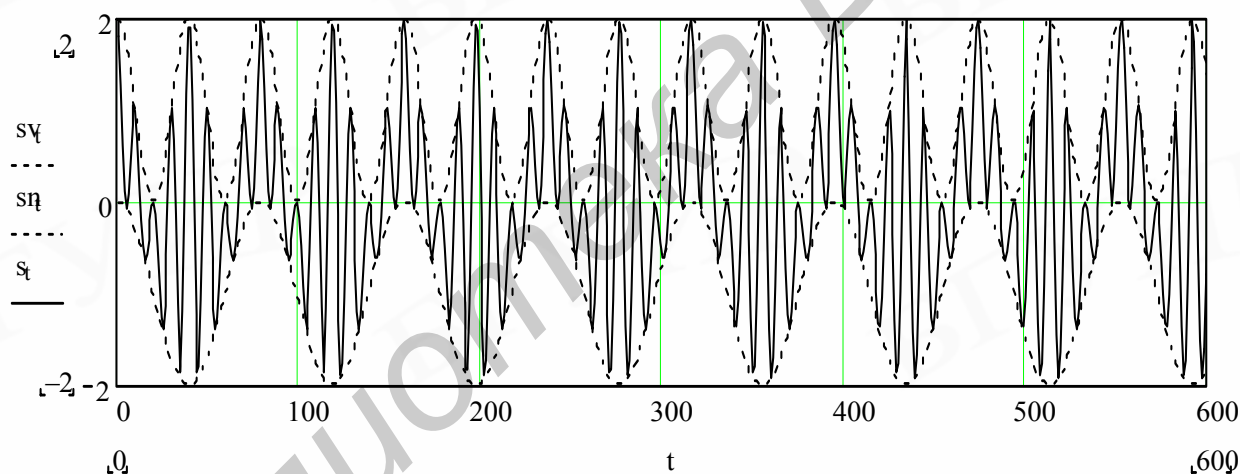


Рис. 10.5. Форма напряжения стереофонического сигнала

На рис. 10.6 показан спектр комплексного стереофонического сигнала для случая полного подавления несущей (пилот-сигнал мы не добавляем):

$$S = s_M + s_D \cos \omega_0 t.$$

При полярной модуляции положительные полупериоды высокочастотного колебания промодулированы сигналом левого канала, а отрицательные полупериоды – сигналом правого канала. Таким образом, спектр полярно модулированного сигнала состоит из 2 частей. Первая часть – монофонический сигнал $s_L + s_R$, – называется тональной частью спектра стереофонического сигнала. Вторая часть – АМ-сигнал, промодулированный разностью сигналов $s_L - s_R$ – надтональная часть спектра стереофонического сигнала. Поэтому полярная модуляция позволяет передавать модулирующие сигналы $s_L + s_R$ и $s_L - s_R$ на одной поднесущей частоте.

Так как спектр ПМ-сигнала содержит низкочастотную тональную составляющую, то непосредственно в эфир передавать такой сигнал неэффективно. Поэтому применяется частотная модуляция несущей передатчика ПМ-сигнала, т.е. при стереофоническом вещании модуляция звуковым сигналом проходит в два этапа. Частота поднесущей при полярной модуляции устанавливается равной $f_0 = 31,25 \text{ кГц}$.

При полосе звуковых частот сигнала с верхней частотой $F_B = 15 \text{ кГц}$ верхняя частота спектра ПМ-сигнала достигает $46,25 \text{ кГц}$, т.е. спектр ПМ-сигнала в 3 раза шире, чем при монофоническом вещании.

Совместимость стереофонической системы с монофонической обеспечивается благодаря тому, что при приеме на монофонический приемник надтональная часть выходит за полосу приема и не слышна, и принимается только монофонический сигнал, представляющий сумму сигналов левого и правого каналов (рис. 10.6).

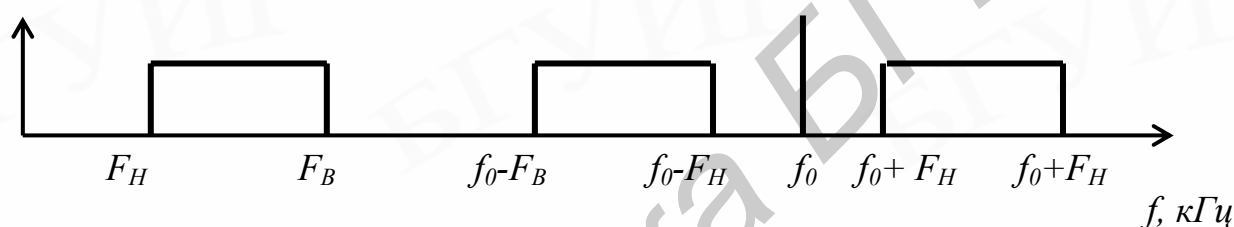


Рис. 10.6. Спектр комплексного стереофонического сигнала

Из рис. 10.6 мы видим, что в спектре ПМ-сигнала присутствует сигнал поднесущей частоты $31,25 \text{ кГц}$, т.е. передатчик будет работать неэффективно, так как будет передавать сигнал, не несущий в себе никакой информации. Поэтому вводится частичное подавление поднесущей после модуляции. Образовавшийся сигнал после подавления поднесущей называется комплексным стереофоническим сигналом (КСС). Спектр его показан на рис. 10.7. В приемнике поднесущая восстанавливается, и КСС вновь превращается в ПМ-сигнал.

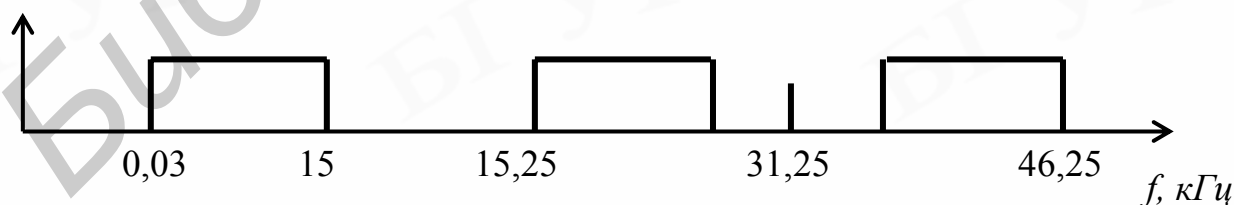


Рис. 10.7. Спектр комплексного стереофонического сигнала

При частотной модуляции ширину полосы частот ΔF , занимаемую ПМ-сигналом можно оценить выражением $\Delta F = 2(\Delta f + F_M)$, где Δf – девиация передатчика, F_M – верхняя частота модулирующего сигнала. При девиации $\Delta f = 50 \text{ кГц}$ и $F_M = 46,25 \text{ кГц}$ полоса частот радиосигнала превышает 190 кГц .

С 1 марта 1974 г. вошел в действие стандарт ГОСТ 18633-73 «Системы стереофонического вещания. Основные параметры».

10.2. Спектр сигнала с пилот-тоном

В зарубежном стандарте 87,5 – 108 МГц поднесущая, равная 38 кГц, подавляется полностью. При этом для обеспечения возможности правильного восстановления поднесущего колебания в стереодекодере приемника в состав сигнала вводится *пилот-тон* на половинной частоте поднесущей (19 кГц).

Можно организовать стереофоническую передачу с пилот-тоном, которая отличается от рассмотренной тем, что в ней полностью подавляется поднесущая, а для ее восстановления на приемном конце канала связи передается специальный пилот-тон на частоте, равной половине частоты поднесущей. В приемнике пилот-тон выделяется фильтром, его частота удваивается, и колебание с частотой поднесущей вводится в КСС.

Чтобы пилот-тон по частоте попал между тональной и надтональной частями КСС, значение поднесущей частоты выбирается равным 38 кГц, т.е. частота пилот-тона выбирается равной 19 кГц ± 2 Гц. Верхняя частота сигнала, модулирующего передатчик, устанавливается равной 53 кГц, т.е. выше, чем в системе с полярной модуляцией. Ширина спектра излучаемого передатчиком радиосигнала $\Delta F = 2 \cdot (50 + 53) = 206$ кГц. Спектр КСС системы с пилот-тоном имеет вид, приведенный на рис. 10.8.

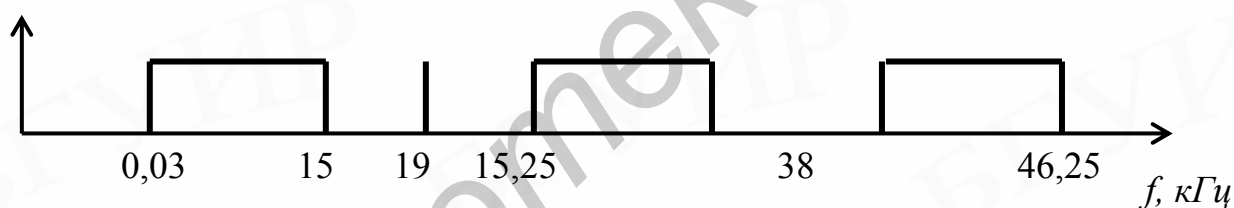


Рис. 10.8. Спектр комплексного стереофонического сигнала с пилот-тоном

Для передачи пилот-тона надо оставить свободным участок в спектре модулирующих частот между тональной и надтональной частями комплексного стереофонического сигнала. Поэтому величина поднесущей выбрана более высокой и равна 38 кГц. Поднесущая подавляется не менее чем на 40 дБ. Качество стереофонического вещания зависит от стереодекодера передатчика. Современные стереодекодеры передатчиков имеют каналные фильтры с полосой пропускания 16 кГц для сведения к минимуму взаимовлияния каналов. В результате разделение каналов в полосе 20...15000 Гц превышает 60 дБ, отношение сигнал/шум – не хуже 85 дБ, нелинейные искажения менее 0,3 %, неравномерность АЧХ составляет $\pm 0,15$ дБ в полосе 20 Гц...15 кГц.

Система с полярной модуляцией практически не имеет распространения в мире, в то время как система с пилот-тоном широко используется повсеместно. Элементная база для этой системы разнообразна и выпускается многими фирмами.

11. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

Прохождение сигнала через линейную цепь является широко распространенным преобразованием сигнала и часто сопряжено с изменением его формы, что эквивалентно потерям информации о сообщении, содержащемся в сигнале, в связи с ограниченностью полосы пропускания цепей, через которые сигнал должен проходить в реальных устройствах. Для оценки условий приемлемого качества прохождения сигнала и величины искажений, получающихся при прохождении сигнала через линейные цепи, в настоящее время наибольшее распространение получили четыре способа, рассмотренные ниже.

Эти способы помогут оценить прохождение сигнала через различные простейшие линейные цепи, линейный усилитель с резистивной и резонансной нагрузкой. Кроме того, рассмотренные методы позволят оценить условия прохождения модулированных сигналов через апериодические и резонансные цепи.

11.1. Характеристики линейной цепи

Два вида характеристик определяют работу линейных цепей – временные и частотные. Основой временного исследования линейных цепей являются преобразования Лапласа, частотного – преобразования Фурье. При этом с помощью преобразований Лапласа определяется передаточная функция цепи $K(p)$, представляющая собой отношение изображений выходного и входного сигналов и позволяющая найти временные характеристики цепи. С помощью преобразований Фурье можно определить коэффициент передачи цепи $K(i\omega)$, представляющий собой отношение спектральных плотностей выходного и входного сигналов. Поскольку преобразование Фурье – это частный случай преобразования Лапласа, то между $K(p)$ и $K(i\omega)$ существует прямая связь, позволяющая перейти от временных характеристик к частотным и обратно.

11.1.1. Переходная характеристика

Свойства линейной цепи можно описать линейным дифференциальным уравнением

$$\sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \quad (11.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – входной и выходной сигналы соответственно. В соответствии с преобразованием Лапласа

$$x(p) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (11.2)$$

где $x(p)$ – изображение оригинала $x(t)$, причем $x(t) = 0$ при $t < 0$.

Уравнение (1) можно представить в операторной форме

$$y(p) \sum_{i=0}^m b_i p^i = x(p) \sum_{k=0}^n a_k p^k, \quad (11.3)$$

откуда получаем для передаточной функции цепи

$$K(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}.$$

Переходная характеристика – это отклик линейной цепи на входной испытательный сигнал, представляющий собой единичный скачок $I(t)$. Найти переходную характеристику линейной цепи можно по изображению выходного сигнала $y(p) = x(p)K(p)$. Так как изображение единичной функции $x(p) = 1$, то переходная характеристика представляет собой оригинал передаточной функции, который можно найти по правилам операционного исчисления.

11.1.2. Комплексный коэффициент передачи

Комплексный коэффициент передачи – это отношение спектральных плотностей выходного и входного сигналов

$$K(i\omega) = S_{\text{вых}}(\omega)/S_{\text{вх}}(\omega) = y(t)/x(t). \quad (11.4)$$

Если $x(t)$ – гармонический испытательный сигнал, то $K(i\omega)$ представляет отношение комплексных амплитуд выходного и входного сигналов. Очевидно

$$K(i\omega) = |K(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}. \quad (11.5)$$

Тогда модуль комплексного коэффициента передачи называется амплитудно-частотной характеристикой цепи, а его аргумент – фазочастотной характеристикой цепи.

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) цепи – это зависимость модуля комплексного коэффициента передачи от частоты испытательного гармонического сигнала.

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) цепи – это частотная зависимость разности фаз между входным и выходным испытательными гармоническими сигналами.

11.1.3. Импульсная характеристика

Импульсная характеристика – это отклик линейной цепи на входное воздействие в виде испытательного импульса в виде дельта-функции $\delta(t)$, спектральная плотность которого $S_{\text{вх}}(i\omega) = 1$ и потому согласно (8.4)

$$S_{\text{вых}}(i\omega) = K(i\omega).$$

Импульсная характеристика согласно прямому преобразованию Фурье

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (11.6)$$

Если входной и выходной сигналы имеют одинаковую размерность, то импульсная характеристика, как и δ -функция времени имеет размерность частоты.

11.2. Методы анализа линейных цепей

В настоящее время наиболее полно разработано четыре метода исследования прохождения сигналов через линейные цепи: спектральный, операторный, метод на основе интеграла Дюамеля и классический (метод, основанный на решении дифференциальных уравнений цепи).

11.2.1. Спектральный метод

Порядок проведения анализа прохождения сигналов через линейную цепь спектральным методом состоит в следующем:

- по известной временной функции $s_{вх}(t)$, описывающей изменения сигнала во времени на входе линейной цепи, определим его спектральную плотность $S_{вх}(\omega)$;
- полагая известным комплексный коэффициент передачи линейной цепи $K(i\omega)$, представляющий собой отношение комплексной амплитуды выходного напряжения к комплексной амплитуде входного как функцию частоты соответствующих гармонических составляющих, составим аналитическое выражение для спектральной плотности выходного сигнала $S_{вых}(\omega) = K(i\omega) S_{вх}(\omega)$;
- по известной спектральной плотности $S_{вых}(\omega)$, выполнив операцию обратного преобразования Фурье над $S_{вых}(\omega)$, получим временную функцию $s_{вых}(t)$, описывающую поведение выходного сигнала во времени.

Выполнив эти операции, мы получаем исчерпывающую информацию о прохождении сигнала через линейную цепь с известным комплексным коэффициентом передачи, т.е. мы можем построить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики комплексного коэффициента передачи линейной цепи, входного и выходного сигналов, спектральных плотностей входного и выходного сигналов. Используя графические системы пакета, для всех этих зависимостей можно получить графические изображения всех этих зависимостей.

Этот метод анализа применим к цепям и сигналам, для которых выполняются условия Дирихле для разрывных функций и их абсолютной интегрируемости.

Анализ прохождения непериодического сигнала через линейную цепь

Для задания временной функции, описывающей сигнал, поступающий на вход линейной цепи, используем встроенный модуль, содержащий основные элементы входного языка системы Mathcad, такие, как if, otherwise, add line и другие. Опишем это входное воздействие средствами входного языка системы Mathcad. График входного сигнала можно построить с помощью графического модуля, входящего в систему Mathcad.

Комплексный коэффициент передачи линейной цепи запишем в виде

$$K(i\omega) = |K(i\omega)|e^{i\varphi(\omega)},$$

где $|K(i\omega)|$, $\varphi(\omega)$ – соответственно амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики разделительной цепи, а ω – угловая частота. С помощью графического модуля системы Mathcad можно построить графики $|K(i\omega)|$ и $\varphi(\omega)$.

Проведем расчет спектра входного сигнала, используя встроенную функцию $fft(s)$. Имеем

$$c := fft(s_{вх}).$$

Поскольку результат выполнения этой функции представляет собой набор комплексных чисел вида

$$c := \text{Re}(c) - \text{Im}(c)i,$$

то для построения графических зависимостей АЧХ и ФЧХ входного сигнала запишем их аналитические зависимости в виде

$$|c| := \sqrt{\text{Re}(c)^2 + \text{Im}(c)^2}$$

и

$$\varphi_{вх} := a \tan \frac{\text{Im}(c)}{\text{Re}(c)}.$$

Проведем расчет спектра выходного сигнала

$$S_{вых}(\omega) := K(i\omega)S_{вх}(\omega) = S_{вых}(\omega)|e^{\varphi_{вых}(\omega)}$$

и построим графики АЧХ и ФЧХ спектра выходного сигнала.

Теперь для завершения анализа прохождения, например, прямоугольного видеоимпульса через разделительную RC -цепь достаточно получить информацию о форме выходного сигнала. Для этого можно воспользоваться встроенной функцией $ifft(t)$ системы. Графики функции, описывающей форму выходного сигнала, сильно зависят от величины постоянной времени τ разделительной RC -цепи и показаны на рис. 11.1 и 11.2 для двух различных значений постоянной времени $\tau = RC$: малого и большого.

Мы видим отчетливое изменение формы выходного сигнала в зависимости от параметров линейной цепи, через которую этот сигнал проходит. Пользуясь изложенной методикой, легко перейти к построению любой формы входного сигнала и оценить форму и спектр сигнала, получающегося на выходе практически любой конфигурации линейной цепи.

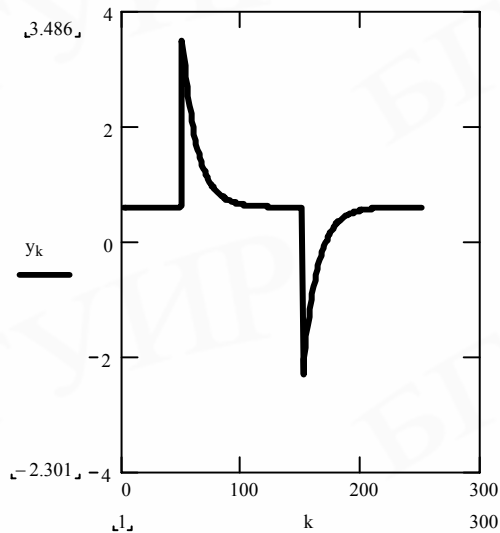


Рис.11.1. Форма выходного сигнала RC-цепи с малым значением постоянной времени

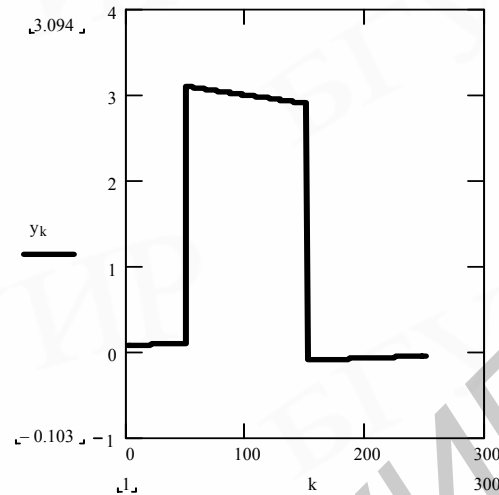


Рис.11.2. Форма выходного сигнала RC-цепи с большим значением постоянной времени

Анализ прохождения периодического сигнала через линейную цепь

Для проведения этого анализа достаточно описать поведение сигнала на одном периоде его существования. Для этого используем те же возможности пакета, которые мы применили для задания формы непериодического сигнала. Рассмотрим прохождение последовательности прямоугольных импульсов, следующих друг за другом с периодом T через ту же разделительную RC -цепь.

В используемом для проведения гармонического анализа пакете нет встроенных функций, аналогичных тем, которые мы применяли для анализа прохождения непериодического сигнала через линейную цепь. Поэтому нужно обратиться к модулю программирования, входящему в состав системы Mathcad, и составить программу (рис. 11.3) для вычисления спектра входного сигнала.

$$\begin{array}{l}
 \text{FC}(f, N, L) := \mathbf{R}^{(0)} \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \int_{-L}^L f(x) dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \text{for } n \in 1..N \\
 \mathbf{R}^{(n)} \leftarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx \\ \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^L f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx \\ n \end{pmatrix} \\
 \mathbf{R}^T
 \end{array}$$

res := FC(f, N, L)

A := res ⁽⁰⁾

B := res ⁽¹⁾

C := res ⁽²⁾

Рис. 11.3. Программный модуль вычисления коэффициентов ряда Фурье

Мы видим, что спектр входного сигнала, приведенный на рис. 11.4, является линейчатый, хотя огибающая спектра этого сигнала совпадает с огибающей неперiodического сигнала. Это обстоятельство дает возможность оценивать техническую ширину спектра как периодических, так и неперiodических сигналов исходя из одних и тех же предпосылок. При этом очевидно, что спектр одиночного сигнала является сплошным, а спектр периодического сигнала является дискретным, причем его частотные составляющие находятся на расстояниях друг от друга по шкале частот, определяемых периодом следования периодического сигнала.

Для того чтобы получить спектр выходного сигнала, достаточно перемножить выражения, определяющие спектр входного сигнала и комплексный коэффициент передачи разделительной RC-цепи. Для получения формы выходного сигнала нужно сложить гармонические составляющие спектра выходного сигнала, т.е. нужно выполнить операцию, определяемую выражением

$$s_{\text{вых}}(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t).$$

График выходного сигнала приведен на рис. 11.5.

