Mathématiques 2

Présentation du sujet

Le sujet de cette année introduit à la transformation de Fourier des variables aléatoires réelles. On associe à la variable aléatoire X une fonction d'une variable réelle $t \mapsto \phi_X(t)$ appelée *fonction caractéristique*. Dans le cas de variables aléatoires à densité, on obtient effectivement la transformée de Fourier (inverse) de la densité, mais le cas étudié par le problème est celui des variables aléatoires discrètes. Des parties importantes du programme d'analyse sont ainsi abordées : intégrales dépendant d'un paramètre, formule de Taylor, séries entières, variables aléatoires discrètes.

Analyse globale des résultats

L'énoncé assez élémentaire laissait peu de place à l'initiative et certains candidats ont bien fait l'effort de justifier les propriétés utilisées. De trop nombreuses copies, en revanche, ne découpent pas suffisamment les raisonnements, donnant trop d'arguments tout en omettant parfois les arguments cruciaux. De telles productions, laissant au correcteur le soin de sélectionner les arguments réellement utiles, ont été logiquement sanctionnées. Rappelons la simple nécessité de justifier chaque étape d'une démonstration par un bref appel aux résultats du cours ou du problème en donnant le numéro de la question invoquée.

Si l'utilisation de la convergence normale et les méthodes d'interversion somme/intégrale sont plutôt bien assimilées, ce sont paradoxalement des outils bien plus basiques et même les techniques du secondaire qui sont parfois assez mal maitrisés. Les nombres complexes sont une grande source d'erreurs. Les techniques pour calculer les limites ou justifier l'existence d'une intégrale, de même que la manipulation des séries entières, ne sont comprises que dans les meilleures copies.

Du point de vue strictement matériel on ne peut que réitérer le conseil d'utiliser une présentation claire avec des encadrés bien choisis, sans parler du choix d'une encre stable et assez foncée en vue de la numérisation.

Les remarques qui précèdent et celles qui vont suivre ont pour but d'aider les candidats à améliorer substantiellement leur prestation.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

I.A – Premières propriétés

Q1. On note parfois une certaine incompréhension du théorème de transfert. Remarquons, ici, que $P(X = x)$ et $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx})$ ne sont pas nécessairement égales.

Q2. Trop de candidats font des encadrements entre des nombres complexes non réels.

Q3. La convergence normale est souvent mentionnée mais sans justification probante (majoration de la valeur absolue de la somme totale par exemple), de même pour la convergence uniforme qu'il ne suffit pas de mentionner sans justification pour qu'elle soit effective.

Q4. Des candidats écrivent $\mathrm{e}^{itaX} = (\mathrm{e}^{itX})^a$, ce qui n'a pas de sens puisque e^{itX} est un complexe. On voit également $E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}taX}) = \big(E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})\big)^a$.

Notons aussi que l'énoncé souhaitait une expression de $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b, ce qui n'est pas la même chose qu'en fonction de $\phi_X(t)$, a et b.

Q5. Une question abordée avec réticence et un fort taux d'échec. Les nombres complexes dans ce contexte sont mal manipulés. On a vu souvent l'erreur $\phi_X(-t) = \phi_X(t)^{-1}$ avec la conséquence que ϕ_X ne peut être paire que si elle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

I.B – Trois exemples

Q7. Une certaine méconnaissance de la loi géométrique est à déplorer. Beaucoup considèrent la loi géométrique comme finie entre 1 et un mystérieux nombre n, d'autres attribuent une probabilité p à $X = 0$. Pour sommer une série géométrique, peu de candidats pensent à justifier que le module de la raison est strictement inférieur à 1.

I.C – Image de ϕ_X

Q10. Certains candidats éprouvent des difficultés à repérer et à expliquer avec suffisamment de détails le raisonnement. Quelques candidats ne maitrisent pas le lien entre un nombre complexe de module 1 et les nombres complexes $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Q11. De nombreux candidats semblent désemparés avec une question du type « montrer qu'il existe un réel a tel que... ». Par exemple, certains partent du résultat et concluent que, puisque les modules de $\phi_X(t_0)$ et de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_0 a}$ valent 1, ils obtiennent bien le résultat. D'autres prennent un a qui dépend de n.

