SPhT/00-002

RENORMALISATION ET GROUPE DE RENORMALISATION: LES INFINIS EN PHYSIQUE MICROSCOPIQUE CONTEMPORAINE*

J. ZINN-JUSTIN

*CEA-Saclay, Service de Physique Théorique**,*
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

email: zinn@spht.saclay.cea.fr

Résumé

À la fin des années vingt, après la découverte de l'équation de Dirac, tout était en place pour la construction d'une théorie quantique et relativiste, permettant une description précise des interactions électromagnétiques entre protons et électrons. Une des réponses attendues de cette Théorie Quantique des Champs, appelée Électrodynamique Quantique ou QED, était la solution du puzzle de la contribution coulombienne infinie à la masse de l'électron.

En réalité, les calculs montrèrent que des divergences, dues à la nature ponctuelle de l'électron, subsistaient, quoique moins sévères. Elles acquérirent même une signification beaucoup plus fondamentale, paraissant une conséquence inévitable de ce caractère ponctuel et de la conservation des probabilités. Il apparut également qu'il était très difficile de construire une théorie cohérente de particules non ponctuelles.

Comme conséquence d'un apport expérimental essentiel, et d'importants progrès théoriques, une procédure empirique, appelée *renormalisation*, fut enfin découverte qui conduisait à des résultats finis: Bien que toutes les observables physiques aient été données en termes d'expressions contenant des infinités, il était possible de trouver des relations entre ces observables dans lesquelles les infinis se compensaient.

Cette méthode permit des calculs de précision croissante pour les processus physiques relevant de l'Électrodynamique Quantique. Le concept de théorie

---

*Colloque de la Société Française de Physique: *Physique et Interrogations Fondamentales*, 27/10/99.

**Laboratoire de la Direction des Sciences de la Matière du Commissariat à l'Énergie Atomique quantique des champs renormalisable se révéla même si fructueux qu'il put plus tard être appliqué à toutes les interactions fondamentales, sauf la gravitation: Le Modèle Standard des Interactions Faibles, Électromagnétiques et Fortes a maintenant survécu avec succès à environ 25 ans de confrontation avec l'expérience.

Cependant la procédure de renormalisation elle-même est restée longtemps une énigme pour nombre de théoriciens. Un ensemble convergent d'idées, venant à la fois de la physique microscopique et de la physique de transitions de phase dans les systèmes macroscopiques (comme la transition liquide–vapeur) , qui peuvent être regroupées sous le nom général de *groupe de renormalisation*, a finalement conduit à une image nouvelle et cohérente. À cause du couplage essentiel de la physique à des échelles très différentes, les théories des champs *renormalisables* ont une cohérence limitée à la physique des basses énergies. On parle de *théories effectives*, approximations d'une théorie plus fondamentale mais à ce jour inconnue. C'est cette évolution des idées que nous voulons décrire brièvement ici.

L'Électrodynamique Quantique: une Théorie Quantique des Champs

La théorie de la relativité était bien établie quand la mécanique quantique fut découverte. Mais pour des raisons accidentelles (spectre de l'atome d'hydrogène pire pour une équation relativiste sans spin, l'équation de Klein–Gordon, que pour l'équation de Schrödinger non-relativiste), le développement de la mécanique quantique relativiste fut retardé de quelques années (ce qui fut probablement heureux parce que la théorie quantique des champs est beaucoup compliquée que la mécanique quantique non-relativiste).

Toutefois en 1928 Dirac publia sa fameuse équation et ceci ouvrit la voie à une théorie quantique relativiste. Dès 1929 Heisenberg et Pauli dans une série d'articles établirent les principes généraux de la *théorie quantique des champs.*

La Théorie Quantique des Champs. Pour comprendre que la théorie quantique des champs, extension relativiste de la mécanique quantique non relativiste, puissent avoir certaines propriétés un peu "exotiques", il faut prendre conscience que ce n'est pas une théorie de particules individualisées, mais, comme le nom l'indique, une théorie des champs. C'est en effet aussi une extension quantique d'une théorie relativiste: l'électromagnétisme classique dans laquelle les variables dynamiques sont des champs, les champs électrique et magnétique $E(x), B(x)$. Or une telle théorie se distingue radicalement d'une théorie de particules en ce sens que les champs ont un nombre *infini* de degrés de liberté. En effet un point matériel de la mécanique classique a trois degrés de liberté; il est défini par ses trois coordonnées cartésiennes. Par contraste un champ est défini par sa valeur en chaque point d'espace, ce qui représente un nombre infini de données. La non-conservation du nombre de particules dans les collisions à haute énergie est une manifestation de cette propriété.