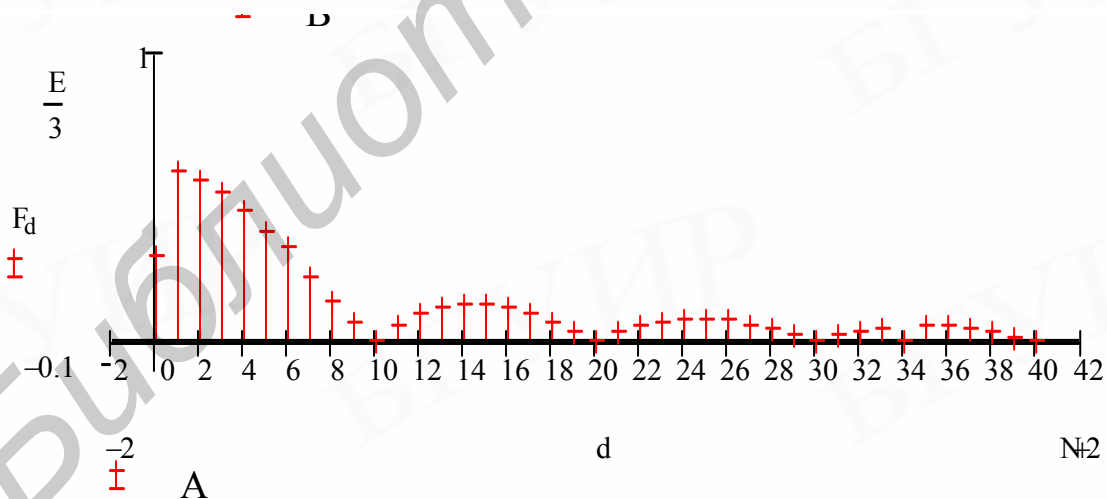


Рис. 11.4. График АЧХ спектра последовательности прямоугольных импульсов с отношением периода следования импульсов к его длительности, равным десяти

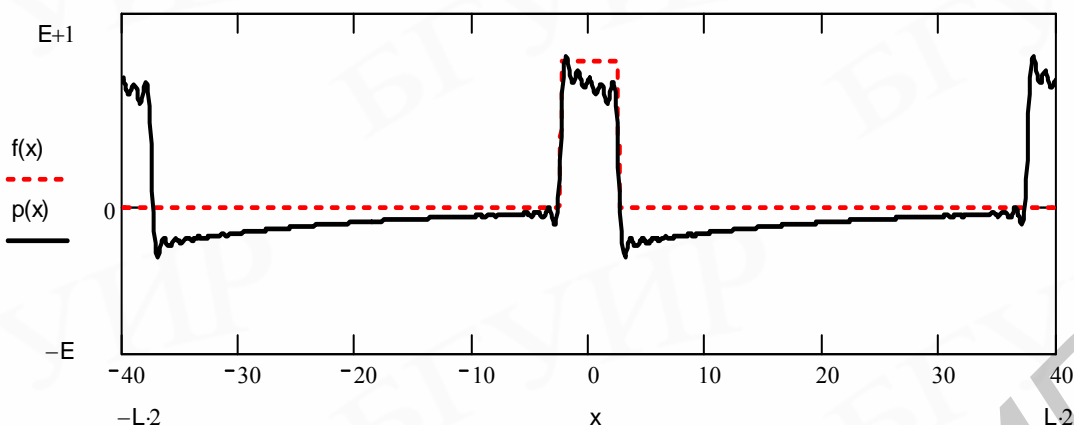


Рис. 11.5. Форма периодического сигнала на выходе линейной цепи

11.2.2. Операторный метод

Этот метод снимает ограничение спектрального метода в отношении абсолютной интегрируемости функций, характеризующих цепи и сигналы.

По заданному входному сигналу $x(t)$ находится его изображение $x(p)$. При известной передаточной функции $K(p)$ определяется изображение выходного сигнала $y(p) = K(p) x(p)$. А затем в соответствии с правилами операционного исчисления находится оригинал:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x(p) K(p) e^{pt} dt .$$

Недостатком метода является отсутствие физической наглядности. Тем не менее благодаря наличию обширных таблиц прямого и обратного преобразований Лапласа он находит достаточно широкое применение в практике расчета цепей.

Пример 11.1. Рассчитать форму импульса на выходе: а) интегрирующей, б) дифференцирующей RC-цепи с постоянной времени, равной длительности входного прямоугольного импульса единичной амплитуды.

Приведем листинг программы, с помощью которой проведено вычисление в среде Mathcad формы сигнала на выходах интегрирующей и дифференцирующей RC-цепи, показанные на рис.11.6-11.8. Здесь с помощью функции $f(t)$ задан входной сигнал как разность функций единичного скачка $1(t)$, находящихся на оси времени на расстоянии, равном длительности входного сигнала. В среде Mathcad эта функция обозначается как $\Phi(t)$.

$$f(t) := \Phi(t) - \Phi(t - 300) \quad t := 1, 1.5.. 1023 \quad \text{pulse}(t, a) := \Phi(t) - \Phi(t - a) \quad a := 300$$

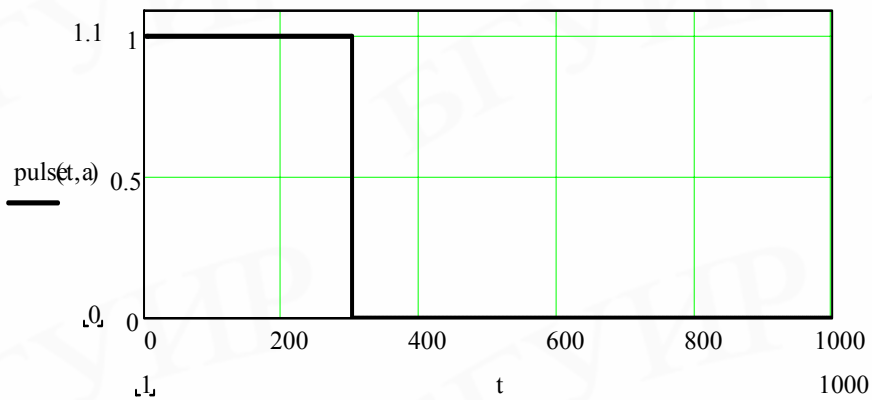


Рис. 11.6. Форма сигнала на входе интегрирующей или дифференцирующей цепи

Приведем листинги программ, по которым были проведены расчеты прохождения прямоугольных импульсов через интегрирующие и дифференцирующие RC-цепи с различными постоянными времени:

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \exp(-300 \cdot s) \quad \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \exp(-300 \cdot s) \right) \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{300}}$$

$$-300 \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t\right) + 300 + 300 \cdot \Phi(t - 300) \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t + 1\right) - 300 \cdot \Phi(t - 300)$$

$$g(t) := -300 \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t\right) + 300 + 300 \cdot \Phi(t - 300) \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t + 1\right) - 300 \cdot \Phi(t - 300)$$

Результаты расчета иллюстрируются с помощью графической системы пакета MathCAD на рис.11.7 и 11.8.

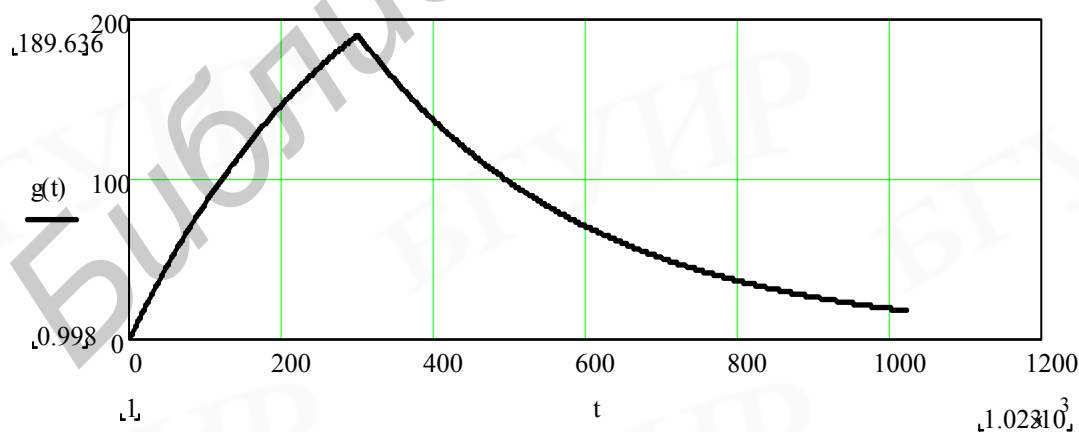


Рис. 11.7. Форма сигнала на выходе интегрирующей цепи

$$g1(t) := \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t\right) - \Phi(t - 300) \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t + 1\right)$$

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot \exp(-300 \cdot s)\right) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{s \cdot 300}} \quad \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t\right) - \Phi(t - 300) \cdot \exp\left(\frac{-1}{300} \cdot t + 1\right)$$

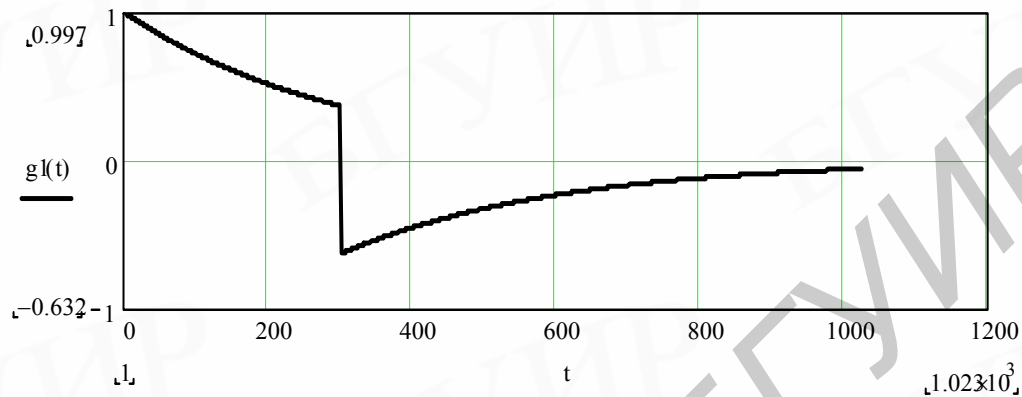


Рис. 11.8. Форма сигнала на выходе дифференцирующей цепи

11.2.3. Метод, основанный на вычислении интеграла Дюамеля

В основе этого метода лежит преобразование входного сигнала в виде суммы импульсов бесконечно малой длительности и определение свойств цепи с помощью импульсной характеристики. Воздействие на линейную цепь одного такого импульса позволяет определить импульсную характеристику, рассчитываемую по выражению (11.6). При сигнале, представляемом суммой импульсов, следует определить отклик системы не на один, а на сумму таких импульсов. Причем в каждый момент t следует просуммировать действие всех импульсов, действующих на цепь до данного момента, т.е. в промежутке от 0 до t , и учитывать, что каждый следующий импульс сдвинут относительно предыдущего на бесконечно малое время Δt . Заменив операцию суммирования бесконечно малых величин интегрированием, получим выражение, позволяющее рассчитать отклик системы на сумму импульсов и называемое интегралом Дюамеля:

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) h(t - \tau) d\tau,$$

где $h(t - \tau)$ – импульсная характеристика, определяемая выражением (11.6), а $x(\tau)$ – входной сигнал.

11.2.4. Классический метод

Линейную систему можно описать дифференциальным уравнением (11.1). Пакет Mathcad позволяет решить данное уравнение одним из численных

методов при входном сигнале любой формы. Покажем на конкретном примере, как это делается.

Пример 11.2. На вход цепи, схема которой показана на рис. 11.9, подаются радиоимпульсы прямоугольной формы с частотой внутриимпульсного заполнения, изменяющейся по линейному закону $u_{\text{вх}} = U_m \cos(\omega_0 t + 0,5\beta t^2)$, где β – скорость изменения частоты. Рассчитать форму выходного сигнала.

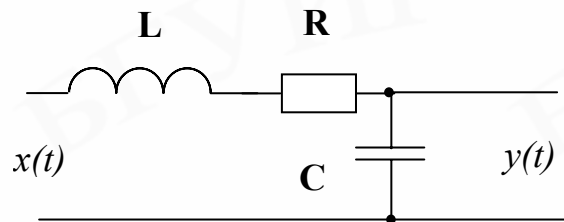


Рис. 11.9. Избирательная линейная цепь

Составим дифференциальное уравнение, описывающее процессы в анализируемой схеме. Для мгновенных значений напряжений имеем:

$$u_{\text{вх}} = u_L + u_R + u_C,$$

$$u_{\text{вх}} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C.$$

Введем обозначения $x(t) = u_{\text{вх}}$, $y(t) = u_{\text{вых}} = u_C$. Тогда получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_0 x,$$

где $a_0 = b_0 = 1/LC$, $b_1 = R/L$.

Результат расчета представлен на рис. 11.10 для сигнала с базой, равной 50.

Читателю предоставляется возможность оценить изменения в АЧХ избирательной цепи при быстрой и медленной перестройке избирательной цепи, чтобы оценить влияние скорости перестройки частоты внутриимпульсного заполнения на уровень выходного сигнала. Пакет Mathcad позволяет провести всестороннее исследование прохождения и более сложного сигнала через избирательные цепи и более высокого порядка.

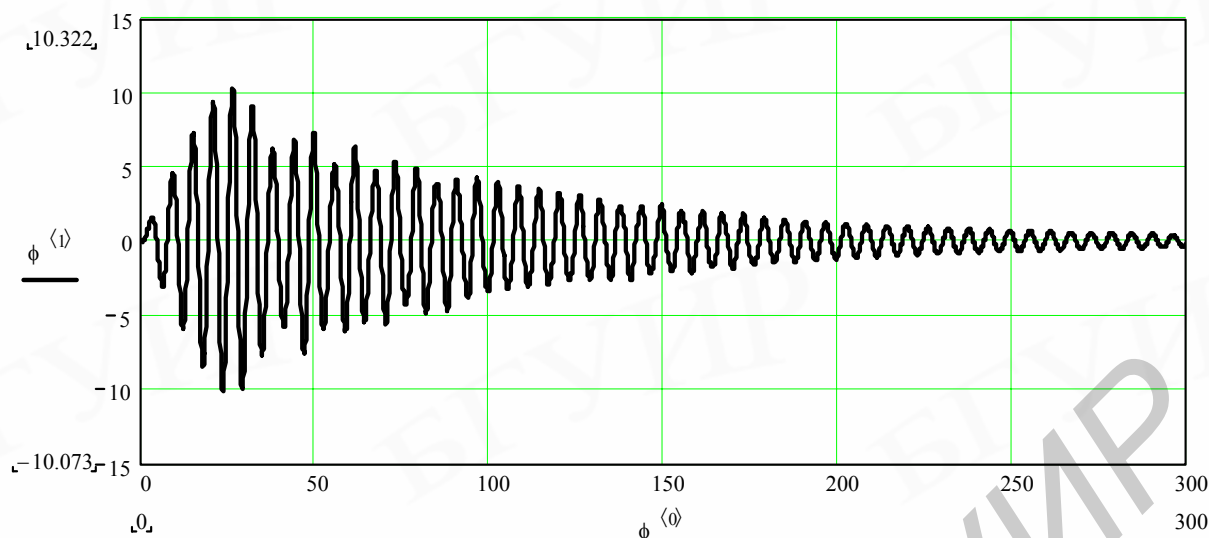


Рис.11.10. Выходной сигнал избирательной цепи

12. СХЕМОТЕХНИКА ЭЛЕКТРОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ

12.1. Классификация, основные характеристические параметры электронных усилителей

Усилителем электрических сигналов называется устройство, позволяющее при наличии на его входе сигнала с некоторым уровнем мощности получить в нагрузке усилителя тот же сигнал, но с большим уровнем мощности.

Увеличение мощности выходного сигнала усилителя обеспечивается источником питания, из которого черпается энергия для создания увеличенной мощности выходного сигнала. Энергия источника питания преобразуется в энергию полезного сигнала при помощи активных элементов (ламп, транзисторов и т.п.). Для связи активных элементов с источником входного сигнала и нагрузкой усилителя, а также для придания усилителю нужных частотных свойств применяют пассивные элементы электрических цепей: резисторы, индуктивности, емкости.

Для усиливаемых сигналов усилитель, имея два входных и два выходных зажима, представляет собой электрический четырехполюсник.

12.1.1. Классификация усилителей

Усилители, предназначенные для совершенно различных целей, могут обладать идентичными свойствами. При проведении классификации будем учитывать:

- полосу и абсолютные значения усиливаемых частот;
- характер входного сигнала;
- назначение усилителя;
- вид используемых активных элементов.

По первому признаку усилители можно разделить на усилители постоянного тока (УПТ), усилители низкой частоты (УНЧ), усилители высокой частоты (УВЧ). УПТ способны усиливать сигналы с частотами от $f_H = 0$ до некоторой, обычно не очень высокой, частоты f_B (рис. 12.1, а). УНЧ эффективно усиливают переменные составляющие сигнала в диапазоне от низкой частоты $f_H > 0$ до некоторой высокой частоты f_B (рис. 12.1, б). Обычно эти усилители имеют большое отношение $f_B/f_H = 10^2-10^6$. УНЧ с $f_B > 100$ кГц называют широкополосными. УВЧ усиливают сигналы со спектром, сосредоточенным в относительно узкой полосе частот вблизи средней частоты f_0 (рис. 12.1, в). Для УВЧ характерно выполнение условий $f_B/f_H \approx 1$, $f_B - f_H \ll f_0$. Это избирательные (селективные) усилители.

По второму признаку усилители можно разделить на усилители непрерывных сигналов и усилители импульсных сигналов (импульсные усилители). К первой (второй) группе относятся устройства для усиления сигналов, изменяющихся настолько медленно (быстро), что с процессом их установления в усилителе можно (нельзя) не считаться.

По третьему признаку усилители можно разделить на усилители напряжения, усилители тока и усилители мощности в зависимости от основной задачи воспроизведения сигнала на более высоком уровне напряжения, тока или мощности.

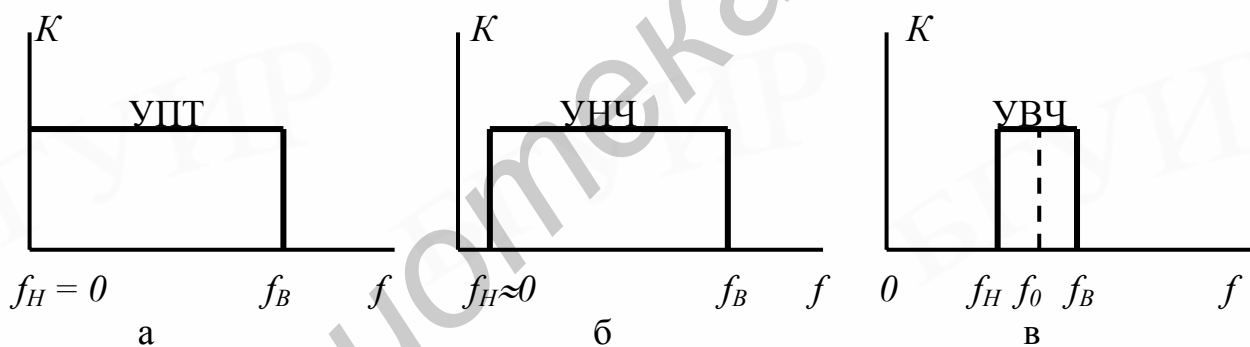


Рис. 12.1. Полосы рабочих частот усилителей УПТ (а), УНЧ (б), УВЧ (в)

Во всех случаях происходит усиление мощности сигнала, но обычно под усилителями мощности понимают выходные каскады усилителя.

Четвертый признак характеризует усилитель по виду применённых в нем активных усилительных элементов, и в соответствии с этим усилители делятся на ламповые, транзисторные, магнитные, диэлектрические и т.д.

12.1.2. Активные элементы усилителей

В практических схемах усилителей наиболее широко используются ламповые и транзисторные усилительные элементы. Благодаря высокому входному сопротивлению участка сетка-катод лампа управляется напряжением источника входного сигнала, практически не забирая от него тока, а следовательно, и мощности. Поэтому ламповый активный элемент позволяет

получить очень большое усиление мощности сигнала. Помимо этого применение ламп обеспечивает усиление сигналов с широким спектром и хорошую линейность таких усилителей.

Недостатки ламповых усилителей: ограниченный срок службы, низкий КПД по анодной цепи, чувствительность к вибрациям, наличие цепи накала. Во многих случаях эти недостатки не играют существенной роли, поэтому усилители на электронных лампах все еще находят применение.

Транзисторы выгодно отличаются от ламп малыми размерами, превосходными частотными свойствами, хорошей виброустойчивостью, практически неограниченным сроком службы.

Недостатки транзисторных усилителей: сравнительно малое входное сопротивление, температурная нестабильность параметров. Однако эти недостатки успешно преодолеваются промышленностью, поэтому транзисторы во все возрастающем количестве замещают лампы.

Приступая к расчету усилительного каскада, сначала необходимо ознакомиться с краткими теоретическими сведениями, а затем рассмотреть типовой расчет усилительного каскада, приведенный в следующем разделе настоящего учебного пособия.

12.1.3. Основные характеристические параметры усилителей

Усиление сигнала обычно сопровождается некоторым изменением его формы. Необходимые сведения об усилителе должны включать не только количественную оценку самого эффекта усиления, но и характеристики основных свойств усилителя и величины искажений усиливаемых колебаний. Сумму таких сведений об усилителе называют его характеристическими параметрами или показателями. Рассмотрим важнейшие из них.

Комплексный коэффициент усиления

Комплексный коэффициент усиления (коэффициент передачи) определяется отношением комплексных амплитуд напряжений на выходе и входе усилителя:

$$K(i\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}}{\dot{U}_{\text{вх}}} = |K(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}. \quad (12.1)$$

Модуль комплексного коэффициента передачи $K = |K(i\omega)|$ называется коэффициентом усиления, а его зависимость от частоты усиливаемого сигнала – амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) усилителя. Аргумент $\varphi(\omega)$ представляет собой фазочастотную характеристику (ФЧХ) усилителя и характеризует частотную зависимость фазового сдвига выходного гармонического колебания относительно входного.

Коэффициент усиления измеряется в логарифмических единицах – децибелах:

$$K(\text{дБ}) = 20 \lg K. \quad (12.2)$$

Децибелы применяют не только для сравнения двух величин. Они удобны и для оценок конкретных значений мощностей. При этом за условный нулевой уровень электрического сигнала принята мощность $P = 1 \text{ мВт}$, выделяемая на активном сопротивлении $R = 600 \text{ Ом}$.

Широкое применение децибелов, особенно в акустике, объясняется свойством органов слуха (а также зрения) реагировать на раздражение в логарифмической зависимости. Например, если УНЧ развивает на выходе 10 Вт , то для того, чтобы ухо ощутило вдвое большую громкость, понадобится почти десятикратное увеличение выходной мощности усилителя.

Звуковое давление представляет собой разность между мгновенным значением давления $p_{ам}$ в точке среды при прохождении через нее звуковой волны и статическим (атмосферным) давлением $p_{ас}$ в той же точке, т.е. $p = p_{ас} - p_{ам}$. Звуковое давление – величина скалярная. Единица измерения в системе СИ – ньютон на квадратный метр: $1 \text{ Н/м}^2 = 1 \text{ Па}$ (паскаль). Реальные источники звука создают даже при самых громких звуках звуковые давления в десятки тысяч раз меньше нормального атмосферного давления.

Интенсивность звука – количество энергии, проходящей через единицу площади в секунду, перпендикулярно к направлению распространения волны. Измеряется в ваттах на м^2 (Вт/м^2) и является векторной величиной.

Наименьшее значение раздражающей силы чистого тона, которое вызывает ощущение звука, называется *порогом слышимости*.

Громкость звучания согласно закону Вебера-Фехнера пропорциональна логарифму отношения звуковых давлений или интенсивностей звука.

Абсолютный акустический уровень N_a определяется относительно $p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Па}$, $J_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$, соответствующих порогу слышимости на частоте 1000 Гц . Порог болевого ощущения на 1000 Гц соответствует звуковому давлению 20 Па .

1 дБ улавливается ухом как едва заметное изменение громкости.

Линейные искажения

Линейные искажения возникают в двух случаях:

- 1) когда отдельные гармонические составляющие входного сигнала усиливаются неодинаково;
- 2) когда фазовые сдвиги, которые приобретают гармонические составляющие сигнала, пройдя через усилитель, изменяют их взаимный сдвиг во времени.

Чтобы усилитель в полосе рабочих частот не вносил линейных искажений, его АЧХ должна быть прямоугольной, а ФЧХ – линейной (рис. 12.2, а, б).

При наличии линейных искажений форма сигнала на выходе усилителя может отличаться от его формы на входе, но при этом новых частот в спектре выходного сигнала не возникает.

На рис. 12.2 цифрой 1 отмечены характеристики усилителя, не вносящего линейных искажений при усилении сигнала, а цифрой 2 – характеристики усилителя, вносящего искажения вследствие действия этих обоих факторов.