Q13. Pour quelques candidats, une somme nulle ne doit comporter que des termes nuls sans se soucier d'une hypothèse sur la positivité de ceux-ci. D'autres candidats raisonnent sur la somme obtenue à la question précédente comme sur une série entière.

Beaucoup transforment « pour tout n si $a_n \neq 0$ alors » en « si pour tout n $a_n \neq 0$ alors ».

Q14. La difficulté de nombre de candidats à simplement synthétiser ce qui a été fait auparavant est vraiment regrettable.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire réelle

II.A – Première méthode

Q15. Certains candidats ne font pas la différence entre somme finie et série et veulent appliquer un théorème d'interversion série-intégrale quand la simple linéarité de l'intégrale suffit. La majorité a oublié le cas $x_n = m$. Si certains séparent bien deux cas : « si $x_n - m \neq 0$ » et « si $x_n - m = 0$ », il arrive toutefois que ce dernier cas signifie pour eux que « pour tout n, $x_n - m = 0$ ».

Q16. Des difficultés à justifier correctement que $\operatorname{sinc}(T(x_n - m))$ tend vers 0 en l'infini. Rappelons que pour prouver que $(u_n)_n$ tend vers 0 on peut simplement et sans danger majorer $|u_n|$ par un terme (positif) convergeant vers 0. Les cas $m \in X(\Omega)$ et $m \notin X(\Omega)$ n'ont pas assez été distingués. Dès lors beaucoup de confusion lorsque dans la question précédente les candidats oublient le cas $x_n = m$.

Q17. Dans cette partie du problème, de trop nombreux candidats se sont contentés d'affirmer que les raisonnements étaient strictement analogues à des questions déjà faites, en l'occurrence les questions Q15 et Q16, mais aussi Q2 et Q3. Un peu de bon sens devrait suggérer que telle n'est pas la réponse attendue.

Q20. Question rarement bien traitée, trop peu de candidats ont écrit explicitement le lien entre $V_m(T)$ et $G(1/T)$.

II.B – Deuxième méthode

Q22. Bien qu'abordée dans deux tiers des copies, c'est probablement la question la moins bien traitée. Rares sont les candidats capables de faire apparaitre un développement en série entière et encore plus rares ceux qui justifient ou même remarquent que le rayon de convergence est infini ou au moins non nul. Dans l'essentiel des copies apparait la série exponentielle sans simplification et une valeur de limite non justifié pour dire qu'elle est continue et même C^∞.

Des rédactions du type « pour $t = 0$, $K_{a,b}(t) = \frac{1}{2}(b - a)$ est une constante et est donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ » sans faire le lien avec ce qui se passe quand $t \neq 0$ mettent en évidence une grande confusion pour les notions de régularité des fonctions.

Q23. Assez bien traitée dans l'ensemble, la calculatrice autorisée pour l'épreuve pouvant aider à se souvenir des hypothèses.

Les candidats ont cependant du mal avec l'expression de $\partial_x K$ et la domination (on voit parfois une majoration par une exponentielle complexe), mais dans l'ensemble les hypothèses sont assez correctement mises en avant.

Q24. Oubli fréquent de l'hypothèse C^1 sur F_N pour pouvoir dire que $\int_a^b F_N' = F_N(b) - F_N(a)$. Une erreur fréquente fait apparaitre $\int_{-N}^{N} \frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t$

Q25. Un taux d'échec surprenant pour un exercice aussi classique. La rédaction est souvent confuse et inexacte, par exemple : $(\sin x)/x$ tend vers 0 ou bien $(\cos x)/x^2 < 1/x^2$, donc l'intégrale converge. Il convient de rappeler que les théorèmes de comparaisons s'appliquent sur les intégrales de fonctions positives et de passer par la convergence absolue de $(\cos x)/x^2$.