Symétries de jauge. Dans ce qui suit il sera beaucoup question de symétrie de jauge et de théories de jauge comme l'Électrodynamique Quantique (QED). À la différence d'une symétrie ordinaire qui correspond à faire une transformation globale sur toutes les variables dynamiques, une symétrie de jauge correspondant à des transformations indépendantes en tout point d'espace. Par exemple, en mécanique quantique non-relativiste, la physique ne change pas si l'on multiplie la fonction par une phase $e^{i\theta}$ (correspondant à une transformation du groupe abélien $U(1)$). Dans le cas d'une particule chargée, en présence d'un champ magnétique, on trouve une symétrie de jauge: on peut changer la phase de la fonction d'onde en chaque point indépendamment $\psi(x) \mapsto e^{i\theta(x)}\,\psi(x)$. La symétrie de jauge est un principe dynamique qui engendre des interactions, au lieu simplement de les relier entre elles comme une symétrie ordinaire ou globale. Il force à introduire un potentiel vecteur couplé de façon universelle à toutes les particules chargées. À ce potentiel vecteur est associé en théorie relativiste une particule de spin un dite de jauge, le photon dans le cas de l'électrodynamique quantique.

Unités en théorie quantique relativiste. Cette remarque est destinée à rendre la suite plus compréhensible. Dans une théorie relativiste les échelles de masse M, impulsion (ou quantité de mouvement) p et énergie E sont reliés à travers la vitesse de la lumière c

$$E = pc = Mc^2.$$

Aussi parlerons-nous de façon équivalente de grande impulsion ou grande énergie, et exprimerons les trois quantités dans une unité commune l'électron-volt (eV).

Par ailleurs dans une théorie quantique on peut relier l'échelle d'impulsion p à l'échelle de distance ℓ par $\hbar$

$$p\ell = \hbar\,.$$

Ainsi les expériences faites à haute énergie sondent-elles les propriétés de la matière à courte distance.

Les premiers calculs et le problème des infinis

Peu après les travaux de Heisenberg et Pauli, Oppenheimer et Waller (1930) publièrent indépendamment le calcul de la self-énergie de l'électron au premier ordre dans la constante de structure fine, la constante qui caractérise l'intensité de la force électromagnétique,

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx 1/137\,,$$

où est e est la charge de l'électron. Une motivation pour un tel calcul était de déterminer les corrections à la masse de l'électron en Électrodynamique Quantique. En théorie relativiste la masse d'une particule est proportionnelle à son énergie au repos. Elle inclut des termes d'énergie potentielle. Or il était bien connu que le "modèle classique" de l'électron comme une sphère chargée de rayon

R conduisait à un résultat qui tendait vers l'infini comme e^2/R quand on prenait la limite de rayon nul. Il était espéré que la mécanique quantique, qui est une théorie de fonctions d'onde, allait guérir ce problème engendré par la nature ponctuelle de l'électron.

Toutefois ces premiers résultats se révélèrent tout à fait décevants. Non seulement la self-énergie était infinie, mais elle divergeait plus fortement que dans le modèle classique: introduisant une borne Λc^2 sur les énergies possibles des particules, (ceci est équivalent à modifier la théorie à courte distance $R = \hbar/c\Lambda$) on trouvait une divergence quadratique $\Lambda^2 \propto 1/R^2$. Mais il fut bientôt découvert que ces résultats étaient erronés. En effet les calculs perturbatifs avec les outils de l'époque étaient laborieux. On utilisait une version de la théorie des perturbations non explicitement relativiste; le rôle des trous de la théorie de Dirac (prédits être des anti-électrons ou positrons en 1931 et expérimentalement découverts en 1932) était peu clair, et l'invariance de jauge créait un problème supplémentaire. Il fallut attendre 1934 pour que soit publié le résultat correct dans des articles de Weisskopf (non sans qu'une dernière erreur ait été remarquée par Furry). Le résultat était à la fois plus encourageant et profondément inquiétant. La self-énergie était toujours infinie, quoique la divergence quadratique ait été remplacée par une divergence logarithmique beaucoup moins sévère:

$$\delta m_{\mathrm{QED}} = -3\frac{\alpha}{2\pi} m \ln(mRc/\hbar),$$

où m est la masse de l'électron.

Ainsi la théorie quantique des champs (TQC) était moins singulière que le modèle classique. Néanmoins le problème des infinis n'était pas résolu et aucune modification simple ne pouvait être trouvée pour sauver la théorie des champs. En effet ces divergences étaient dans une large mesure une conséquence directe de la localité (les particules sont ponctuelles, avec interactions de contact) et de l'unitarité (conservation des probabilités). Le problème était donc très profond et touchait à l'essence même de la théorie. La QED était une théorie incomplète, mais il semblait difficile de la modifier sans sacrifier quelque principe physique fondamental. Il était possible de rendre la théorie finie en abandonnant l'unitarité et donc la conservation des probabilités (comme ce fut proposé par Dirac (1942)), mais les conséquences physiques étaient difficilement acceptables. Ce que nous appelons maintenant régularisation de Pauli–Villars, une procédure *ad hoc* et temporaire pour rendre la théorie finie avant *renormalisation* (voir plus loin), est de cette nature. Il paraissait encore plus difficile de l'incorporer dans une extension relativiste non-locale (quand on sait que depuis cette époque le premier candidat viable trouvé est la théorie de *super-cordes*, on comprend pourquoi), quoiqu'en 1938 Heisenberg ait proposé l'introduction d'une longueur fondamentale.