Чаще всего фазовые искажения не нормируются и линейные искажения оценивают коэффициентами $M_B=K_0/K_B$ и $M_H=K_0/K_H$, где K_H , K_B и K_0 – коэффициенты усиления на нижней, верхней и средней частотах соответственно. Обычно $M_B=0,9\dots 1,1$ и $M_H=0,9\dots 1,1$.

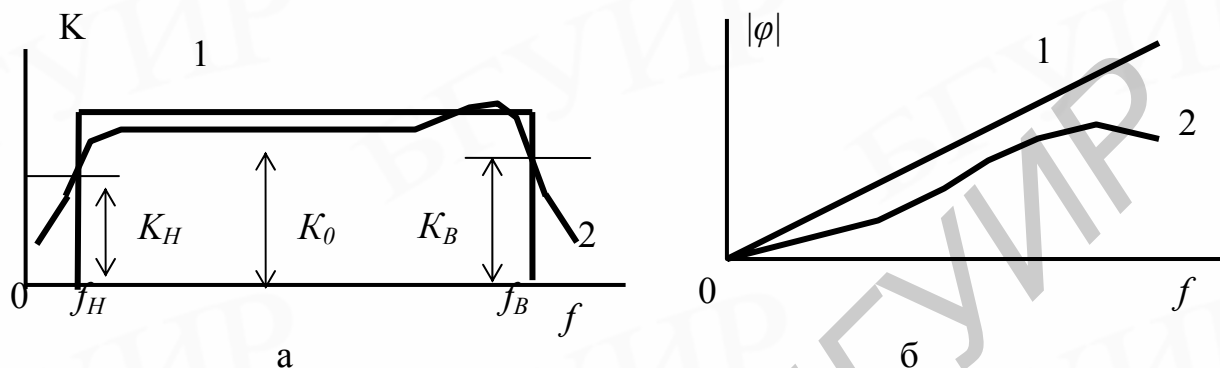


Рис. 12.2. Идеальные (1) и реальные (2) АЧХ (а) и ФЧХ (б) усилителя

Однако при использовании усилителей для обработки телевизионных сигналов во избежание неправильной передачи яркости и цвета изображения нужно учитывать линейные искажения, возникающие из-за влияния нелинейности ФЧХ усилителей.

Нелинейные искажения

Причиной нелинейных искажений является прохождение сигнала через элементы, имеющие нелинейную вольт-амперную характеристику, например, лампу, транзистор, трансформатор, в результате чего искажается форма колебаний и изменяется их спектральный состав. Расчет величины нелинейных искажений сводится к определению амплитуды основной I_1 и высших гармонических составляющих I_2, I_3, \dots и оценивается коэффициентом гармоник

$$K_G = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + I_4^2 + \dots}}{I_1} \quad (12.3)$$

Нормы на допустимые величины нелинейных искажений определяются назначением усилителя и имеют порядок 0,5–3,0 %. Для многокаскадного усилителя

$$K_G \leq K_{G1} + K_{G2} + K_{G3} + \dots \quad (12.4)$$

Коэффициент полезного действия усилителя

КПД усилителя определяется отношением

$$\eta = P_H / P_0, \quad (12.5)$$

где P_H – мощность, развиваемая в нагрузке усилителя; P_0 – мощность, потребляемая от источника питания.

КПД используемых в различных устройствах усилителей составляет величину от единиц до нескольких десятков процентов.

12.2. Выбор и стабилизация статического режима транзисторного усилителя

Выбор исходного режима транзистора в усилительном каскаде осуществляется с помощью характеристик по постоянным составляющим соответствующих токов и напряжений.

12.2.1. Статические характеристики транзистора

Число возможных представлений зависимостей между токами и напряжениями в транзисторе велико. Однако для расчета транзисторного усилителя достаточно иметь два основных семейства статических характеристик транзистора: семейство выходных статических характеристик $I_{ВЫХ} = f(U_{ВЫХ})$ для различных значений входного тока и семейство входных статических характеристик $I_{ВХ} = f(U_{ВХ})$ для различных напряжений на выходном электроде. Выходные и входные статические характеристики транзистора различны для различных схем включения, поэтому для трех схем включения транзистора существуют три семейства выходных и три семейства входных статических характеристик.

При расчете каскада с транзистором, включенным по схеме с общим эмиттером, используют выходные и входные характеристики для включения транзистора по схеме с общим эмиттером, т.е. зависимости $I_K = f(U_K)$ при $I_B = const$ (рис.12.3, а) и $I_B = f(U_B)$ при $U_K = const$ (рис. 12.3, б).

По выходным характеристикам можно непосредственно оценить выходное сопротивление транзистора в рабочей точке $R_{ВЫХ} = \Delta U_K / \Delta I_K$, коэффициент усиления по току $\beta = \Delta I_K / \Delta I_B$ при $R_H = 0$ и $U_K = const$.

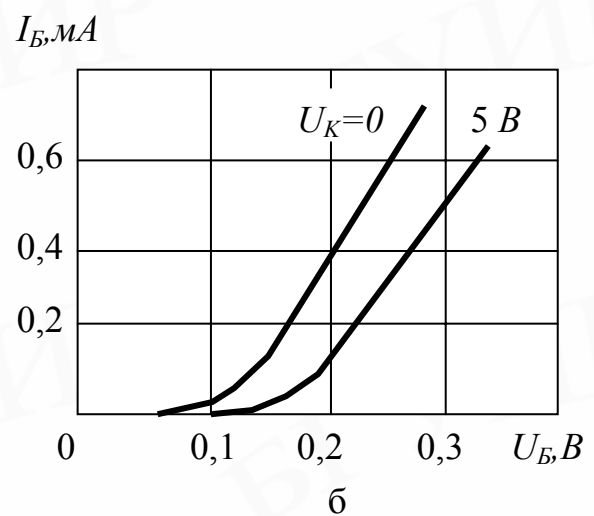
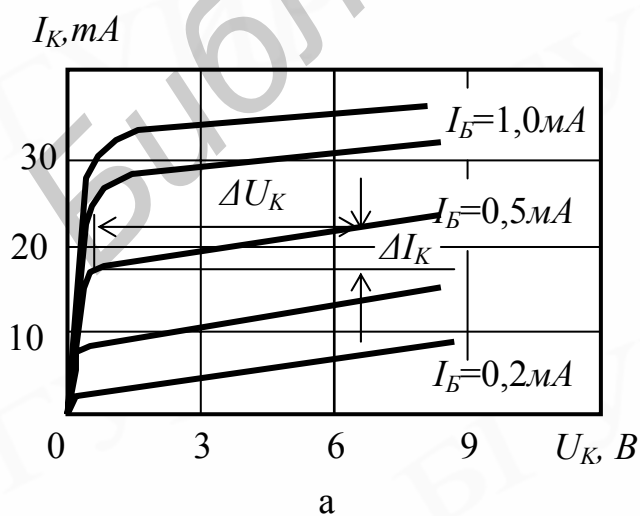


Рис. 12.3. Выходные (а) и входные (б) статические характеристики транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером

По входным характеристикам аналогично определяется входное сопротивление $R_{BX} = \Delta U_B / \Delta I_B$ транзистора току сигнала при $U_K = const$, как тангенс угла наклона касательной к характеристике, проведенной через рабочую точку.

12.2.2. Динамические характеристики транзисторного каскада

При расчете транзисторных каскадов, кроме статических, находят применение три типа динамических характеристик: выходные, входные, сквозные (проходные).

Выходная динамическая характеристика

Применительно к транзистору, включенному по схеме с общим эмиттером, выходной динамической характеристикой является зависимость коллекторного тока от тока базы при наличии сопротивления нагрузки в коллекторной цепи R_K и постоянства напряжения источника питания $E_K = const$. Выходную динамическую характеристику строят на семействе выходных статических характеристик транзистора. Так как она представляет собой прямую линию, её нередко называют нагрузочной прямой (рис. 12.4, а). При известных E_K и R_K целесообразно выбирать исходную рабочую точку в области значений коллекторного тока $I_K = E_K / 2R_K$ (вблизи точки *N* на рис. 12.4, а), так как в этом случае обеспечиваются минимальные нелинейные искажения. К этому же результату можно прийти, построив с помощью рис. 12.4, а динамическую характеристику $I_K = f(I_B)$ при заданных E_K и R_K и определив на ней середину линейного участка (рис. 12.4, б). По рис. 12.4 легко оценить наибольшие возможные значения входного и выходного токов, при которых усилитель будет обеспечивать заданные параметры усиления.

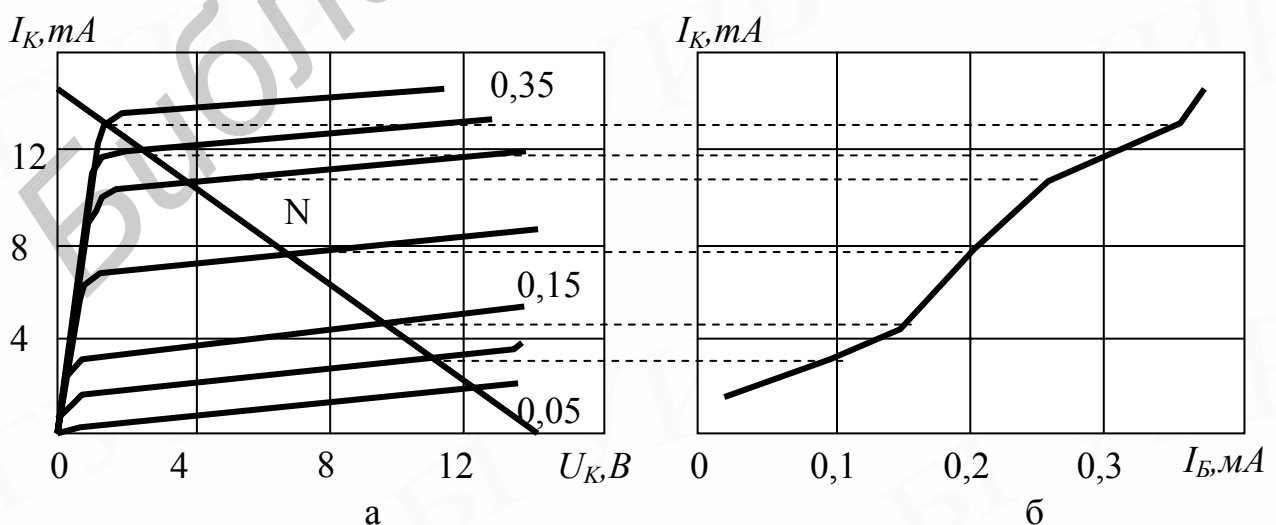


Рис. 12.4. Семейства выходных статических характеристик (а) и динамическая выходная характеристика (б)

Динамическая выходная характеристика используется для построения сквозной динамической характеристики.

Входная динамическая характеристика

Входная динамическая характеристика — это зависимость входного тока I_B от напряжения входного сигнала U_B при наличии сопротивления R_K в коллекторной цепи и $E_K = const$. Эту характеристику строят на семействе входных статических характеристик транзистора. Построение выполняют путем переноса точек пересечения нагрузочной прямой со статическими выходными характеристиками транзистора на семейство входных статических характеристик. По входной динамической характеристике каскада можно оценить амплитуды напряжения входного сигнала и переменной составляющей входного тока, по которым можно рассчитать необходимую мощность входного сигнала. Входная динамическая характеристика используется для построения сквозной динамической характеристики усилительного каскада.

З а м е ч а н и е. Так как в справочных данных транзистора обычно даются статические входные характеристики только для напряжения на коллекторе 0 и 5 В, то в качестве входной динамической характеристики усилительного каскада используют входную статическую характеристику для напряжения на коллекторе 5 В, перенося на неё точки пересечения нагрузочной прямой со статическими выходными характеристиками транзистора.

Сквозная динамическая характеристика

Сквозная динамическая характеристика представляет собой зависимость коллекторного тока от ЭДС источника сигнала и используется для расчета коэффициента нелинейных искажений транзисторного каскада.

Для построения динамической сквозной характеристики вычисляют для точек пересечения нагрузочной прямой со статическими выходными характеристиками значения ЭДС источника сигнала U_C входной цепи по выражению

$$U_C = U_B + I_B R_C, \quad (12.6)$$

где R_C — внутреннее сопротивление источника сигнала переменному току, равное выходному сопротивлению предыдущего каскада для переменного тока; U_B, I_B — входное напряжение и входной ток для взятых точек пересечения.

Оптимальное сопротивление источника входного сигнала выбирается в пределах $R_C = (2 \dots 5) R_{вх}$

12.2.3. Схемотехника питания цепей транзисторов

Питание всех цепей транзисторного усилителя обычно осуществляется от одного общего источника постоянного тока, к которому параллельно подключают питаемые цепи. Для установления необходимого режима на базу транзистора относительно эмиттера подают небольшое смещение, используя делитель напряжения или гасящее сопротивление.

Цепь смещения с фиксированным током

Простейшим способом подачи смещения в транзисторном каскаде (рис.12.5) является осуществление его через гасящее сопротивление $R1$, во много раз превышающее сопротивление между базой транзистора и общим проводом.

Ток смещения в этом случае определяется величиной $R1$, напряжением источника питания и не меняется при изменении температуры транзистора, его старении и замене. Поэтому данный способ подачи смещения на базу транзистора называют смещением с фиксированным током базы. Значение $R1$ в этом случае рассчитывают по формуле

$$R1 = \frac{E_K - U_B}{I_B} = \frac{\alpha(E_K - U_B)}{I_K(1 - \alpha) - I_{K0}}. \quad (12.7)$$

Здесь величина

$$\alpha = \frac{I_K - I_{K0}}{I_{\mathcal{E}}}$$

называется статическим (интегральным) коэффициентом передачи эмиттерного тока и составляет 0,95–0,99; ток I_{K0} представляет собой обратный ток коллектора транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером, а $I_{\mathcal{E}} = I_K + I_B$.

Действительно, источником управляющего напряжения в этой схеме является общая батарея E_K . Величина управляющего тока I_B и соответственно

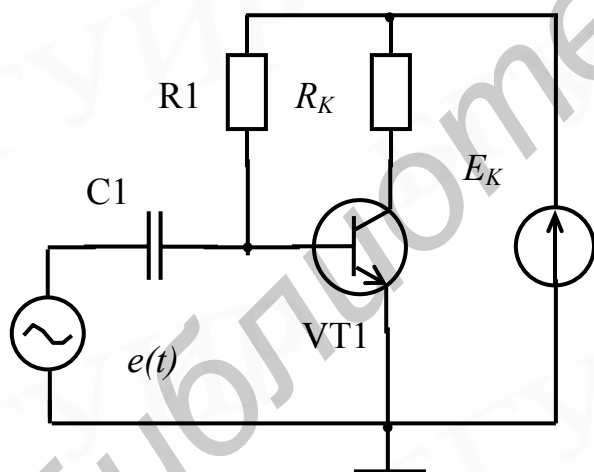


Рис. 12.5. Смещение фиксированным током

полный ток коллектора в ней определяются резистором $R1$. В соответствии с основным уравнением транзистора любой ток, протекающий по цепи база–эмиттер, вызывает появление в β раз большего по величине тока в цепи коллектора, т.е.

$$I_K' = \beta I_B, \quad (12.8)$$

где $\beta = \alpha / (1 - \alpha)$ – коэффициент усиления транзистора по току в схеме с общим эмиттером; I_B – ток в цепи база–эмиттер.

Кроме управляющего тока I_B , в цепи база–эмиттер протекает ток I_{K0} (обратный ток коллектора). Это значит,

$$I_K'' = \beta I_{K0} + I_{K0} = (\beta + 1)I_{K0}. \quad (12.9)$$

Поэтому в рассматриваемой схеме полное значение коллекторного тока определяется суммой

$$I_K = I_K' + I_K'' = \beta I_B + (\beta + 1)I_{K0}. \quad (12.10)$$

Теперь легко определить ток, протекающий по резистору $R1$,

$$I_B = \frac{I_K - (\beta + 1)I_{K0}}{\beta} = \frac{I_K(1 - \alpha) - I_{K0}}{\alpha}, \quad (12.11)$$

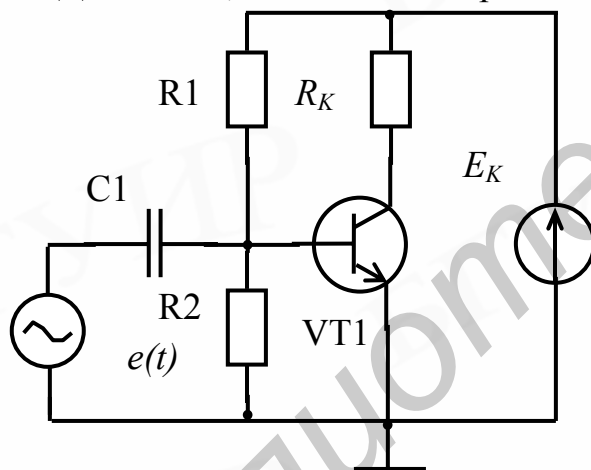
откуда следует соотношение (12.7).

Однако вследствие сильного изменения параметров транзисторов в зависимости от температуры и большого разброса их статического коэффициента усиления тока смещение фиксированным током базы непригодно для серийной и массовой аппаратуры, а также для приборов, работающих в широком интервале температур.

Цепь смещения с фиксированным напряжением

Фиксированное смещение на транзистор можно подать от общего источника через делитель из резисторов $R1$ и $R2$. Сопротивление делителя желательно иметь меньше сопротивления постоянному току участка база—общий провод. При этом напряжение смещения остается практически неизменным при изменении температуры, старении и замене транзистора. Поэтому такой способ подачи смещения называют смещением с фиксированным напряжением.

Для схемы, показанной на рис. 12.6, резисторы рассчитывают по формулам



$$R1 = \frac{E_K - U_B}{I_D + I_{B.ср}} \quad R2 = \frac{U_B}{I_D}, \quad (12.12)$$

где $I_{B.ср}$ — среднее значение тока базы за период при максимальном расчетном сигнале; I_D — ток делителя через резистор $R2$.

Обычно выбирают $I_D = (1 - 5)I_{B.ср}$ в зависимости от мощности и режима работы транзистора. Чем больше ток делителя, тем выше стабильность работы каскада, так как положение рабочей точки определяется именно током делителя. Однако очень

Рис. 12.6. Цепь смещения с фиксированным напряжением

большой ток делителя устанавливать нельзя, поскольку при подаче смещения фиксированным напряжением от источника питания расходуется дополнительно энергия в делителе $R1R2$, что делает этот способ неэкономичным. Чаще всего ток делителя I_D только в два раза превышает величину среднего тока базы $I_{B.ср}$.

Методы стабилизации положения рабочей точки

Выпускаемая заводами аппаратура должна сохранять гарантируемые свойства при установке в неё любых исправных экземпляров транзисторов рекомендованного типа и при изменении температуры окружающей среды в заданных пределах. Влияние температурных изменений усилительных

параметров (α , β , R_{BX}) на положение рабочей точки несущественно. Определяющим является изменение тока I_{K0} , который у германиевых транзисторов увеличивается вдвое на каждые 10°C , а у кремниевых - втрое (абсолютное значение I_{K0} у кремниевых транзисторов на 3 порядка ниже, чем у германиевых). Количественно нестабильность транзисторного каскада оценивается отношением

$$S = \Delta I_K / \Delta I_{K0}, \quad (12.13)$$

называемым коэффициентом нестабильности. Здесь ΔI_K и ΔI_{K0} - изменения тока коллектора и обратного тока соответственно. Для большинства практических схем $S = 3 - 6$.

Коллекторная стабилизация положения рабочей точки

Принцип действия коллекторной стабилизации рассмотрим на примере схемы, приведенной на рис. 12.7. К резистору R_I практически приложена разность напряжения источника питания E_K и падения напряжения на сопротивлении нагрузки R_K . Напряжение $U_{Б.Э}$, имеющееся между базой и эмиттером, ничтожно по сравнению с напряжением на R_I . Если при замене транзистора или от изменения температуры ток покоя выходной цепи стремится возрасти, падение напряжения на R_K увеличивается, напряжение на R_I уменьшается и ток смещения падает, что сильно снижает возрастание коллекторного тока. При стремлении тока покоя коллектора к уменьшению процесс стабилизации происходит обратным образом.

Коллекторная стабилизация проста и экономична, однако степень стабилизации в ней зависит от резисторов R_K и R_I , определяющих положение рабочей точки. Коллекторная стабилизация удовлетворительно действует лишь при большом падении напряжения на сопротивлении нагрузки (порядка $0,5 E_K$ и более), небольших изменениях коэффициента усиления тока транзисторов и малых изменениях I_{K0} . Изменение положения рабочей точки при коллекторной стабилизации намного меньше, чем в нестабилизированном каскаде, однако все же значительно, что может не обеспечить взаимозаменяемости транзисторов и затрудняет работу в широком интервале температур.

При включении транзистора с общим эмиттером (см. рис. 12.7) коллекторная стабилизация снижает усиление и входное сопротивление каскада, так как напряжение выходного каскада подается через R_I во входную цепь, что создает в каскаде отрицательную обратную связь по переменному току, величина которой зависит от величин R_K и R_I . Для устранения этого R_I можно разделить на две примерно равные части, между этими частями и общим проводом включают блокировочный конденсатор C достаточно большой емкости (рис. 12.8).

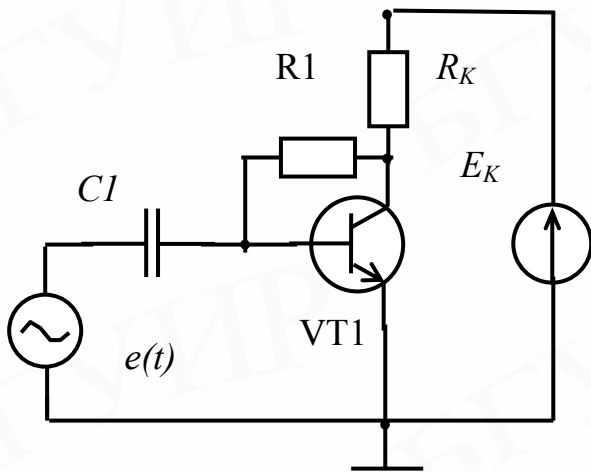


Рис. 12.7. Коллекторная стабилизация положения

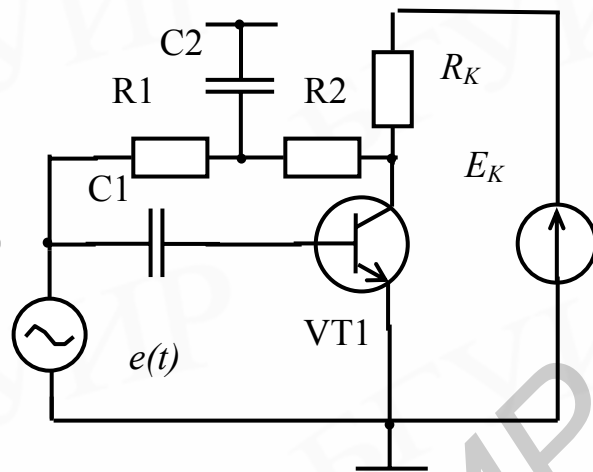


Рис. 12.8. Устранение обратной связи по переменному току в цепи коллекторной стабилизации положения рабочей точки

Эмиттерная стабилизация рабочей точки

Более высокую стабильность положения рабочей точки обеспечивает схема эмиттерной стабилизации, варианты которой для схемы с общим эмиттером приведены на рис 12.9. Частичная стабилизация рабочей точки по постоянному току здесь достигается уже тем, что смещение на базу подается от делителя напряжения R_{B1} и R_{B2} или от отдельного источника, и напряжение смещения мало зависит от параметров транзистора.