Q26. Rarement entièrement traitée, mais parfois bien faite.

Q27. Même constat.

III Régularité de ϕ_X

Une partie plus rarement traitée et parfois juste survolée.

Q28. Dans cette question, comme pour d'autres, beaucoup de candidats sont allés trop vite. Certains se sont précipités dans une étude de fonction — ce qui pouvait certes fonctionner, fait soigneusement — mais beaucoup ont cru que nécessairement la fonction qu'ils étudieraient serait croissante, ce qui pour $x \mapsto x^j - x^k$ n'était pas le cas...

Q29, **Q30**. La terminologie peut-être abusive « X d'espérance finie » pour dire que X est intégrable produit une certaine confusion chez les candidats les moins assurés. On ne sait plus très bien si on doit prouver l'existence pour X d'un moment d'ordre j, ou que $E(|X|^j)$ est fini ou même « $E(X^j)$ est fini ».

Q31. Assez décevant pour une question très classique de première année de CPGE, peu faite et souvent sans rigueur.

Q33. Presque aucune solution correcte. Une preuve rapide consisterait à majorer les sommes partielles $\sum_{n=0}^N a_n x_n^2$ par le sup de f au voisinage de 0 (fini par continuité grâce à Q 31), en effet $\sum_{n=0}^N a_n x_n^2 = \lim_{h\to 0} \sum_{n=0}^N a_n \sin^2(hx_n)/h^2$ avec $\sum_{n=0}^N a_n \sin^2(hx_n)/h^2 \leqslant f(h)$ par Q 32.

Q35, **Q36**. L'enchainement des questions et le lien avec Q29 et Q33 sont en général mal perçus.

Q37. Une récurrence vraiment facile dont l'hérédité n'a pourtant pas été du tout bien rédigée : le caractère C^{2k+2} de ϕ_X (seule hypothèse dans l'hérédité) donnant l'existence d'un moment d'ordre $2k$ pour X n'a quasiment été jamais expliqué : les candidats ont, eux, supposé à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} et que X admet un moment d'ordre $2k$... C'était utile pour les questions 35 et 36, mais pas pour 37.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Peu abordée sereinement, à part la question 38, et seule la question 39 a été plutôt bien réussie par les meilleurs.

Q38. Trop peu de candidats justifient correctement le fait que ϕ_X soit développable en série entière. La plupart des candidats se contentent d'écrire des égalités, certains permutant une somme infinie avec une espérance ou avec une autre somme infinie (pour ceux qui ne se placent pas dans le cas où $X(\Omega)$ est fini contrairement à ce qui est précisé dans l'énoncé) sans se préoccuper de la légitimité de cette opération.

Q39. La formule de Taylor avec reste intégral n'est maitrisée que par peu de candidats ; ceux qui l'énoncent sans erreur vont hélas trop vite dans leurs majorations d'intégrales, défaut présent ailleurs dans les copies. L'inégalité de Taylor-Lagrange n'est pas au programme, on ne peut donc pas l'utiliser.

Conclusion

Les correcteurs relèvent cette année une hétérogénéité frappante. Quelques copies sont bien rédigées, de façon claire, structurée, concise. Mais la présence de quelques bonnes copies donnant un traitement correct de l'ensemble du problème ne doit pas surprendre, s'agissant d'un énoncé très abordable. Par contre, la plupart des copies sont assez mal rédigées, à la fois quant à la propreté (en termes de ratures, etc.) et à la rédaction proprement dite (peu de phrases, beaucoup de symboles $\forall$ ou $\Longrightarrow$ mal à propos). Sur le fond, il est assez alarmant qu'une moitié des candidats ne peut finalement obtenir qu'un quart des points du barème. Peut-être faut-il y voir une conséquence des perturbations de l'enseignement subies cette année. Cette impression est renforcée par la relative abondance parmi les notes moyennes de copies dont le niveau est assez bon mais qui ne traitent qu'une partie du problème, comme si les candidats avaient mal géré leur temps faute d'entrainement adéquat.