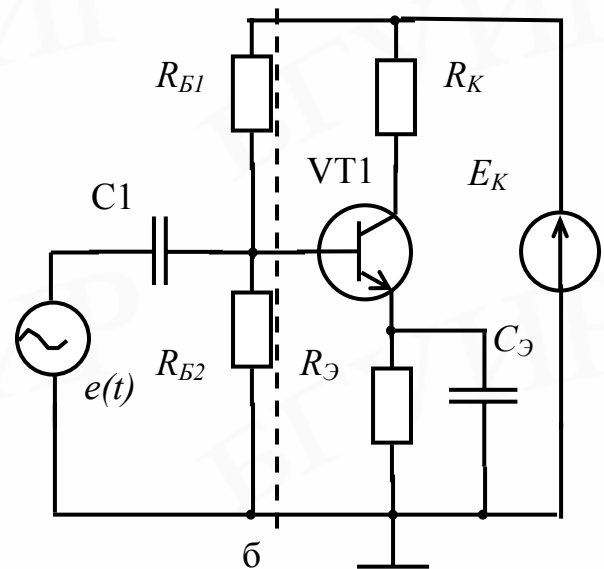
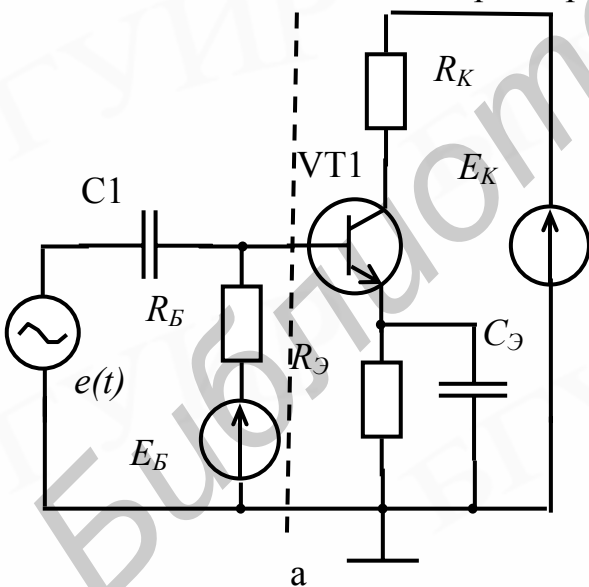


Рис. 12.9. Эмиттерная стабилизация положения рабочей точки с отдельным источником смещения (а) и с общим питанием (б)

Дальнейшая стабилизация режима в этих схемах осуществляется отрицательной обратной связью, получаемой за счет введения в цепь эмиттера резистора $R_Э$, шунтированного для устранения обратной связи по переменному току большой емкостью $C_Э$. Напряжение смещения между базой и

эмиттером $U_{БЭ}$ здесь равно разности напряжения, снимаемого с резистора $R_{Б2}$, и падения напряжения на $R_{Э}$ (рис. 12.9,б). При возрастании тока покоя коллектора I_K ток покоя эмиттера также растет, увеличивается падение напряжения на $R_{Э}$, что сильно уменьшает напряжение смещения между базой и эмиттером, тем самым подзапирая транзистор. В результате этого ток покоя коллектора возрастает во много раз меньше, чем без применения стабилизации.

Стабильность рабочей точки тем выше, чем больше $R_{Э}$ и чем меньше $R_{Б1}$ и $R_{Б2}$. Однако $R_{Э}$ не должно быть очень большим, так как при этом напряжение между коллектором и эмиттером $U_{КЭ}$ окажется слишком малым; сопротивление делителя $R_{Б1}$ и $R_{Б2}$ также нельзя брать слишком малым, поскольку с уменьшением $R_{Б1}+R_{Б2}$ увеличивается мощность, потребляемая делителем от источника питания, и сильно шунтируется входная цепь транзистора.

Рассмотрим более подробно работу схем рис.12.9. Схему рис.12.9, б можно привести к схеме рис. 12.9, а, воспользовавшись теоремой об эквивалентном генераторе для части схемы, расположенной левее вертикальной пунктирной линии.

Параметры эквивалентной схемы

$$E_B = E_K R_{Б2} / (R_{Б1} + R_{Б2}), \quad (12.14)$$

$$R_B = R_{Б1} R_{Б2} / (R_{Б1} + R_{Б2}). \quad (12.15)$$

Составим для схемы рис. 12.9,а систему уравнений

$$(12.16) \quad \begin{cases} I_K = I_{K0} + \alpha I_{Э}; \\ I_{Э} = I_K + I_B; \\ E_B = I_B R_B + I_{Э} R_B. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$I_K = S I_{K0} + (S - 1) E_B / R_B, \quad (12.17)$$

$$S = (1 + R_{Э} / R_B) / (1 - \alpha + R_{Э} / R_B). \quad (12.18)$$

Для схемы рис. 12.9, б эти выражения принимают вид

$$I_K = S I_{K0} + (S - 1) E_K / R_{Б1}, \quad (12.19)$$

$$S = \frac{1 + R_{Э} (R_{Б1} + R_{Б2}) / R_{Б1} R_{Б2}}{1 - \alpha + R_{Э} (R_{Б1} + R_{Б2}) / R_{Б1} R_{Б2}}. \quad (12.20)$$

На основании выражений (12.17 – 12.20) по известным I_K , I_{K0} , S , E_K определяются величины R_B , $R_{Б1}$, $R_{Б2}$, $R_{Э}$.

12.3. Анализ работы линейного транзисторного усилителя

Целью исследования работы каскада усилителя является установление зависимости между величинами напряжения и тока, действующими на выходе усилителя, и величинами напряжения и тока, действующими на его входе. Связь между этими величинами может быть выражена как графически, с помощью семейства входных и выходных характеристик, так и аналитически, путем исследования уравнений, выражающих взаимную связь токов и

напряжений, действующих на входе и выходе усилителя. Графический метод обычно используется для определения исходного режима работы усилительного элемента (режима покоя) и для анализа его работы при относительно больших уровнях входного сигнала.

Аналитический метод используется для анализа работы каскада, вывода расчетных соотношений, позволяющих вычислять параметры элементов, входящих в схему усилителя, поиска оптимальных условий реализации схемы усилителя.

12.3.1. Эквивалентная схема аperiodического транзисторного усилителя

В общем случае транзистор можно изобразить в виде устройства с двумя входами и двумя выходами (рис. 12.10). Такие устройства называются четырехполюсниками. Физические свойства четырехполюсника можно описать с помощью четырех в общем случае комплексных электрических величин: $\dot{U}_1, \dot{I}_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2$.

Связь между этими величинами можно выразить, например, с помощью таких уравнений:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = h_{11} \dot{I}_1 + h_{12} \dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 = h_{21} \dot{I}_1 + h_{22} \dot{U}_2. \end{cases} \quad (12.21)$$

Здесь h_{11} – входное сопротивление четырехполюсника при короткозамкнутых зажимах на выходе; h_{12} – коэффициент обратной связи по напряжению при разомкнутом входе; h_{21} – коэффициент усиления по току при короткозамкнутых выходных зажимах; h_{22} – выходная проводимость при разомкнутых входных зажимах.

В соответствии с этими уравнениями можно построить эквивалентную схему транзистора, работающего в линейном режиме, т.е. при малом уровне входного сигнала (рис. 12.11).



Рис. 12.10. Усилитель как четырехполюсник

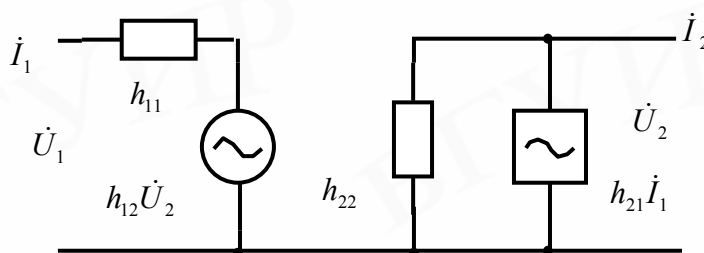


Рис. 12.11. Эквивалентная схема транзистора в линейном режиме

Значения эквивалентных параметров четырехполюсника можно измерить с помощью специальных приборов или, например, для транзистора, взять из справочника. В общем случае параметры транзистора являются комплексными, однако в целях упрощения проведения анализа мы будем предполагать, что они

являются действительными. Кроме того, допустим, что подключенный ко входу транзисторного усилителя генератор является источником напряжения, т.е. его внутреннее сопротивление равно нулю.

В качестве предмета анализа будем рассматривать схему с общим эмиттером (рис. 12.12), как наиболее распространенную, и положим $R_э = 0$.

Учитывая, что источник питания представляет для токов высокой частоты бесконечно малое сопротивление, построим эквивалентную схему усилителя (рис.12.13) и используем ее для анализа частотных свойств апериодического усилителя на транзисторе, включенном по схеме с общим эмиттером.

12.3.2. АЧХ апериодического транзисторного усилителя

Исследуем вопрос о том, как элементы схемы каскада влияют на форму частотной зависимости коэффициента усиления, на примере двухкаскадного усилителя, использующего в качестве нагрузки резисторы (апериодический усилитель) (см. рис. 12.12). Будем считать, что рабочая точка для каждого транзистора выбрана в середине линейного участка вольт-амперной характеристики, а уровень входного сигнала настолько мал, что можно использовать две совершенно одинаковые схемы усилительных каскадов, соединенных последовательно.

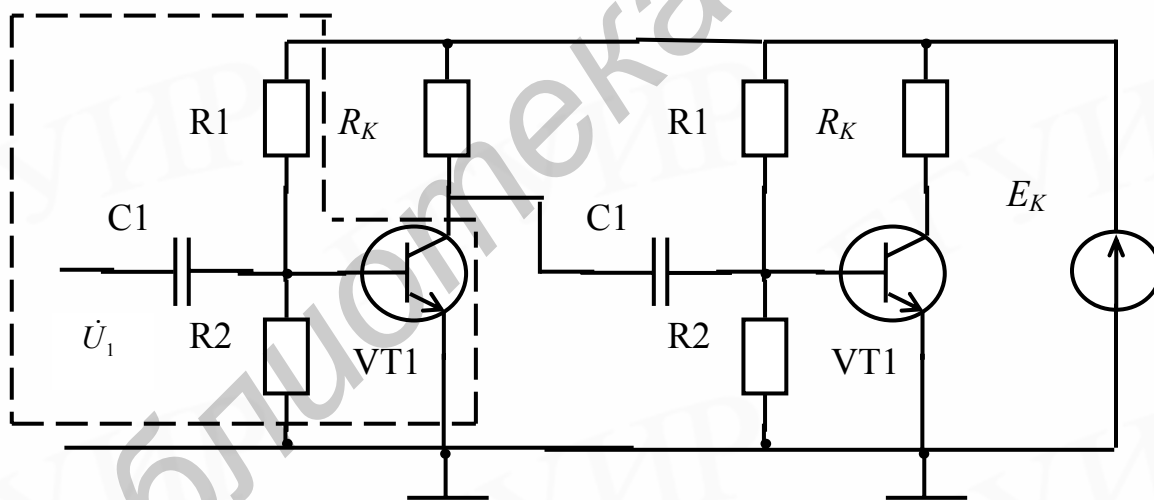


Рис. 12.12. Схема двухкаскадного апериодического усилителя

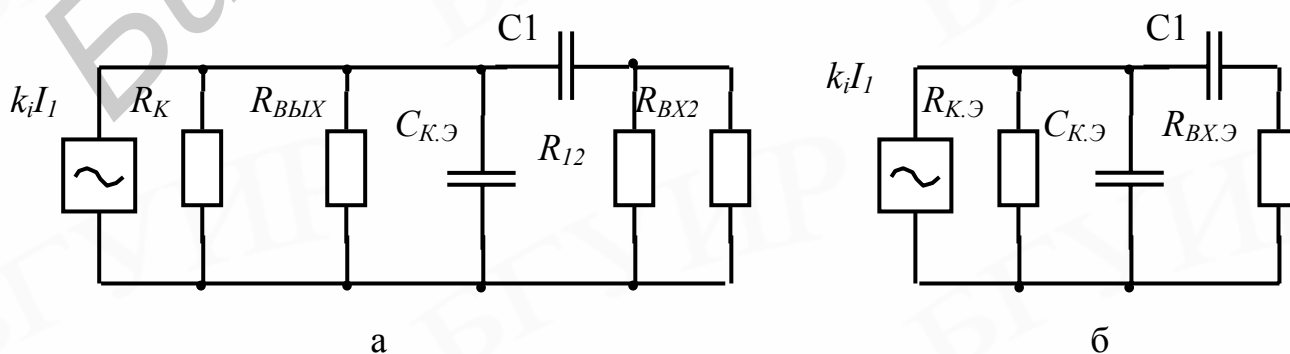


Рис. 12.13. Полная (а) и приведенная (б) эквивалентные схемы апериодического усилительного каскада

В эквивалентной схеме рис. 12.13 приняты обозначения: k_i – коэффициент усиления по току; $k_i I_1$ – генератор тока, равного I_2 (см. рис.12.11), эквивалентный транзистору VTI ; $R_{ВЫХ}$ – выходное сопротивление транзистора VTI ; R_K – сопротивление в цепи коллектора транзистора VTI ; $R_{ВХ2}$ – входное сопротивление второй усилительной ступени; R_{I2} – эквивалентное сопротивление цепи смещения

$$R_{I2} = \frac{R1 R2}{R1 + R2}; \quad (12.22)$$

$C1$ – разделительный конденсатор (благодаря наличию этого конденсатора оба усилительных каскада работают независимо по постоянному току); $C_{К.Э}$ – конденсатор, отражающий наличие паразитной емкости (эта емкость учитывает паразитные связи, порой очень трудно поддающиеся локализации, тем не менее ее подключают обычно между коллектором и эмиттером транзистора).

Эквивалентную схему рис. 12.13, а можно привести к виду, показанному на рис. 12.13, б, где

$$R_{К.Э} = R_K R_{ВЫХ} / (R_K + R_{ВЫХ}), \quad (12.23)$$

$$R_{ВХ.Э} = R_{ВХ2} R_{I2} / (R_{ВХ2} + R_{I2}). \quad (12.24)$$

Чтобы провести анализ АЧХ транзисторного каскада в широком диапазоне рабочих частот, рассмотрим поведение эквивалентной схемы в области нижних, верхних и средних частот. Упрощенные эквивалентные схемы усилителя для каждой из названных частотных областей показаны на рис.12.14.

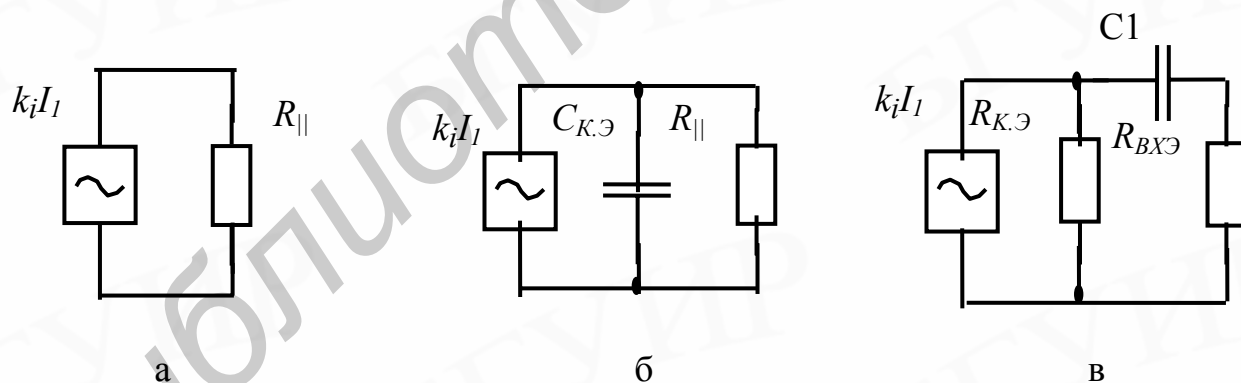


Рис. 12.14. Эквивалентные схемы усилительного каскада для средних (а), верхних (б) и нижних (в) частот

Определим коэффициент усиления по напряжению в области средних частот. Из схемы рис.12.14, а имеем:

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \frac{R_{К.Э} R_{ВХ.Э}}{R_{К.Э} + R_{ВХ.Э}} = R_{||} \dot{I}_2.$$

(12.25)

Здесь

$$R_{\parallel} = \frac{R_{K.Э} R_{BX.Э}}{R_{K.Э} + R_{BX.Э}}$$

Так как

$$\dot{I}_2 = k_i \dot{I}_1 = k_i \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \dot{U}_1 = k_i \frac{\dot{U}_1}{R_{BX}}, \quad (12.26)$$

то комплексный коэффициент передачи усилителя по току

$$K_u = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{k_i R_{\parallel}}{R_{BX}} = K_0. \quad (12.27)$$

Здесь $R_{BX} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1$ — входное сопротивление транзисторного каскада.

Из (12.27) следует, что коэффициент усиления на средних частотах не зависит от частоты. Поэтому в области средних частот АЧХ усилителя представляет собой прямую линию, параллельную оси частот.

Рассмотрим работу схемы в области верхних частот. Из рис. 12.14, б имеем

$$\dot{U}_2 = \dot{I}_2 \frac{R_{\parallel} \frac{1}{i\omega C_{K.Э}}}{R_{\parallel} + \frac{1}{i\omega C_{K.Э}}} = \dot{I}_2 \frac{R_{\parallel}}{1 + i\omega R_{\parallel} C_{K.Э}}. \quad (12.28)$$

Так как $\dot{I}_2 = k_i \dot{U}_1 / R_{BX}$, то

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 \frac{k_i}{R_{BX}} \frac{R_{\parallel}}{1 + i\omega R_{\parallel} C_{K.Э}}, \quad (12.29)$$

откуда

$$K_u = \dot{U}_2 / \dot{U}_1 = K_0 / (1 + i\omega R_{\parallel} C_{K.Э}).$$

(12.30)

Из (12.30) следует, что

$$|K_u| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + (\omega R_{\parallel} C_{K.Э})^2}}, \quad (12.31)$$

т.е. с увеличением частоты входного сигнала коэффициент усиления каскада уменьшается.

Для изучения работы каскада в области нижних частот воспользуемся эквивалентной схемой (рис. 12.14, в). Учитывая, что выходное напряжение \dot{U}_2 теперь формируется на резисторе $R_{BX.Э}$, на основании этой схемы можно составить выражение для коэффициента усиления по напряжению

$$K_u = \frac{K_0}{1 + \frac{1}{i\omega (R_{K.Э} + R_{BX.Э}) C_1}}$$

(12.32)

Из (12.32) следует, что на нижних частотах

$$K_u = K_0 / \sqrt{1 + \frac{1}{[\omega C1(R_{K.Э} + R_{BX.Э})]^2}},$$

(12.33)

т.е. в этом случае с увеличением частоты входного сигнала коэффициент усиления каскада возрастает.

На основании проведенного анализа можно построить АЧХ усилителя для всего диапазона рабочих частот (рис. 12.15). Построение АЧХ выполнено следующим образом. АЧХ в области средних частот не зависит от частоты сигнала, поступающего на усилитель, поэтому изображается прямой линией, параллельной оси частот и отстоящей от нее на расстояние K_0 . В области нижних частот АЧХ возрастает с увеличением частоты, поэтому она изображается функцией, возрастающей от некоторого значения, меньшего, чем K_0 , а затем “сшивается” со своими значениями, соответствующими области средних частот. Аналогично выполняется построение АЧХ в области верхних частот. Скорость возрастания АЧХ в области нижних частот зависит от величины емкости разделительного конденсатора $C1$. Чем больше эта емкость, тем меньше скорость возрастания АЧХ и, следовательно, тем более низкие частоты будут проходить через усилитель с минимальными искажениями. С другой стороны, скорость убывания АЧХ усилителя зависит от величины паразитной емкости, учитываемой в схеме величиной некоторого фиктивного конденсатора $C_{K.Э}$. Чем больше величина паразитной емкости, тем более низкочастотным оказывается весь усилитель

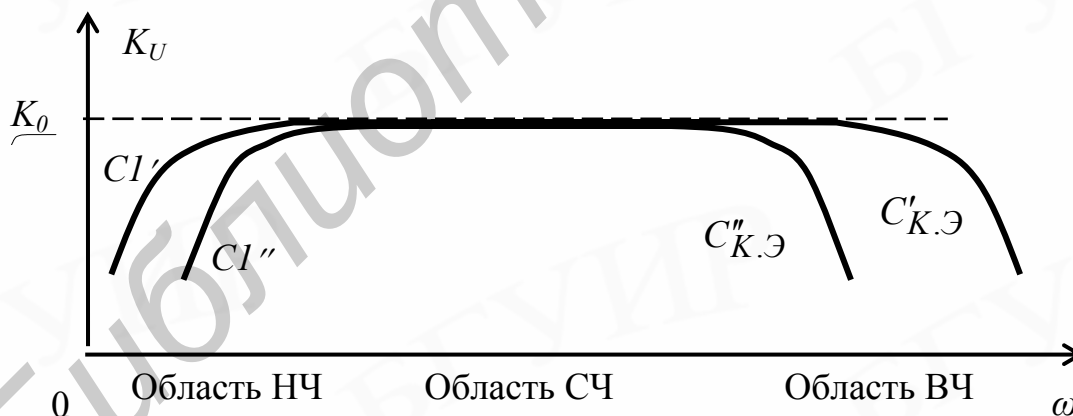


Рис. 12.15. Изменение формы амплитудно–частотной характеристики аperiodического транзисторного усилителя в зависимости от величин разделительной $C1$ и паразитной $C_{K.Э}$

Из (12.31) и (12.33) следует, что увеличение емкости $C_{K.Э}$ снижает усиление в области верхних частот, а увеличение $C1$ снижает нижнюю граничную частоту усилителя. Как видно из рис. 12.15, полоса рабочих частот

усилителя расширяется при $C1' > C1''$ в сторону нижних частот и при $C'_{К.Э} < C''_{К.Э}$ — в сторону верхних частот.

12.3.3. ФЧХ апериодического транзисторного усилителя

Используя эквивалентные схемы, приведенные на рис. 12.14, рассмотрим, какие факторы влияют на форму ФЧХ усилителя.

На средних частотах коллекторный ток транзистора $I_K = SU_{BX}$ протекает по чисто активному сопротивлению. Так как нагрузка $R_{||}$ в этом случае не зависит от частоты, усиление получается одинаковым на всех частотах, а фазовый сдвиг между входным и выходным напряжениями составляет 180^0 . Этот сдвиг по фазе создает сам транзистор независимо от частоты усиливаемого сигнала. Обычно в каскадах усиления $R_K \ll R_{||}$, поэтому коэффициент усиления можно получить из следующих соотношений:

$$U_{ВЫХ} = I_K R_{||} \approx I_K R_K, K = U_{ВЫХ} / U_{ВХ} = SR_K.$$

Например, у каскада усиления на транзисторе с $S = 5 \text{ мА/В}$ и $R_K = 2 \text{ кОм}$ коэффициент усиления $K = 10$.

На высоких частотах (см. рис. 12.14, б) происходит уменьшение усиления с увеличением частоты усиливаемого сигнала вследствие шунтирующего действия емкости $C_{К.Э}$. Выходное напряжение в схеме рис. 12.14, б снимается с параллельно соединенных емкости $C_{К.Э}$ и сопротивления $R_{||}$, поэтому оно отстает по фазе от напряжения $U_{ВЫХ}$ в схеме на рис. 12.14, а. Вследствие этого сдвиг по фазе между выходным и входным напряжениями на высоких частотах меньше 180^0 .

На низких частотах (см. рис. 12.14, в) цепь $R_{ВХ.Э}C1$ можно рассматривать как делитель напряжения. Выходное напряжение, поступающее на следующий каскад, снимается с сопротивления $R_{ВХ.Э}$. Выходное напряжение $U_{ВЫХ}$ опережает выходное напряжение в схеме на рис. 12.14, а, так как снимается с активного сопротивления; ток в цепи опережает по фазе приложенное напряжение. Поэтому сдвиг по фазе между выходным и входным напряжениями на низких частотах больше 180^0 .

Окончательный график ФЧХ апериодического усилительного каскада приведен на рис. 12.16.

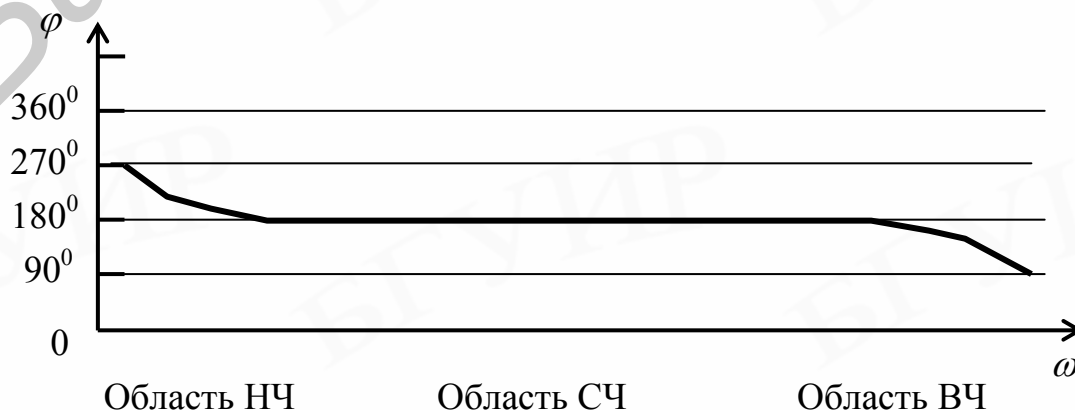


Рис. 12.16. ФЧХ апериодического транзисторного усилителя

12.3.4. Коррекция частотных характеристик усилителя

Полосу рабочих частот усилителя можно расширить с помощью коррекции (исправления) АЧХ. Форму АЧХ можно корректировать как в области низких, так и высоких частот.

Высокочастотная коррекция частотных характеристик усилителя

Простейшим способом расширения АЧХ усилителя в области высоких частот служит использование индуктивности L , подключаемой последовательно с резистором R_K . Поскольку величину индуктивности выбирают небольшой (порядка десятков микрогенри), ее влияние сказывается лишь на высоких частотах, так как индуктивное сопротивление катушки L на низких и средних частотах мало. Нагрузка каскада при введении корректирующей индуктивности на высоких частотах представляет собой параллельный контур, состоящий из индуктивности L , паразитной емкости $C_{K.Э}$ и активного сопротивления R_K . При правильном выборе индуктивности L собственная резонансная частота контура оказывается близкой к верхней граничной частоте некорректированного усилителя, что поднимает усиление в области высоких частот. Если ставится задача максимально расширить полосу рабочих частот усилителя без подъема частотной характеристики, то выбирают $Q = 0,64$. В этом случае необходимое значение корректирующей индуктивности L определяется, исходя из соотношения $Q^2 = L/C_{K.Э}R_K$. При таком выборе корректирующей индуктивности полоса рабочих частот усилителя расширяется на 72 % и форма АЧХ более всего приближается к прямоугольной. Однако при этом фазовые искажения не являются наименьшими (фазовые искажения минимальны при $Q = 0,57$).

На практике очень часто важно получить неискаженную форму усиливаемых видеоимпульсов. В этих случаях следует выбирать добротность контура выше, чем 0,6. Но тогда возникают искажения вершины импульса, так как при подаче на вход усилителя прямоугольного видеоимпульса происходит ударное возбуждение контура $LC_{K.Э}R_K$ и в нем возникают собственные быстро затухающие колебания. Если $Q > 0,5$, то возникающие колебания носят периодический характер. Если $Q \leq 0,5$, то в контуре имеет место апериодический процесс. При этом на вершине выходного импульса появляется характерный выброс, величина которого увеличивается с ростом выбранной добротности контура $LC_{K.Э}R_K$, а время нарастания импульса уменьшается. Поэтому обычно выбирают добротность контура $Q = 0,5-0,7$.

Низкочастотная коррекция частотных характеристик усилителя

Для коррекции формы АЧХ в области низких частот используется фильтр $R_{\Phi}C_{\Phi}$, включаемый между источником питания и коллекторным сопротивлением усилителя (рис. 12.17,а). Одновременно этот фильтр служит целям предотвращения самовозбуждения усилителя из-за положительной

обратной связи через источник питания и стабилизирует работу многокаскадного усилителя. Величину R_{Φ} можно выбирать в достаточно больших пределах, но чаще всего $R_{\Phi} = (2-5)R_K$. Емкость C_{Φ} должна быть настолько большой, чтобы на средних частотах выполнялось неравенство $C \gg 1/2\pi f_{cp}R_K$. При таком выборе емкости C_{Φ} можно считать, что коллекторной нагрузкой служит только сопротивление $R_K \ll R_{K.Э}$. Следовательно коэффициент усиления каскада на средних частотах $K_0 = SR_K$

С понижением частоты усиливаемых колебаний сопротивление всех емкостей каскада возрастает, и выходное напряжение составляет только часть переменного напряжения, действующего на коллекторе транзистора. Значительная его часть падает на сопротивлении конденсатора $C1$. Это напряжение увеличивается с понижением частоты. Но при наличии коллекторного фильтра при понижении частоты входного сигнала происходит увеличение сопротивления коллекторной нагрузки, которая стремится к максимальной величине $R_{K.Э} + R_{\Phi}$. В результате возрастания величины коллекторной нагрузки происходит увеличение переменного напряжения на коллекторе транзистора. Поэтому частотная характеристика такого усилителя в области низких частот поднимается по сравнению с характеристикой усилителя без фильтра $R_{\Phi}C_{\Phi}$.

Максимальное расширение полосы пропускания реостатного транзисторного усилителя в области низких частот получается при $C_{\Phi}R_K = C1R_{BХ.Э}$, откуда необходимая величина емкости конденсатора фильтра равна

$$C_{\Phi} = C1R_{BХ.Э}/R_K.$$

В этом случае нижняя граничная частота усилителя с коррекцией определяется по формуле

$$f_{НГ} = 1/2\pi C_{\Phi}R_{\Phi} = R_K/2\pi C_{\Phi}R_{BХ.Э}.$$

Таким образом, в усилителе с низкочастотной коррекцией нижняя граничная частота полосы рабочих частот может быть значительно уменьшена. Для этого при выбранных значениях величин $C1$, R_K и $R_{BХ.Э}$ следует увеличивать сопротивление R_{Φ} . Наибольшая величина сопротивления R_{Φ} ограничивается допустимым падением постоянного напряжения на нем за счет постоянной составляющей коллекторного тока транзистора. Ориентировочно можно считать верхним пределом $R_{\Phi} = 10R_K$.

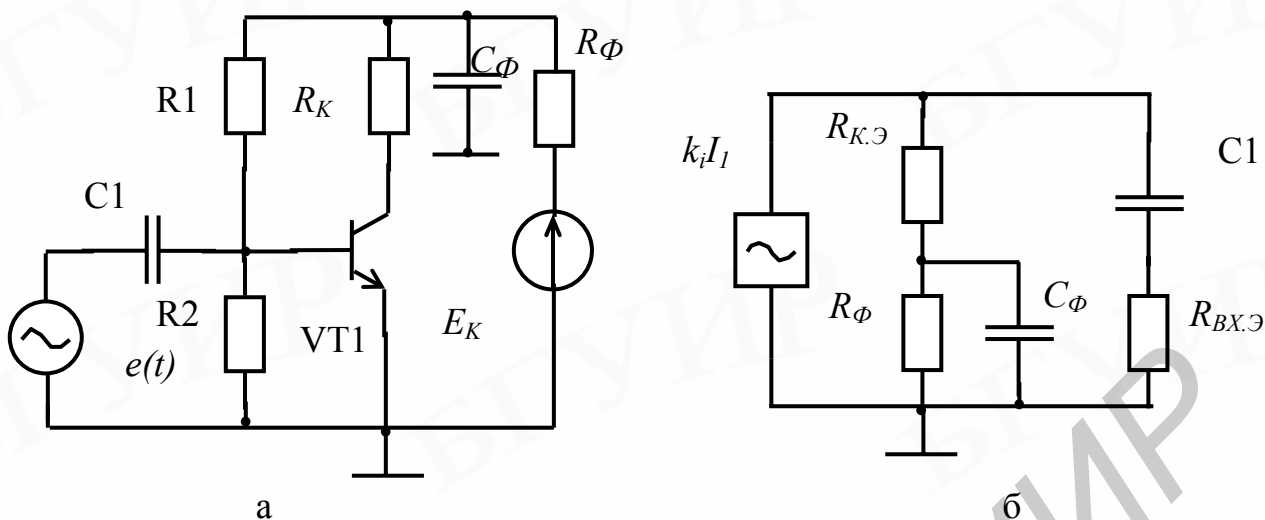


Рис. 12.17. Принципиальная (а) и эквивалентная по переменному току (б) схемы усилительного каскада с коррекцией в области низких частот

12.3.5. АЧХ резонансного (избирательного) усилителя

Применение избирательных усилителей, например, с контуром в цепи коллектора транзистора, позволяет помимо усиления сигнала повысить отношение сигнал/шум в тракте радиоприемного устройства, в результате чего повышается чувствительность приемника.

Колебательный контур в схеме избирательного транзисторного усилителя в значительной мере шунтируется выходным сопротивлением $R_{ВЫХ}$ транзистора и входным сопротивлением $R_{ВХ.Э}$ цепи, подключаемой к выходу усилительного каскада. Их результирующая величина равна

$$R_{||} = R_{ВЫХ} R_{ВХ.Э} / R_{ВЫХ} + R_{ВХ.Э}$$

Ввиду этого резонансное сопротивление контура, используемого в качестве коллекторной нагрузки усилителя, может быть только меньше $R_{||}$ или равно ему (при очень малой величине резонансного сопротивления контура). Поэтому необходимо принимать меры для снижения влияния шунтирующего действия этих сопротивлений на избирательные характеристики резонансного усилителя. Одним из важнейших методов решения такой задачи является использование неполного включения контура.

АЧХ резонансного усилителя определяется параметрами используемого в его схеме колебательного контура. Характерной особенностью такого усилителя является использование неполного включения контура, внешней отличительной чертой которого является наличие хотя бы в одной из ветвей L или C элементов обоих знаков реактивности. Принципиальная электрическая и эквивалентная по переменному току схемы резонансного усилителя с неполным включением контура, у которого контурная катушка L состоит из трех частей: $L = L1 + L2 + L3$, показаны на рис. 12.18 и 12.19 соответственно. Все катушки находятся на одном сердечнике и имеют соответственно число витков n_1, n_2, n_3 .

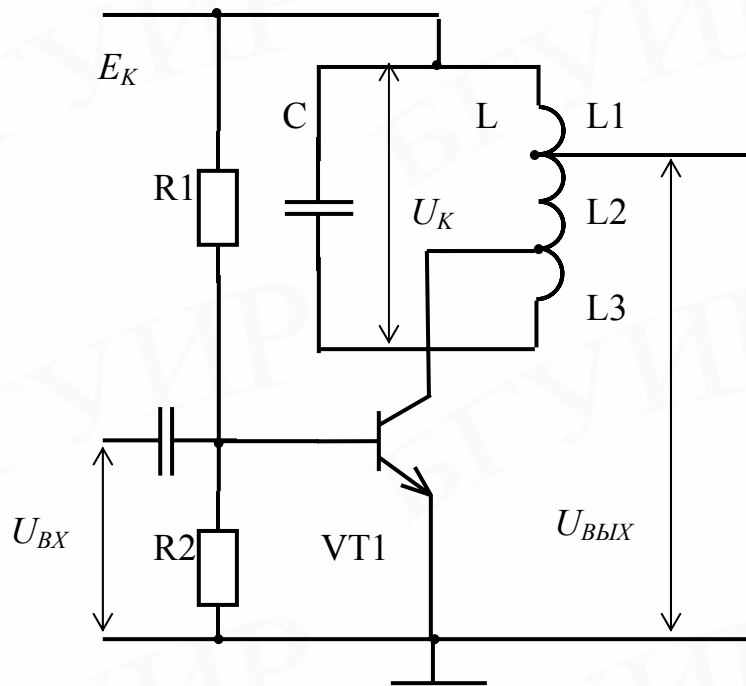


Рис. 12.18. Принципиальная электрическая схема резонансного

целиком. В результате этого сохраняется почти полностью ее достаточно высокая добротность, позволяющая сохранить высокие избирательные качества усилителя. А потеря усиления легко может быть компенсирована добавлением еще одной ступени усиления, но зато мы сохраним высокие избирательные качества усилителя. Таким образом, избирательность усилительного каскада можно сохранить ценой уменьшения коэффициента усиления.

Обратим внимание на аналогичные явления, относящиеся к подключению коллектора транзистора. Поскольку выходное сопротивление транзистора, включенного по схеме с общим эмиттером, значительно выше его входного сопротивления, то точка подключения коллектора должна находиться выше точки подключения контура к выходным зажимам усилителя.

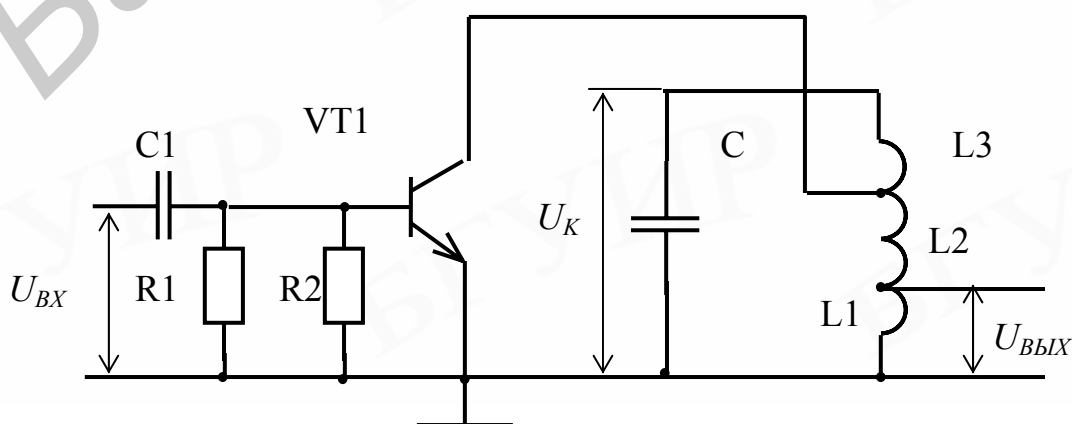


Рис. 12.19. Эквивалентная схема по переменному току резонансного усилителя

Из рис. 12.19 видно, что когда усилитель создает на контуре напряжение U_K , то выходное напряжение

$$U_{\text{ВЫХ}} = \frac{n_1}{n_1 + n_2 + n_3} U_K.$$

Например, если катушка L содержит $n_1 + n_2 + n_3 = 100$ витков, а выходное напряжение снимается с катушки $L1$, имеющей 10 витков, то легко понять, что $U_{\text{ВЫХ}} = 0,1U_K$, т.е., используя неполное включение контура, мы снижаем полученное усиление в 10 раз. Однако при этом шунтируется только десятая часть витков катушки, а не вся катушка

12.4. Обратная связь в усилителях

Обратная связь в усилителе представляет собой передачу на его вход усиленных колебаний с выхода усилителя (либо отдельного его каскада, если усилитель является многокаскадным). Эта передача определяется:

1) физическими свойствами и конструктивными особенностями усилительных нелинейных элементов. Такая обратная связь называется *внутренней*;

2) внешними цепями, обеспечивающими передачу выходного напряжения усилителя на его вход и реализующими замысел конструктора по приданию усилителю нужных свойств. Такая обратная связь называется *внешней*;

3) неудачным расположением и монтажом усилительных каскадов, когда паразитные емкостные и индуктивные связи создают путь для передачи колебаний с выхода на вход. Такая обратная связь, возникающая вопреки желанию конструктора, называется *паразитной*.

Если напряжение, поступающее из цепи обратной связи, совпадает по фазе с входным сигналом, то напряжение на выходе усилителя возрастает. В этом случае обратная связь называется положительной. Если же напряжение, поступающее из цепи обратной связи на вход усилителя, оказывается в противофазе со входным сигналом, то напряжение на выходе уменьшается и обратная связь называется отрицательной.

В результате применения обратной отрицательной связи происходит значительное уменьшение нелинейных, частотных и фазовых искажений, возникающих в усилителе. Заметно повышается стабильность коэффициента усиления и расширяется полоса его рабочих частот. Кроме того, использование обратной отрицательной связи способствует увеличению входного сопротивления и снижению выходного сопротивления каскада, а также ослабляет зависимость параметров усилителя от смены транзисторов, старения элементов схемы и изменения питающих напряжений.

12.4.1. Структурные схемы усилителей с обратной связью

Так как усилитель с коэффициентом передачи $K(i\omega)$ и цепь обратной связи с коэффициентом передачи $\beta(i\omega)$ можно представить в виде четырехполюсников, то возможные структурные схемы усилителя с обратной связью будут определяться возможными способами соединения этих четырехполюсников. Возможны четыре способа соединения входных и выходных зажимов четырехполюсников (рис. 12.20).

На схеме рис. 12.20, а входные зажимы усилителя и выходные зажимы цепи обратной связи соединены параллельно. Также параллельно соединены выход усилителя и вход цепи обратной связи. При таком включении величина тока обратной связи $I_{o.c}$ зависит от выходного напряжения U_2 и при $Z_H = 0$ падает до нуля. Такая обратная связь называется *параллельной по напряжению*.

В схеме рис. 12.20, б выходное напряжение четырехполюсника обратной связи и входное напряжение $e(t)$ включены во входную цепь усилителя

последовательно. Выходные зажимы усилителя, входные зажимы цепи обратной связи и нагрузка Z_H включены параллельно. Напряжение обратной связи зависит от выходного напряжения. Такая обратная связь называется *последовательной по напряжению*.

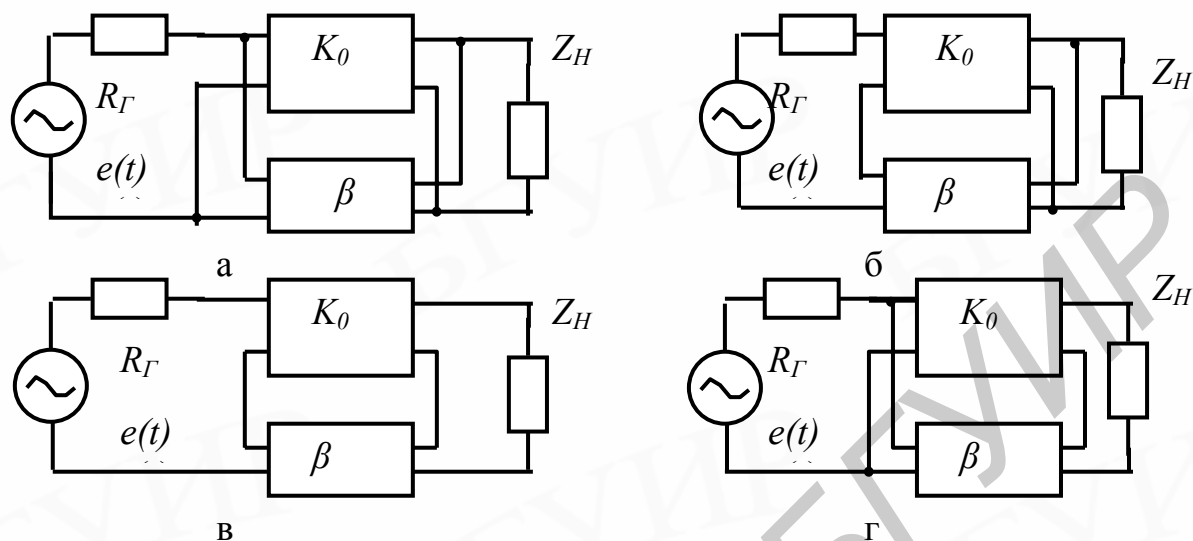


Рис. 12.20. Структурные схемы усилителей с параллельной (а), последовательно-параллельной (б), последовательной (в) и параллельно-последовательной цепями (г) обратной связи

В схеме, изображенной на рис. 12.20, в, напряжения обратной связи U_{OC} и усиливаемого сигнала $e(t)$ включены последовательно. Выход усилителя, вход цепи обратной связи и нагрузка Z_H также соединены последовательно и по цепи протекает выходной ток I_2 . В этом случае величина U_{OC} зависит от тока I_2 . Как видно из схемы, обратная связь исчезает при $Z_H \rightarrow \infty$, когда $I_2 = 0$. Это *последовательная обратная связь по току*.

На рис. 12.20, г приведена схема, где входные зажимы усилителя и входные зажимы цепи обратной связи соединены параллельно, а вход усилителя, вход цепи обратной связи и нагрузка Z_H – последовательно. В этом случае величина I_{OC} определяется выходным током I_2 усилителя, поэтому такая обратная связь называется *параллельной по току*.

На основе простейших видов обратной связи можно создать различные смешанные виды. Внешнюю обратную связь, создаваемую при помощи специальной цепи обратной связи, всегда легко отнести к тому или другому виду. Для внутренней обратной связи, обусловленной собственным механизмом работы активного элемента, такой определенности нет. Обычно ее описывают теми же параметрами, какими описывается активный элемент.

12.4.2. Коэффициент передачи усилителя с обратной связью

На примере усилителя с последовательно-параллельной обратной связью (см. рис. 12.20, б) определим коэффициент передачи усилителя с обратной связью. Введем обозначения: K_0 и K_{OC} – коэффициенты передачи усилителя без

обратной связи и с обратной связью соответственно; $U_{ВХ}$ и $U_{ВЫХ}$ – напряжения на входе и выходе усилителя; β – комплексный коэффициент передачи цепи обратной связи.

Напряжение, непосредственно приложенное к усилителю,

$$U_C = U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ}. \quad (12.34)$$

Напряжение на выходе усилителя

$$U_{ВЫХ} = K_0 U_C. \quad (12.35)$$

Подставляя (12.35) в (12.34), имеем

$$U_{ВЫХ} = K_0 (U_{ВХ} + \beta U_{ВЫХ}), \quad (12.36)$$

откуда

$$K_{o.c} = \frac{K_0}{1 - \beta K_0}.$$

(12.37)

Допустим, что усилительный каскад обеспечивает набег фазы выходного сигнала, кратный целому числу π , а цепь обратной связи не вносит дополнительных фазовых сдвигов. Тогда произведение βK_0 может быть либо отрицательным, либо положительным числом. Как следует из (12.37), при $\beta K_0 = |\beta K_0|$ коэффициент усиления усилителя с обратной связью

$$K_{o.c} = \frac{K_0}{1 - |\beta K_0|}$$

(12.38)

возрастет, т.е. имеет место положительная обратная связь. Если $\beta K_0 = -|\beta K_0|$, то коэффициент усиления усилителя с обратной связью

$$K_{o.c} = \frac{K_0}{1 + |\beta K_0|} \quad (12.39)$$

уменьшится в $1 + |\beta K_0|$ раз, т.е. имеет место отрицательная обратная связь.

В общем случае коэффициент усиления K_0 и коэффициент передачи цепи обратной связи β представляют собой некоторые комплексные величины. В результате модуль и фаза коэффициента усиления $K_{o.c}$ определяются величинами K_0 и β , сложным образом зависящими от частоты. Но в любом случае можно найти аналитические выражения для частотной зависимости модуля $K_{o.c}$ и его фазового угла $\varphi(\omega)$.

12.4.3. Влияние обратной отрицательной связи на параметры усилителя

При наличии обратной отрицательной связи происходит ослабление как основного (входного) сигнала, так и всех других составляющих, поступивших из выходной цепи.

Ослабление выходного сигнала можно компенсировать увеличением входного напряжения, которое может быть осуществлено в одном из предварительных каскадов (маломощных) без искажений. Таким образом, можно повысить соотношение между полезным сигналом и вредными напряжениями на выходе усилительного устройства. Это существенное

достоинство усилителя с обратной связью. Кроме того, обратная связь (отрицательная) обеспечивает высокую стабильность коэффициента усиления устройства при весьма больших колебаниях величин питающих напряжений, нагрузочных сопротивлений и т.п.

12.4.4. Эмиттерный повторитель как схема с обратной отрицательной связью

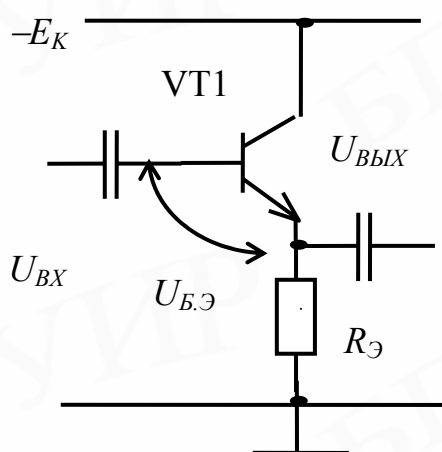


Рис. 12.21. Схема эмиттерного повторителя

В отличие от рассмотренного выше каскада, в котором триод включен по схеме с общим эмиттером, каскад с транзистором, включенным по схеме с общим коллектором (рис.12.21), не меняет полярности передаваемого сигнала. По этой причине он называется *эмиттерным повторителем*. Из схемы, приведенной на рис. 12.21, видно, что

$$U_{ВЫХ} = U_{BX} - U_{Б.Э} < U_{BX},$$

т.е. коэффициент усиления каскада по напряжению меньше единицы. Другими словами, в каскаде осуществляется 100 %-я отрицательная обратная связь по напряжению. В этом легко убедиться, если

воспользоваться правилами определения вида обратной связи, описанными в предыдущих подразделах. Усиление сигнала в этой схеме осуществляется по току. Так как ток эмиттера $I_{Э}$, равный выходному току,

$$I_{Э} = I_{ВЫХ} = I_{Б} + I_{К} = I_{Б}(\beta + 1),$$

намного превышает величину входного тока $I_{ВХ}$, то отношение $I_{Э}/I_{ВХ} = \beta + 1$ получается большим. Здесь β – коэффициент усиления транзистора по току.

Из (12.39) видно, что при 100 %-й обратной связи $\beta \approx 1$ и, следовательно, произведение $|\beta K_{0}| \gg 1$ (глубокая связь), т.е. коэффициент усиления усилителя с обратной связью $K_{0.с} \approx 1/\beta$. Отсюда следует, что при глубокой отрицательной обратной связи усиление определяется в основном цепью обратной связи. Так как последняя обычно не содержит активных элементов, то усиление получается стабильным. Отсюда также следует, что обратная отрицательная связь позволяет улучшать равномерность частотной характеристики усилителя.

Отметим также, что схема с общим коллектором обладает очень большим входным сопротивлением и очень малым выходным сопротивлением. Действительно, входное сопротивление транзистора

$$R_{ВХ} = \frac{U_{ВХ}}{I_{ВХ}} = \frac{I_{Б} r_{Б} + I_{Э}(r_{Э} + R_{Э})}{I_{Б}} = r_{Б} + (r_{Э} + R_{Э})(\beta + 1).$$

Обычно $R_{Э} \gg r_{Э}$ и $R_{Э}(\beta + 1) \gg r_{Б}$. Поэтому можно считать $R_{ВХ} \approx R_{Э}(\beta + 1)$.

12.4.5. Фазоинверсный каскад с разделенной нагрузкой

Схемы фазоинверсных каскадов с разделенной нагрузкой используются тогда, когда нужно получить сигналы, одинаковые по амплитуде, но сдвинутые относительно друг друга на 180° . Одна из таких схем изображена на рис. 12.22. Эту схему по первому выходу можно рассматривать как усилитель с общим эмиттером с последовательной отрицательной обратной связью по току, а по второму выходу – как эмиттерный повторитель. Следовательно, фазоинверсный каскад с разделенной нагрузкой не усиливает сигнал по напряжению, что является недостатком этой схемы. Другой ее недостаток – различие в значениях выходных сопротивлений $R_{ВЫХ1} > R_{ВЫХ2}$, что затрудняет получение полной симметрии схемы.

12.4.6. Устойчивость усилителей с обратной связью

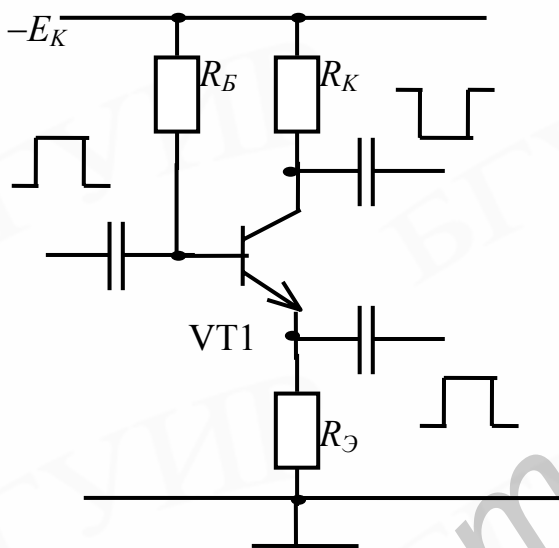


Рис. 12.22. Схема каскада с разделенной нагрузкой

В реальной схеме усилителя с обратной связью всегда имеются элементы, создающие дополнительные фазовые сдвиги (паразитные емкости, переходные конденсаторы, индуктивности рассеяния и т.д.).

Если на какой-либо частоте, лежащей в полосе усиливаемых частот или вне ее, эти сдвиги дают в сумме дополнительный угол в 180° , то обратная связь из отрицательной превращается в положительную и может возникнуть паразитная генерация. Опасность возникновения генерации тем больше, чем больше величина $|\beta K_0|$. Это обстоятельство сильно ограничивает

эффективность применения обратной отрицательной связи. Поэтому использование отрицательной обратной связи тесно связано с проблемой устойчивости усилителя.

Для правильного построения схемы усилителя большое значение имеют методы определения устойчивости усилителя.

Наиболее простым и наглядным является амплитудно-фазовый или частотный метод, применение которого к анализу устойчивости усилителя рассмотрим на примере схемы рис. 12.20, б.

Разомкнем цепь обратной связи усилителя и составим выражение для коэффициента передачи двух последовательно соединенных четырехполюсников с коэффициентами передачи $K(i\omega)$ и $\beta(i\omega)$:

$$H(i\omega) = K(i\omega) \beta(i\omega) = |K(i\omega) \beta(i\omega)| e^{i(\varphi_k + \varphi_\beta)} = |H(i\omega)| e^{i\varphi(\omega)}. \quad (12.40)$$

Если при изменении частоты от 0 до ∞ аргумент $\varphi(\omega)$ не достигает величины 2π , то замкнутая система устойчива при любом значении ω . Отсюда

следует, что паразитная генерация возможна только на частотах, при которых одновременно выполняются два условия:

$$\begin{cases} |H(i\omega)| = |K\beta| > 1, \\ \varphi = \varphi_k + \varphi_\beta = 2\pi. \end{cases} \quad (12.41)$$

Вычисление амплитудной $|H(\omega)|$ и фазовой $\varphi(\omega)$ характеристик для усилителя с обратной связью обычно не представляет большой сложности. Построив графики $|H(\omega)|$ и $\varphi(\omega)$ в функции частоты, можно получить наглядное представление об устойчивости системы. Примеры графиков для устойчивого и неустойчивого усилителя приведены на рис. 12.23.

Из рис. 12.23, а следует – в полосе рабочих частот усилителя условия (12.41) не выполняются одновременно. Это значит, что в полосе рабочих частот этот усилитель не будет возбуждаться и сохранит стабильность своей работы.

Из рис. 12.23, б видно, что в том случае, когда модуль коэффициента передачи превышает единицу, набег фазы по кольцу обратной связи составляет величину 2π , т.е. выполнены условия для самовозбуждения усилителя.

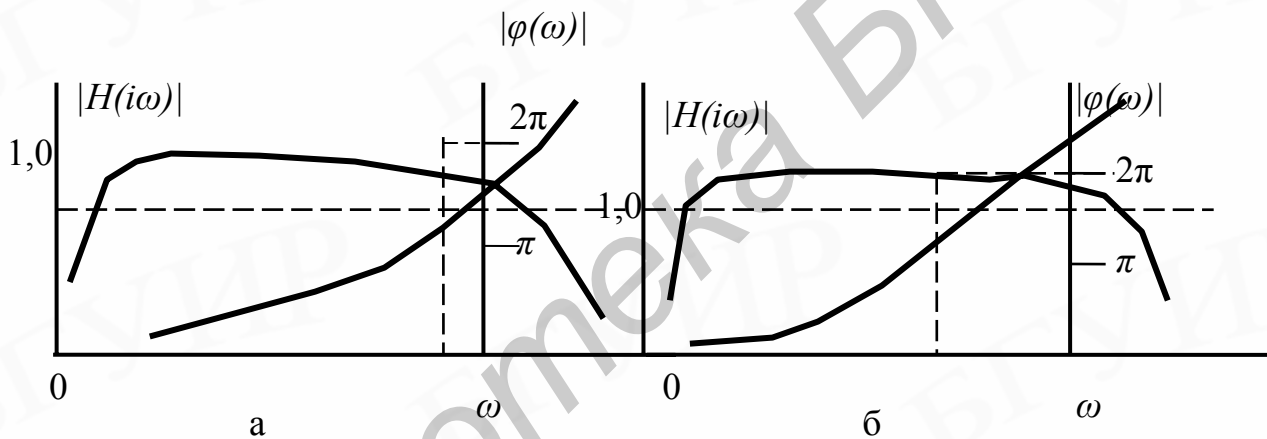


Рис. 12.23. Графики $|H(i\omega)|$ и $|\varphi(\omega)|$ для устойчивого (а) и неустойчивого (б) усилителей

12.4.7. Влияние цепи обратной связи через источник питания на устойчивость усилителя

Наличие цепей обратной связи, особенно в многокаскадных усилителях, является основной причиной самовозбуждения усилителей как высокой, так и низкой частоты.

Наибольшее влияние на работу транзисторного усилителя оказывает обратная связь через общий источник коллекторного питания. Рассмотрим трехкаскадный усилитель (рис. 12.24).

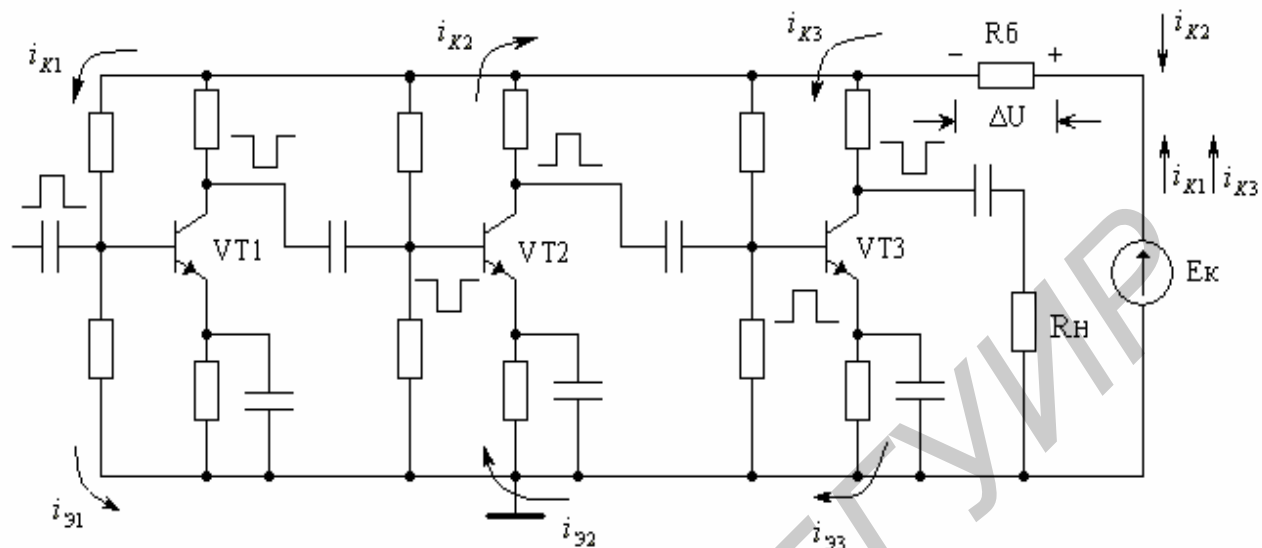


Рис. 12.24. Усилитель с обратной связью через источник питания

Допустим, напряжение на входе усилителя изменилось на $+\Delta U$. Поскольку транзистор поворачивает фазу напряжения на 180° , можно показать фазы напряжений на электродах других транзисторов, а также направления коллекторных токов i_{k1} , i_{k2} , i_{k3} . Как видно из рис. 12.24, через внутреннее сопротивление источника R_b протекают токи всех трех транзисторов, причем токи i_{k1} и i_{k3} имеют одно направление, а ток i_{k2} – противоположное. Принимая во внимание усиление каскадов, следует отметить, что $i_{k1} + i_{k3} > i_{k2}$. При этом мгновенное напряжение ΔU на сопротивлении R_b принимает знак, соответствующий напряжению, создаваемому суммарным током. Напряжение на сопротивлении R_b имеет полярность, одинаковую с напряжением ΔU на сопротивлении коллекторной нагрузки транзистора $VT1$, и поэтому будет с ним суммироваться. Следовательно, напряжение на базе транзистора $VT2$ возрастает, а в усилителе возникает положительная обратная связь, которая может вызвать самовозбуждение схемы

Для предотвращения самовозбуждения через общий источник питания используются так называемые развязывающие фильтры Г-образного типа, состоящие из сопротивлений R_ϕ и емкостей C_ϕ . Такие фильтры включают в коллекторные цепи многокаскадных усилителей в соответствии со схемой, приведенной на рис. 12.25.

Сопротивления R_ϕ имеют величину порядка одного килоома, а значение емкости C_ϕ – от десятых до сотых долей микрофарады.

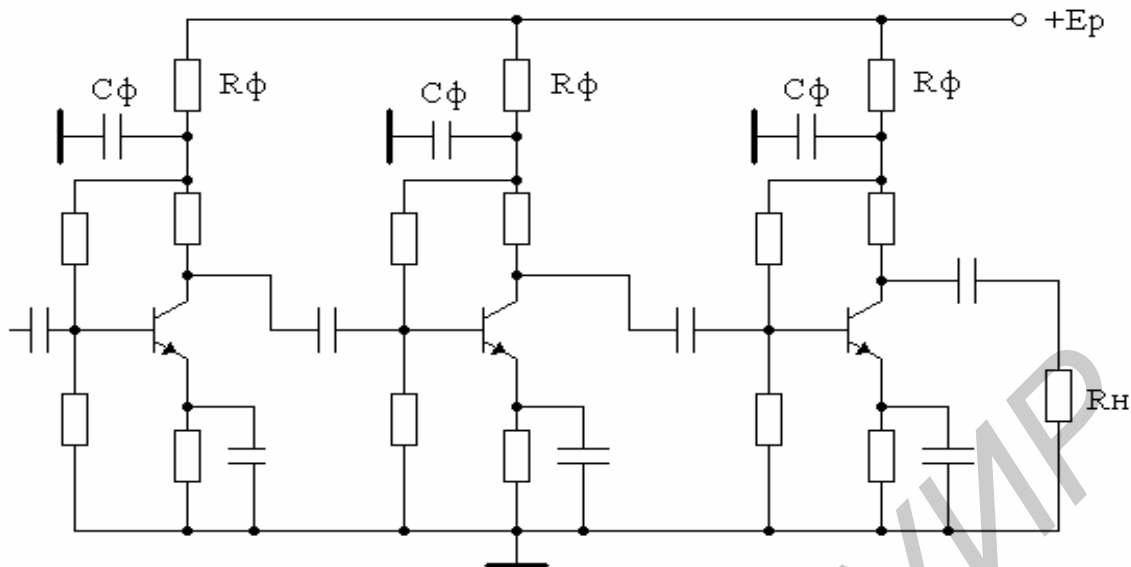


Рис. 12.25. Устранение влияния цепи обратной связи на устойчивость усилителя

12.5. Анализ работы усилителя при больших уровнях входного сигнала (нелинейное усиление)

Выше был проведен анализ работы усилителя в малосигнальном приближении, т.е. считалось, что рабочая точка хотя и смещается по вольт-амперной характеристике, но не настолько, чтобы сказывалась нелинейность этих характеристик и появлялись новые частоты в спектре выходного сигнала. Рассмотрим теперь работу усилителя при таких уровнях входного сигнала, когда нелинейный элемент работает с отсечкой протекающего по нему тока.

12.5.1. Усилитель при большом уровне входного сигнала

Заменим (аппроксимируем) вольт-амперную характеристику ломаной прямой и будем считать, что на вход усилителя подается постоянное напряжение (смещение) U_0 и гармоническое колебание (рис. 12.26):

$$U_{BX} = U_0 + U_m \cos \omega t. \quad (12.42)$$

Уравнение ломаной прямой, аппроксимирующей вольт-амперную характеристику активного элемента усилителя, запишем в виде совокупности уравнений

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq U_H; \\ Su + I & \text{при } u > U_H, \end{cases}$$

(12.43)

где U_H – напряжение запирающего активного элемента; S – крутизна вольт-амперной характеристики; I – ордината точки пересечения аппроксимирующей прямой с осью ординат.

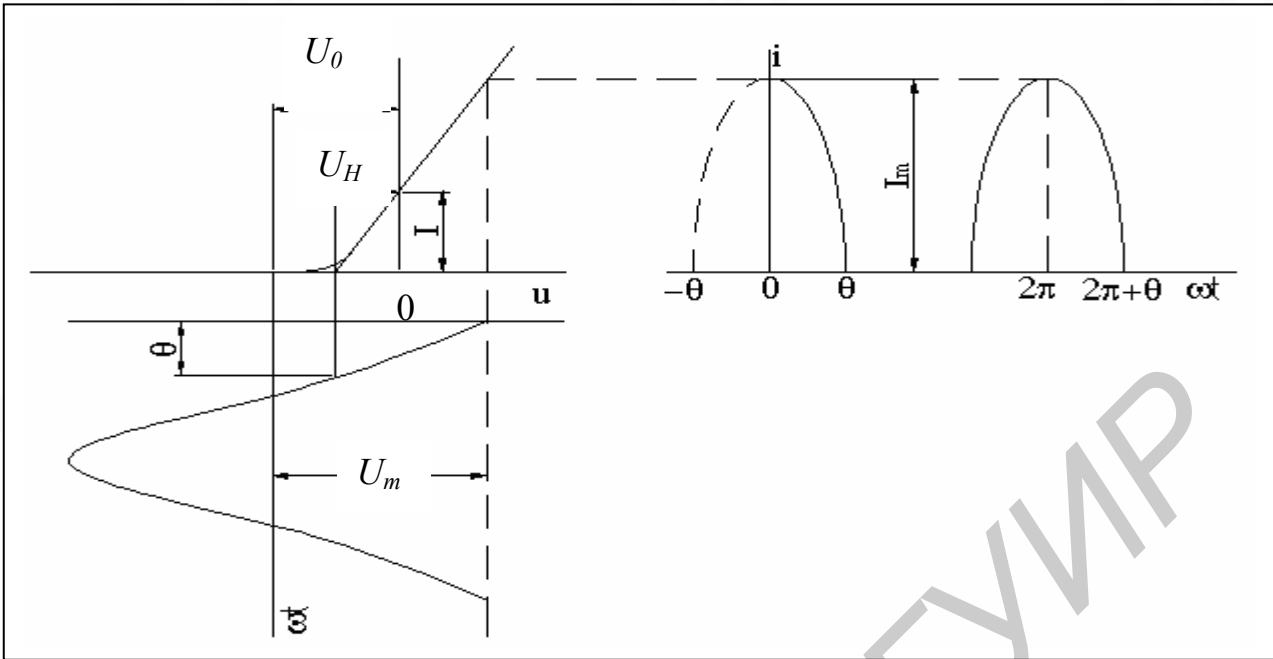


Рис. 12.26. Усиление при большом уровне входного сигнала

Форму тока, протекающего через активный элемент усилителя, можно построить графически, как это сделано на рис.12.26, но можно описать и аналитически, подставив (12.42) в (12.43), а именно:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } u \leq U_H; \\ S(U_0 + U_m \cos \omega t) + I & \text{при } u > U_H. \end{cases} \quad (12.44)$$

Из (12.44) определим фазу входного гармонического колебания, при которой прекращается ток через активный элемент (так называемый угол отсечки θ). Для этого в (12.44) положим $\omega t = \theta$ для $i = 0$. Имеем

$$0 = S(U_0 + U_m \cos \theta) + I, \quad (12.45)$$

откуда

$$\cos \theta = -\frac{SU_0 + I}{SU_m}. \quad (12.46)$$

С учетом (12.42) и (12.46) соотношение (12.44) можно записать в таком виде:

$$i = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta \leq \omega t \leq 2\pi - \theta; \\ SU_m(\cos \omega t - \cos \theta) & \text{при } 0 < \omega t < \theta, 2\pi - \theta < \omega t < 2\pi. \end{cases} \quad (12.47)$$

Из (12.47) легко установить максимальное значение тока, протекающего через активный элемент:

$$I_m = SU_m(1 - \cos \theta). \quad (12.48)$$

Найдем спектр выходного сигнала, которым является ток, определяемый выражением (12.47). Так как входное воздействие описывается четной функцией, то спектр выходного сигнала можно записать в виде ряда Фурье:

$$i(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n\omega t, \quad (12.49)$$

где

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(t) d\omega t, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(t) \cos n\omega t d\omega t. \quad (12.50)$$

Так как подынтегральное выражение отлично от нуля только при $-\theta \leq \omega t \leq \theta$, то интегрирование будем проводить от $-\theta$ до $+\theta$. Для постоянной составляющей имеем

$$I_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\sin \theta - \theta \cos \theta). \quad (12.51)$$

Величину первой гармоники выходного тока оценим по выражению

$$I_{1m} = a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} SU_m (\cos \omega t - \cos \theta) d\omega t = \frac{SU_m}{\pi} (\theta - \sin \theta \cos \theta). \quad (12.52)$$

Вообще для n -й гармоники выходного тока ($n > 1$) можем получить

$$I_{nm} = a_n = \frac{2SU_m \sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{\pi n(n^2 - 1)}. \quad (12.53)$$

Определив из (12.48) величину SU_m , вместо (12.51) – (12.53) получаем:

$$I_0 = \alpha_0 I_m, \quad (12.54)$$

$$I_{1m} = \alpha_1 I_m, \quad (12.55)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$I_{nm} = \alpha_n I_m, \quad (12.56)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (12.57)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{1 - \cos \theta}, \quad (12.58)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_{n, n>1} = \frac{1}{\pi} \frac{\sin n\theta \cos \theta - n \cos n\theta \sin \theta}{n(n^2 - 1)(1 - \cos \theta)}. \quad (12.59)$$

Коэффициенты $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ представляют собой функции одного переменного и называются функциями А.И. Берга. Эти функции табулированы. Графики функций $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ приведены на рис. 12.27.

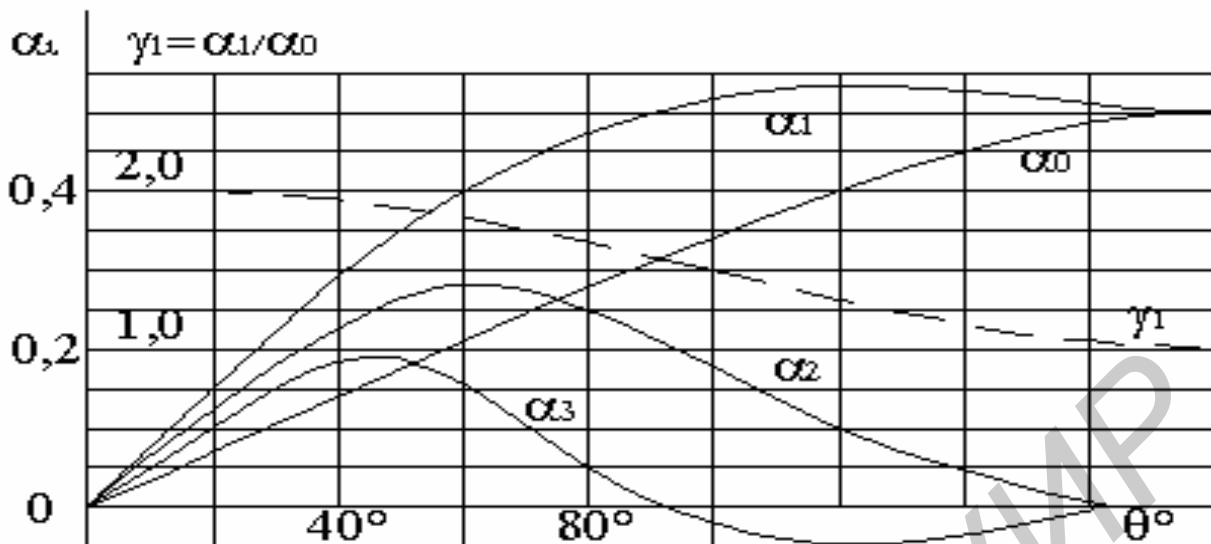


Рис. 12.27. Графики функций А.И. Берга

12.5.2. Методика расчета спектра выходного тока нелинейного усилителя

Исходя из вышеизложенного, расчет спектра выходного тока усилителя, работающего с отсечкой, можно проводить в такой последовательности:

- по заданной вольт-амперной характеристике и параметрам входного сигнала по (12.46) вычислим угол отсечки;
- по формуле (12.48) оценим величину I_m и значения коэффициентов А.И.Берга;
- по формулам (12.54)–(12.56) находим амплитуды спектральных составляющих.

Пример 12.1. Кусочно-линейная аппроксимация проходной характеристики транзистора определяется параметрами: крутизна линейной части $S = 10 \text{ mA/V}$, напряжение, соответствующее точке излома, $U_H = 0,5 \text{ В}$. К этому транзистору приложено напряжение $u = 0,5 + 2 \cos \omega t, \text{ В}$. Оценить спектральный состав тока, протекающего через транзистор.

В соответствии с методикой расчета выходного тока нелинейного усилителя вычислим сначала величину угла отсечки. По формуле (12.46) имеем

$$\cos \theta = - \frac{SU_0 + I}{SU_m} = - \frac{10 \cdot 0,5 + (-5)}{10 \cdot 2} = 0,$$

откуда $\theta = 90^\circ$.

По формуле (1.48) найдем величину $I_m = 20 \text{ mA}$.

По формулам (12.57)–(12.59) или по графикам, приведенным на рис.12.27, получаем $\alpha_0 = 0,32$, $\alpha_1 = 0,50$, $\alpha_2 = 0,20$, $\alpha_3 = 0$.

По формулам (12.54)–(12.56) получаем $I_{0m} = 6,4 \text{ mA}$, $I_{1m} = 10 \text{ mA}$, $I_{2m} = 4,0 \text{ mA}$, $I_{3m} = 0$.

12.5.3. КПД нелинейного усилителя

Согласно (12.5) КПД усилителя

$$\eta = \frac{P_H}{P_0} = \frac{\frac{1}{2}U_{1m}I_{1m}}{E_k I_{0m}} = \frac{1}{2}\xi\gamma_1, \quad (12.60)$$

где $\gamma_1 = \frac{I_{1m}}{I_{0m}}$, а $\xi = \frac{U_{1m}}{E_k}$ – отношение амплитуды первой гармоники выходного напряжения к напряжению источника питания, называемое коэффициентом использования активного элемента усилителя по источнику питания.

Величина ξ в лучшем случае может достигать значений, близких к единице, и поэтому будем считать, что $\xi = 1$. Тогда КПД будет определяться величиной отношения γ_1 . Учитывая (12.54), (12.55), для γ_1 имеем

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\theta - \cos\theta \sin\theta}{\sin\theta - \theta \cos\theta}. \quad (12.61)$$

Чтобы построить график этой функции, оценим величину γ_1 для трёх значений угла отсечки, равных θ , $\pi/2$ и π . Из графика γ_1 (см. рис. 12.27) видно, что γ_1 уменьшается с увеличением угла отсечки. Это значит, что величина КПД нелинейного усилителя тем выше, чем с меньшим углом отсечки он работает. Однако при очень маленьких углах отсечки абсолютная величина выходной мощности получается невысокой. Поэтому в практических схемах угол отсечки устанавливают вблизи $\pi/2$, тогда КПД усилителя является еще достаточно высоким ($\approx 75\%$). Кроме того, важно отметить, что при $\theta \approx \pi/2$ все нечетные гармоники (за исключением первой) в спектре выходного сигнала обращаются в нуль. Таким образом, нелинейный усилитель характеризуется высокими энергетическими показателями при $\theta \approx \pi/2$, и в спектре выходного сигнала отсутствуют высшие нечетные гармоники. Если удастся устранить наличие четных гармоник входного сигнала, то нелинейный усилитель будет работать без искажений и с высоким КПД. Эта задача решается правильным проектированием схемы усилителя, например, применением двухтактных схем.

12.5.4. Двухтактные схемы

Двухтактная схема (рис. 12.28) представляет собой усилитель, работающий с углом отсечки $\theta \approx \pi/2$, на входы которого подаются противофазные напряжения. Токи, протекающие в активных элементах, можно представить графически. Гармонический анализ токов в двухтактной схеме проведён графически (рис. 12.29). Из рис. 12.29 следует, что первые гармоники токов i' и i'' , будучи противофазными вследствие двухтактного включения активных элементов усилителя, суммируются в нагрузке, создавая в ней ток удвоенной амплитуды.

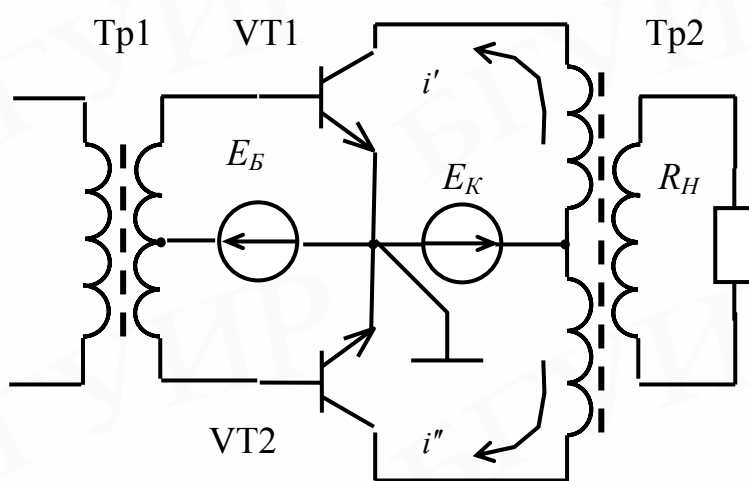


Рис. 12.28. Упрощенная схема двухтактного усилителя

Четные гармоники токов i' и i'' синфазны, и так как по отношению к нагрузке токи i' и i'' протекают в противоположных направлениях, то в нагрузке проявляться не будут, компенсируя друг друга. Амплитуды нечетных гармоник порядка выше первого при $\theta \approx \pi/2$ равны нулю. Поэтому при хорошей симметрии схемы спроектированный двухтактный усилитель

не вносит значительных искажений и характеризуется высоким КПД.

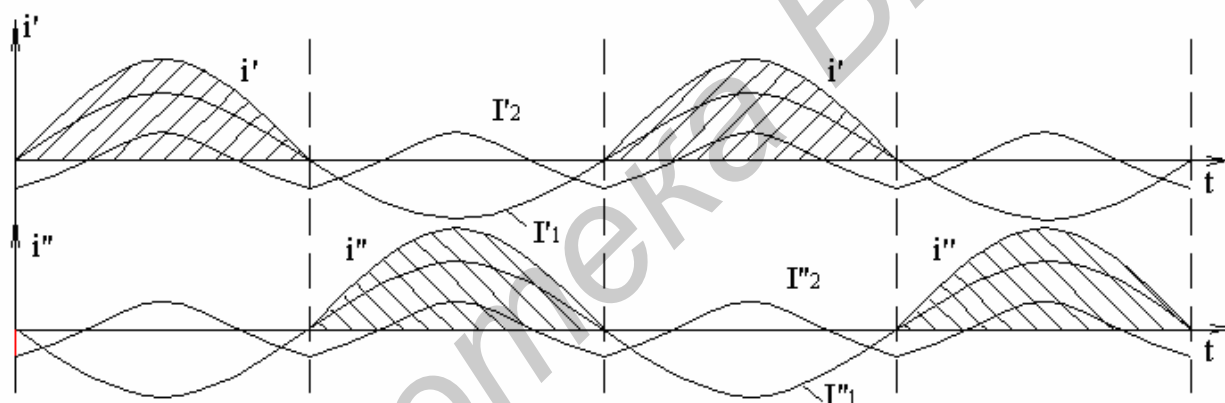


Рис. 12.29. Гармонический анализ токов в двухтактной схеме

В цветных телевизорах выходные каскады кадровой развертки выполняются по двухтактной схеме с непосредственным (бестрансформаторным) выходом.

Пример упрощенной схемы такого каскада показан на рис.12.30. Импульсное напряжение, имеющее пилообразную форму, через парафазный усилитель, собранный на транзисторе $VT1$, подается в противофазных полярностях на базы транзисторов $VT2$ и $VT3$. Когда открыт транзистор $VT2$, его током заряжается конденсатор C_p .

Транзистор $VT3$ при этом закрыт. Когда транзистор $VT2$ закрывается и начинает работать транзистор $VT3$, источником напряжения питания для него служит заряженный конденсатор C_p . Протекающий в отклоняющих катушках ток $I_K = I_1 + I_2$, где I_1, I_2 – токи поочередно работающих транзисторов $VT1$ и $VT2$.

Заметим, что выходные каскады кадровой развертки, кроме выполнения своей основной функции, обеспечивают электрическую центровку раstra по

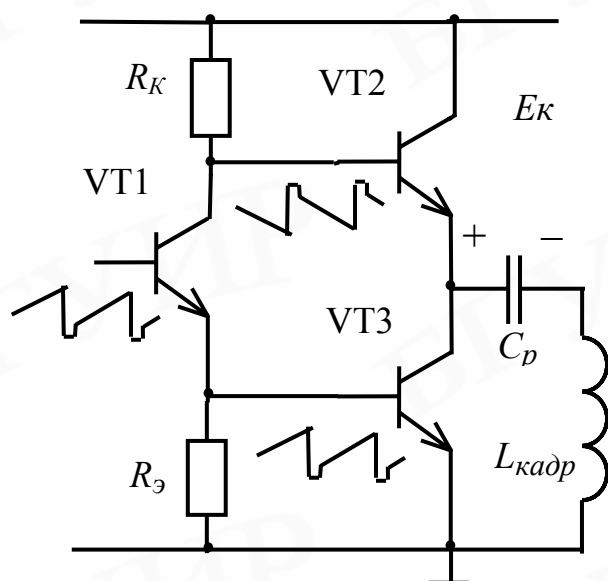


Рис. 12.30. Упрощенная схема выходного каскада кадровой развертки

усилитель, работающий с отсечкой коллекторного тока, в качестве умножителя частоты. Для этого не требуется производить каких-либо изменений в схеме резонансного усилителя. Достаточно настроить нагрузочный колебательный контур на частоту выделяемой гармоники и установить режим работы нелинейного элемента, наиболее выгодный для подчеркивания полезной гармоники. Из графиков функций А.И. Берга можно установить оптимальные углы отсечки. Например, в случае удвоения частоты выгодно работать с углом отсечки, близким к 60° , при котором коэффициент α_2 проходит через максимум, а в случае утроения следует устанавливать угол отсечки равным 40° . Оптимальный угол отсечки можно рассчитывать по соотношению $\theta_{opt} = 120^\circ / n$, где n – порядок умножения частоты.

Для режима умножения частоты характерна работа с большими базовыми напряжениями. Это обстоятельство наряду со снижением полезной мощности при повышении порядка умножения из-за убывания коэффициентов α_i , заставляет в передатчиках ограничиваться удвоением или утроением частоты в одной ступени.

Умножение частоты широко применяется в ряде измерительных устройств, когда нужно получить сетку частот, кратных какой-либо одной определенной частоте, рассматриваемой в качестве опорной. В подобных системах часто используется транзистор или электронная лампа, работающие с очень малым углом отсечки. Подавая на базу транзистора или сетку лампы достаточно большое переменное напряжение, при большом смещении можно

вертикали путем изменения постоянной составляющей отклоняющего тока, получение напряжения питания ускоряющего электрода кинескопа, управление работой ряда узлов телевизора.

Двухтактные схемы используются также в выходных каскадах модуляторов, где энергетические показатели являются существенными.

12.5.5. Умножение частоты

Наличие в составе импульсного коллекторного тока гармоник с частотами, кратными основной частоте возбуждения, позволяет использовать

получить ток в виде последовательности остроконечных импульсов. Такой ток богат гармониками, образующими линейчатый спектр.

В передатчиках и гетеродинах приемников часто применяют умножение частоты в целое число раз. Особенно часто это делают при кварцевой стабилизации частоты. Дело в том, что из-за малой механической прочности трудно изготовить кварцевую пластинку для колебаний частотой порядка 10 МГц, в то время как частота задающего генератора со стабилизированной частотой может превышать 300 МГц. Поэтому возникает необходимость умножения частоты.

Умножитель частоты представляет собой резонансный усилитель с контуром, настроенным на гармонику входного сигнала. На практике используют удвоители и значительно реже утроители частоты, так как большие коэффициенты умножения снижают эффективность умножителей частоты по ряду причин. Дело в том, что при большом коэффициенте умножения угол отсечки получается небольшим и его трудно поддерживать постоянным на этом уровне. Величина соответствующей гармоники получается небольшой, вследствие чего снижаются энергетические показатели умножителя.

Кроме того, для автоматического поддержания постоянства амплитуды гармоники, выделяемой умножителем, при изменении режима питания, старении кварцев желательнее работать при углах отсечки, которые больше энергетически оптимальных. Действительно, если амплитуда колебаний на входе умножителя уменьшится, то амплитуда n -й гармоники входного сигнала, определяемая формулой (12.56), изменится незначительно вследствие уменьшения I_m , в то время, как коэффициент α_n увеличится и приблизится к значению α_{opt} .

Пример 12.2. По условию предыдущей задачи найти оптимальное значение смещения, обеспечивающего удвоение частоты входного сигнала.

Из графиков функций А.И. Берга видим, что оптимальным для удвоения частоты является режим усиления с углом отсечки $\theta = 60^\circ$, так как именно при этом угле отсечки вторая гармоника достигает максимального значения. Для расчета необходимой величины смещения составим уравнение

$$\cos \theta = - \frac{SU_0 + I}{SU_m} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда получаем $U_0 = -0,5 \text{ В}$.

Пример 12.3. Во многих УКВ-радиостанциях осуществляется умножение частоты в $2 \times 3 \times 3 = 18$ раз. Постройте эффективную схему умножителя, т.е. решите задачу построения структурной схемы умножителя частоты в 18 раз путем выбора самого благоприятного случая из $2 \times 3 \times 3$, $3 \times 3 \times 2$ и $3 \times 2 \times 3$.

12.5.6. Режимы работы усилителя

В зависимости от положения рабочей точки в режиме покоя на сквозной динамической характеристике транзистора, а также значения усиливаемого напряжения различают три основных режима работы усилительных каскадов,

или классов усиления: А, В и С. Основными характеристиками этих режимов являются нелинейные искажения и КПД.

Режим А характеризуется тем, что рабочую точку в режиме покоя выбирают на линейном участке (обычно посередине) сквозной динамической характеристики. Благодаря этому усилитель имеет минимальные нелинейные искажения, однако обладает существенным недостатком – такой усилитель имеет очень низкий КПД.

Режим В характерен для усилителей, работающих с углом отсечки, равным 90° . Такой усилитель имеет более высокий КПД по сравнению с усилителем класса А, так как ток покоя в таком усилителе практически равен нулю, а постоянная составляющая тока при наличии входного напряжения имеет сравнительно небольшое значение. КПД усилителя, работающего в режиме В, может достигать 80 %.

Иногда используют режим работы усилительного каскада, промежуточный между режимами А и В. Его называют режимом АВ. Рабочая точка покоя находится в интервале между положениями рабочей точки в режимах А и В. В этом случае КПД усилителя больше, чем в режиме А, а нелинейные искажения меньше, чем в режиме В.

Режим С характеризуется тем, что рабочую точку выбирают за точкой отсечки и ток в транзисторе возникает только в течение небольшой части положительного полупериода входного напряжения. Этот режим сопровождается большими искажениями усиливаемого напряжения, но КПД устройства может быть очень высоким и достигать почти 100 %.

12.6. Многокаскадные транзисторные усилители

Приступая к расчету усилителя, конструктор исходит из данных о необходимом усилении и допустимой величине искажений, которые может приобрести сигнал в устройстве. Выбор числа каскадов и их схем представляет в значительной степени творческую задачу, не имеющую однозначного решения, ибо заданные технические требования на усилители можно выполнить не единственным способом.

Не существует также единого критерия, позволяющего оценить, насколько оптимально предложенное решение. В одних случаях этот критерий может включать требования минимального числа каскадов, в других – наименьшего потребления энергии, в третьих – минимальных искажений и т.д. Однако, какими бы идеями ни руководствовался конструктор, перед ним всегда встает вопрос, как распределить искажения, допускаемые на весь усилитель, между его отдельными каскадами. От этого зависит выбор как схемы каждого каскада, так и ее элементов.

Ответ на это дает знание законов суммирования искажений в многокаскадных усилителях. Установление таких законов суммирования является одним из основных вопросов теории усилителей, однако до настоящего времени он еще не получил полного разрешения. Поэтому мы рассмотрим только основные сведения по суммированию искажений и рекомендации, которые из них вытекают.

12.6.1. Структурная схема многокаскадного усилителя

Структурная схема многокаскадного усилителя представляет собой последовательное соединение n однокаскадных усилителей. Результирующая частотная характеристика такого усилителя

$$K(i\omega) = \prod_{j=1}^{j=n} K_j(i\omega). \quad (12.62)$$

Для упрощения усилительного устройства, унификации его узлов и удешевления производства обычно стремятся выполнить все его каскады идентичными. Исключение из этого правила делается для выходного каскада. Требования большой амплитуды выходного сигнала или выходной мощности, работы на заданную нагрузку и т.д. – все это существенно отличает окончательный каскад от каскадов предварительного усиления. В выходных каскадах приходится допускать большие частотные искажения. Оценив, при каких допустимых частотных искажениях в выходном каскаде его можно осуществить достаточно экономичным образом, оставшиеся частотные искажения делят между остальными каскадами равномерно.

Ориентировочное число каскадов транзисторного усилителя при предварительном расчете выбирают из того, что коэффициент усиления одного каскада обычно составляет величину 15...20 дБ.

12.6.2. Схемотехника межкаскадных связей

Связь между отдельными каскадами может быть реостатно-емкостной, трансформаторной или непосредственной (гальванической). Реостатно-емкостная связь используется главным образом в каскадах предварительного усиления. Анализ такого усилителя (рис. 12.12) был проведен выше.

Трансформаторная связь чаще всего применяется между предпоследним и окончательным каскадами для связи окончательного каскада с нагрузкой, а также в избирательных УВЧ.

Выходное сопротивление каскадов с общей базой и общим эмиттером, как правило, всегда больше входного сопротивления. Поэтому для согласования выходного сопротивления предыдущего каскада с входным сопротивлением последующего необходимо использовать понижающий трансформатор.

В каскадах УВЧ используют трансформаторные и автотрансформаторные схемы связи контура с цепями транзистора, так как низкое входное сопротивление транзистора оказывает сильное шунтирующее действие на контур предшествующего каскада, вследствие чего резко падает усиление предыдущего каскада и ухудшаются его избирательные свойства.

На рис. 12.31 показана схема резонансного УВЧ, связь между каскадами которого осуществляется трансформаторным путем. Отметим, что здесь может

использоваться неполное включение контура в коллекторной цепи, если выходное сопротивление транзистора недостаточно велико.

Гальваническая связь между каскадами используется в УПТ и содержит элементы, проводящие постоянный ток. Простейшие схемы усилителя с гальванической связью изображены на рис. 12.32. Левый транзистор схемы рис. 12.32, а работает как эмиттерный повторитель, обеспечивая большое входное сопротивление схемы. Усиление напряжения обеспечивается правым транзистором. В схеме рис. 12.32, б коллекторные токи обоих транзисторов синфазны, что позволяет пропустить токи через общую нагрузку и поднять этим усиление напряжения.

Для усилителей на транзисторах, работающих при малых напряжениях на электродах транзистора, наиболее подходящим элементом межкаскадной связи

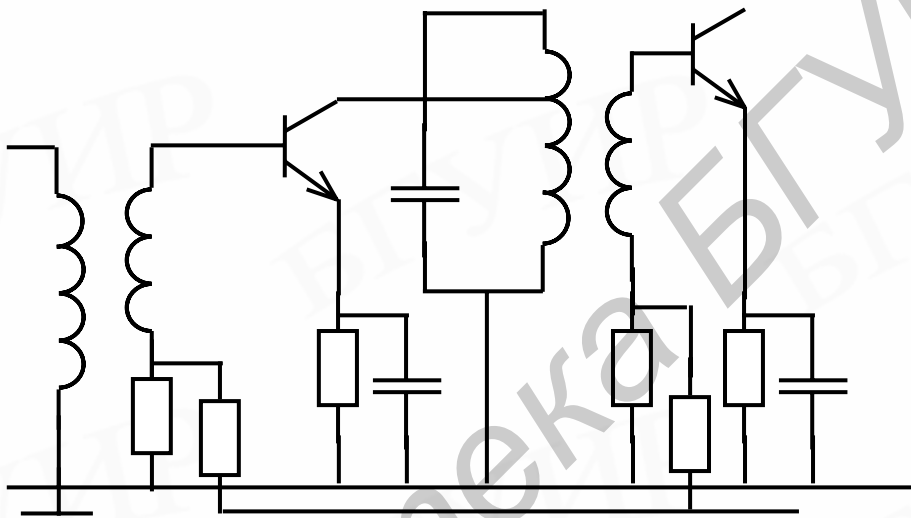


Рис.12.31. Резонансный усилитель с трансформаторной связью между каскадами

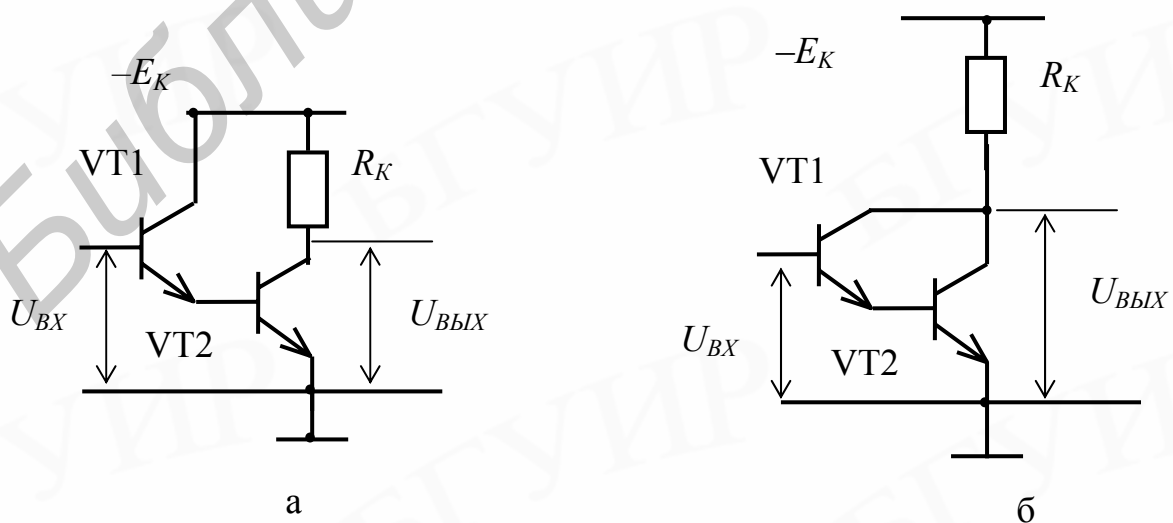


Рис. 12.32. Гальваническая связь между каскадами:
а – схема с эмиттерным повторителем, б – схема с составным транзистором

является полупроводниковый стабилитрон (например Д808, рис. 12.33). В таких каскадах обычно можно обойтись только одним источником питания, рассчитывая величины резисторов R_1, R_2 с учетом тока стабилитрона.

Из приведенных схем усилителей постоянного тока видно, что строят их, используя реостатные каскады. Поэтому полоса пропускания и частотные искажения для них рассчитываются так же, как и в обычных реостатных усилителях. Наиболее важным недостатком таких усилителей является существенное влияние на постоянную составляющую усиленного напряжения неизбежных изменений в положение рабочей точки каждого из активных элементов.

В многокаскадных схемах транзисторных усилителей широкое применение находят дифференциальные усилители. На рис. 12.34. приведена схема дифференциального УПТ с симметричным входом и симметричным выходом. Усиливаемый сигнал подводится к базам транзисторов, а усиленный выделяется на резисторе R_H .

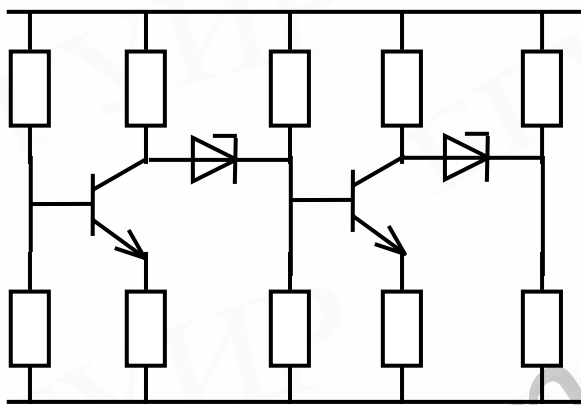


Рис. 12.33. Усилитель
с межкаскадной связью
на стабилитронах

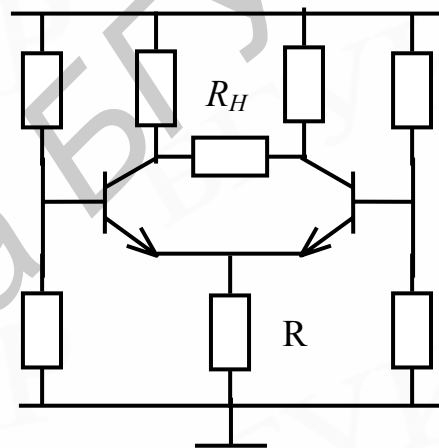


Рис. 12.34. Дифферен-
циальный усилитель

Для дифференциальных усилителей характерна высокая стабильность положения рабочей точки активных элементов, повышенное входное сопротивление и малое влияние на параметры усилителя изменения тока эмиттера за счет резистора R в цепи эмиттеров. Примечательно, что резистор R не вызывает отрицательной обратной связи по току, так как с увеличением тока через левый транзистор ток правого транзистора уменьшается и потенциал на эмиттерах триодов остается постоянным. Эти схемы обеспечивают любые варианты симметрии входов и выходов.

12.6.3. Устойчивость работы многокаскадных усилителей

Многокаскадный усилитель содержит большое число различных деталей, объединенных электрической схемой и конструктивным выполнением в некоторое единое устройство. Для компактности устройства его размеры и объем стремятся сделать возможно меньшими. Небольшие расстояния между деталями вызывают появление между ними заметных емкостных и

индуктивных связей. В результате часть энергии усиленных колебаний с выходных элементов схемы передается на детали, находящиеся по электрической схеме в предыдущих каскадах усилителя. При неудачной компоновке отдельных узлов и деталей свойства усилителя могут настолько измениться, что правильно рассчитанный усилитель не будет отвечать поставленным техническим требованиям и даже может самовозбуждаться.

Задачей конструктора является такой выбор решения, при котором все возможные паразитные связи сведены до приемлемого минимума. Строгая количественная оценка паразитных связей затруднена их большим числом, взаимным переплетением, а иногда и не возможностью их точной локализации. Опытным путем выработан ряд мер, правил и рекомендаций, соблюдение которых позволяет надежно бороться с паразитными связями. Однако при самом разумном конструктивном выполнении усилителя сохраняется еще один вид паразитной обратной связи, часто играющей основную роль в изменении свойств усилителя. Этим видом связи является обратная связь, возникающая в усилителе при питании его каскадов от одного общего источника питания. Для ее ослабления широко используют развязывающие фильтры, но это приводит к дополнительному расходу энергии в усилителе и увеличению его габаритов.

12.6.4. Регулировки в усилителях

Усилители электрических сигналов во многих случаях работают в широком динамическом диапазоне входных и выходных сигналов, поэтому они снабжаются регуляторами усиления, позволяющими получить нужную амплитуду выходного сигнала независимо от амплитуды входного сигнала.

Для изменения соотношения амплитуд частотных составляющих на выходе усилителя независимо от соотношения этих амплитуд на его входе усилители снабжаются регуляторами тембра. Регуляторы усиления и тембра могут производить соответствующие изменения плавно или скачками. Ступенчатая регулировка применяется сравнительно редко. Отношение коэффициентов усиления при крайних положениях регуляторов называют глубиной регулировки и выражают в децибелах.

Регуляторы усиления желательно ставить либо во входной цепи, либо в первых предварительных каскадах усилителя, предохраняя усилитель от перегрузок. На рис. 12.35 приведена схема потенциометрического регулятора (резистор $R1$), его достоинствами являются постоянство режима транзистора, на который подается регулируемый сигнал, и сравнительно высокая глубина регулировки (30...40 дБ). Недостатком регулятора является наличие большой разделительной ёмкости, так как в противном случае на низких частотах при сильном ослаблении входного сигнала получаются большие частотные искажения. На высших частотах частотные искажения максимальны также при сильном ослаблении входного сигнала. Это происходит из-за влияния входной емкости транзистора.

Регулирование частотных характеристик усилителей производят цепочкой, сопротивление которой изменяется в зависимости от частоты

сигнала. В транзисторных усилителях из-за низкого входного сопротивления очень трудно регулировать тембр, поэтому регуляторы следует ставить между входом обычного каскада и входом эмиттерного повторителя.

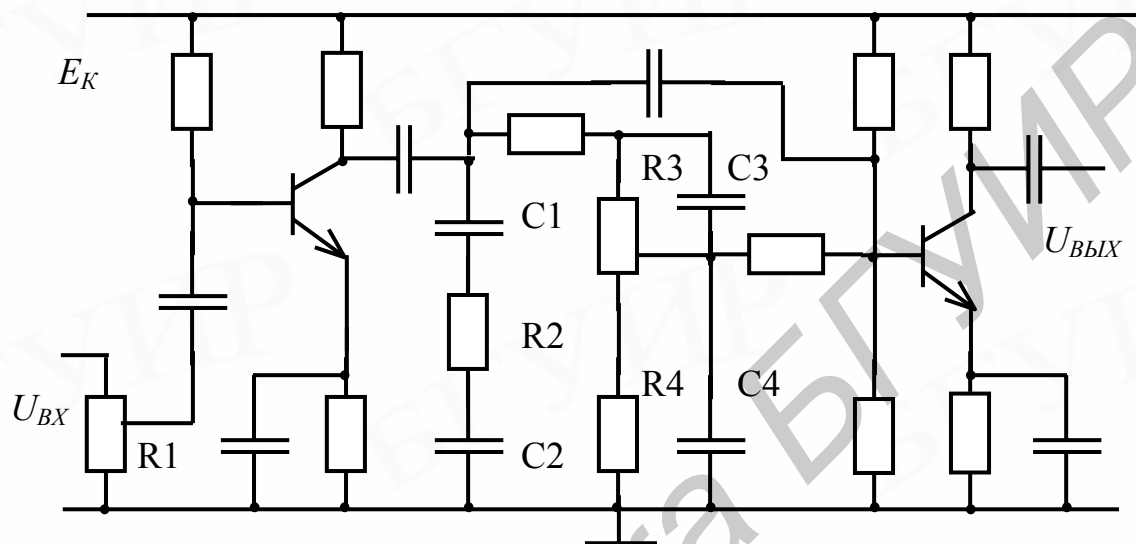


Рис. 12.35. Регулировка усиления и тембра в усилителе низкой частоты

На рис. 12.35 цепь, состоящая из $C1, R2, C2$, служит для регулировки высоких частот, а цепь $R3, R4, C4$ – для регулировки низких частот. Если не нужно регулировать частотную характеристику в широких пределах, то можно применять и более простые схемы регуляторов тембра.

12.6.5. Схемотехника операционных усилителей (ОУ)

Усилители, позволяющие выполнять операции суммирования, интегрирования, дифференцирования и логарифмирования, представляют основу аналоговых вычислительных машин. Используемые обычно для этих целей усилители постоянного тока, помимо малого дрейфа, должны иметь большой коэффициент усиления и допускать охват их глубокой обратной связью без нарушения устойчивости.

ОУ – это усилители постоянного тока с дифференциальным входом, обладающие весьма большим коэффициентом усиления (до 100 дБ), широкой полосой пропускания (от постоянного тока до 100 МГц), высоким (до 100 МОм) входным и низким (десятки ом) выходным сопротивлениями.

Условное обозначение ОУ и назначение его основных выводов показаны на рис. 12.36. Вход I, обозначенный на схеме знаком «о», называют инвертирующим, так как изменения выходного сигнала ОУ противоположны

по знаку изменениям сигнала на этом входе. Вход 2 называют неинвертирующим. Изменения выходного сигнала ОУ совпадают по фазе с изменениями сигнала на этом входе.

Для получения выходного напряжения как положительной, так и отрицательной полярности ОУ питают от двух разнополярных источников напряжения. Это дает также возможность получить нулевой уровень выходного напряжения при отсутствии входного сигнала.

На входы ОУ можно подавать сигналы от одного источника с незаземленным выходом или от двух разных источников, имеющих одну общую точку. В любом случае входным напряжением ОУ является разность входных сигналов.

Коэффициент усиления напряжения ОУ определяют как отношение приращения выходного напряжения к вызвавшему это приращение значению входного напряжения. Частота входного сигнала, при которой коэффициент усиления уменьшается на 3 дБ (1,4 раза) по сравнению с его значением на низших частотах, определяет верхнюю границу полосы пропускания усилителя.

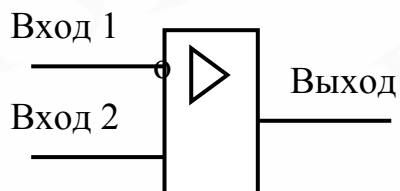


Рис. 12.36.
Условное
обозначение
операционного

Напряжение на входе ОУ может быть сравнительно небольшим (единицы милливольт) в то время, как напряжение на каждом из входов (по отношению к общему проводу) может достигать нескольких вольт.

Если амплитуда и фаза напряжений на входах ОУ (также по отношению к общему проводу) совпадают, их называют синфазными входными напряжениями. Значение синфазного входного напряжения принимается равным полусумме напряжений на входах ОУ.

Отношение приращения входного напряжения к приращению активной составляющей входного тока на заданной частоте сигнала называют входным сопротивлением. Это сопротивление следует отличать от входного сопротивления ОУ для синфазных входных напряжений, которое определяется как отношение приращения синфазных входных напряжений к приращению активной составляющей среднего входного тока на заданной частоте сигнала.

Идеальный ОУ обрабатывает изменения только дифференциального входного сигнала и не реагирует на изменения синфазного напряжения. В реальных же ОУ изменение синфазного входного напряжения вызывает изменение (правда, весьма незначительное) выходного напряжения. Способность ОУ отличать дифференциальный входной сигнал от изменений синфазного напряжения является одной из его важнейших характеристик. Количественно эта способность называется коэффициентом ослабления синфазных входных напряжений, равным отношению коэффициента усиления ОУ к его коэффициенту усиления синфазных входных напряжений.

Важнейшим выходным параметром ОУ является максимальное выходное напряжение, т.е. наибольшее неискаженное напряжение при определенном входном напряжении и заданном сопротивлении нагрузки. Для некоторых

типов ОУ это напряжение может быть различным для положительной и отрицательной полярности сигнала.

Принципиальная схема одного из простейших интегральных ОУ К1УТ401 приведена на рис. 12.37.

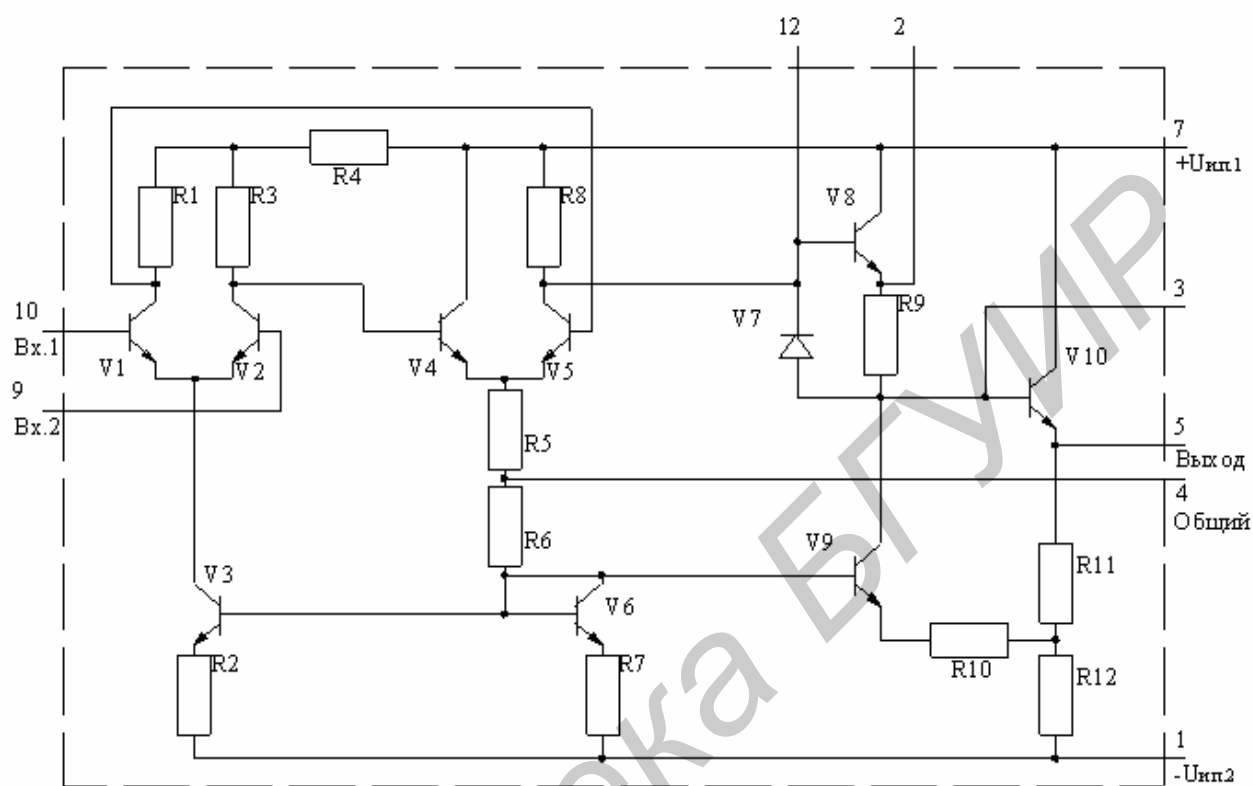


Рис. 12.37. Принципиальная схема операционного усилителя К1УТ401

Первый дифференциальный каскад выполнен на транзисторах $V1$, $V2$. Эмиттерные токи этих транзисторов стабилизированы генератором тока на транзисторах $V3$, $V6$, причем последний (его коллекторный переход замкнут накоротко) использован в качестве термостабилизирующего диода.

Усиленный полный дифференциальный сигнал, выделяющийся на коллекторах транзисторов $V1$, $V2$, поступает на вход второго дифференциального каскада, выполненного на транзисторах. Переход от дифференциального выхода первого каскада к одиночному выходу второго осуществляется за счет включения транзистора $V4$ по схеме эмиттерного повторителя. При этом выходной сигнал, снимаемый с коллектора транзистора $V1$, изменяет (например увеличивает) потенциал базы транзистора $V5$, а сигнал с коллектора транзистора $V2$ (через эмиттерный переход транзистора $V4$) уменьшает потенциал эмиттера транзистора. Иными словами, к эмиттерному переходу этого транзистора приложен практически полный выходной сигнал первого каскада.

С коллектора транзистора $V5$ усиленный сигнал поступает на вход следующего каскада, выполненного на транзисторе $V8$. Через резисторы $R5$ и

R6 осуществляется обратная отрицательная связь до синфазному сигналу с эмиттеров транзисторов *V4*, *V5* на базу транзистора *V3*.

Напряжение, подаваемое на вход эмиттерного повторителя на транзисторе *V8*, не равно нулю даже при отсутствии сигнала на входе ОУ. Выходное же напряжение ОУ в этом случае, как уже говорилось, должно быть равно нулю. Смещение уровня поступающего напряжения при переходе от одиночного выхода второго дифференциального каскада ко входу оконечного (*V10*) происходит за счет подачи напряжения на резистор *R9*, через который течет строго определенный ток. Требуемая величина и стабильность этого тока обеспечиваются генератором тока, выполненным на транзисторе *V9*. Упомянутый ранее транзистор *V6* выполняет функции термостабилизирующего диода и для этого генератора.

В большинстве случаев ОУ используют с внешней отрицательной обратной связью с выхода на вход. Для обеспечения устойчивой работы, т.е. для исключения возможности самовозбуждения ОУ, охваченного обратной связью, необходимо, чтобы произведение его коэффициента усиления на коэффициент передачи цепи обратной связи было меньше единицы на частоте, при которой фазовый сдвиг в ОУ превышает 180° . Выводы 2, 3, 12 интегрального ОУ К1УТ401 предназначены для подключения внешних корректирующих цепей, обеспечивающих соблюдение этого условия.

В структуре рассмотренного усилителя можно выделить три основные части: дифференциальные каскады усиления напряжения, каскад сдвига уровня напряжения и выходной каскад усиления мощности. По такой структурной схеме построены все выпускаемые в настоящее время ОУ широкого применения. Различие между ними заключается лишь в соотношении составных частей.

В процессе эволюции схемотехнических и технологических решений был создан целый ряд интегральных схем операционных усилителей, которые можно разделить на четыре группы.

Основные ОУ – *общего применения (универсальные)* К153УД2, К140УД6, К140УД7, К553УД2, К544УД1, К1409УД1 и другие. Они позволяют строить узлы радиоэлектронной аппаратуры, имеющие суммарную погрешность порядка 1 %. Существуют конструкции интегральных схем, которые объединяют в одном корпусе несколько ОУ общего применения: двухканальные К140УД20, К551УД2, микросхема К1401УД1 содержит в одном корпусе четыре ОУ.

Прецизионные (измерительные) ОУ К153УД5, К553УД5, К140УД17 имеют коэффициент усиления порядка 10^6 . Они гарантируют малый уровень шумов, что дает возможность реализовать узлы с погрешностью порядка десятых долей процента.

Быстродействующие ОУ К140УД11, К544УД2 и другие имеют дополнительно высокочастотный канал и предназначены для построения широкополосных и быстродействующих узлов.

Микро мощные ОУ К153УД4, К154УД1 и другие потребляют от источника питания ток менее 1 мА и могут продолжительное время работать с питанием от автономного источника.

Большинство ОУ выпускается в круглом корпусе с восемью выводами и одинаковым их расположением, что облегчает их замену. Выпускаются ОУ и в пластмассовом корпусе (КР140УД1), в керамическом корпусе (КМ551УД2). Существуют ОУ и в гибридно-пленочном исполнении (К284УД2), в бескорпусном, например серии К740.

Библиотека БГУИР

Св. план 2003, резерв

Учебное издание

Першин Виктор Тихонович

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ И СХЕМОТЕХНИКИ

Учебное пособие
для студентов специальностей
«Микро-и нанoeлектронные технологии и системы»,
«Моделирование и компьютерное проектирование радиоэлектронных средств»,
«Проектирование и производство радиоэлектронных средств»,
«Экономика и организация производства»,
«Маркетинг» всех форм обучения

В 2-Х ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 1

Редактор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 29.11.2005.
Гарнитура «Таймс».
Уч.-изд. л. 9,3.

Формат 60x84 1/16.
Печать ризографическая.
Тираж 250 экз.

Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 10,11.
Заказ 262.

Издатель и полиграфическое исполнение: Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Лицензия на осуществление издательской деятельности №02330/0056964 от 01.04.2004.
Лицензия на осуществление полиграфической деятельности №02330/0131518 от 30.04.2004.
220013, Минск, П. Бровки, 6