La crise était si sérieuse que Wheeler (1937) et Heisenberg (1943) proposèrent d'abandonner complètement la théorie quantique des champs au profit d'une théorie d'observables physiques, en fait les éléments de matrice de diffusion: la théorie de la matrice S, une idée qui eut son heure de gloire dans les années soixante en théorie des Interactions Fortes (celles qui engendrent les forces nucléaires).

Les infinis et le problème des bosons scalaires chargés. Dans le même temps des physiciens plus pragmatiques calculaient d'autres quantités physiques, explorant la forme et la nature de ces infinis. Je veux juste mentionner ici un autre article important de Weisskopf (1939) dans lequel l'auteur montre que les divergences logarithmiques persistent à tous les ordres de la théorie des perturbations. Mais il remarque aussi que dans le cas de particules scalaires chargées la situation est bien pire: les divergences sont quadratiques ce qui est désastreux. En effet comme la constante de structure fine α est petite, si le cut-off procuré par quelque nouvelle physique n'est pas trop grand (et pour quelque temps 100 MeV qui est la portée des forces nucléaires semblait un candidat raisonnable), alors une divergence logarithmique produit des corrections incalculables, mais néanmoins petites, ce qui n'est plus le cas pour des divergences quadratiques. Ceci pouvait être pris comme une indication que des particules scalaires chargées ne pouvaient être considérées comme fondamentales.

Notons que ce problème est plus que jamais d'actualité puisque le Modèle Standard contient une particule scalaire, la particule de Higgs, et est maintenant appelé le problème de *l'ajustage fin* ou de *la hiérarchie*. Il est même devenu particulièrement sévère parce que nous avons pris conscience que des échelles de masse aussi grande que 10^{15} (masse d'unification) ou 10^{19} GeV (masse de Planck) peuvent être impliquées. Il est une des motivations principales pour l'introduction de la *Supersymétrie* (une symétrie qui, de façon très surprenante, relie des bosons à des fermions). Remarquons finalement que si ce problème n'avait pas été quelque peu oublié, la solution du problème des Interactions Faibles par le mécanisme de Higgs aurait pu s'en trouver retardée.

Méthode de renormalisation

Calculant nombre de quantités physiques différentes, quelques physiciens ne manquèrent pas de remarquer que bien que beaucoup de quantités étaient divergentes, c'étaient toujours les mêmes termes divergents qui intervenaient. On pouvait donc trouver des combinaisons qui étaient finies (Weisskopf 1936). Toutefois, la signification physique d'une telle propriété était totalement obscure. En réalité, en l'absence de toute compréhension profonde du problème, peu de progrès était possible.

Comme toujours, quand les physiciens sont confrontés à de profondes difficultés conceptuelles, la réponse ne peut venir que de l'expérience.

Ainsi en 1947 Lamb et Retheford mesurèrent avec précision la séparation entre les niveaux $2s_{1/2}2p_{1/2}$ de l'hydrogène, tandis que le groupe de Rabi à Columbia mesurait le moment magnétique anormal de l'électron. De façon assez remarquable il fut possible d'organiser le calcul du déplacement de Lamb de telle sorte que les infinis se compensent (premier calcul approché par Bethe) et le résultat se trouva être en très bon accord avec l'expérience. Peu de temps après Schwinger obtint le terme dominant du moment magnétique anormal de l'électron.

Ces résultats entraînèrent d'extraordinaires développements théoriques (un travail antérieur de Kramers sur la renormalisation de masse de l'électron classique étendu se révéla important pour généraliser l'idée de compensation des infinis par soustraction, à l'idée de renormalisation), et en 1949 Dyson, s'appuyant sur les travaux de Feynman, Schwinger et Tomonaga, donna la première preuve de la compensation des infinis à tous les ordres de la théorie des perturbations. Ce qui fut alors baptisée *théorie de la renormalisation* conduisait en QED à des résultats finis pour toutes les observables physiques.

L'idée est la suivante: on commence avec une théorie appelée *nue* qui dépend de paramètres comme la *masse nue* m_0 et la *charge nue* e_0 de l'électron (les masses et charges en l'absence d'interactions) et une échelle de coupure des grandes impulsions $c\Lambda$, appelée *cut-off*. On calcule alors les valeurs physiques, appelées *renormalisées*, des mêmes quantités (comme la charge observée e et la masse physique m) en fonction des paramètres nus et du cut-off. On inverse ces relations, exprimant maintenant les quantités nues en fonction des quantités renormalisées. Dans cette substitution on échange par exemple la charge nue e_0 avec la charge e physique ou renormalisée comme paramètre de développement:

$$\begin{aligned} e_0 &= e + \tfrac{1}{2}\beta_2 e^3 \ln(\Lambda/m) + \cdots, \\ m_0 &= m + \gamma_1 \; m e^2 \ln(\Lambda/m) + \cdots. \end{aligned}$$

On exprime ensuite toute autre observable, initialement calculée en termes des paramètres nus, en termes de ces quantités physiques ou renormalisées. De façon très surprenante, quand on prend la limite du cut-off Λ infini, toutes les observables physiques ont alors une limite finie.

Il faut reconnaître qu'il semble assez miraculeux qu'une telle procédure puisse réussir. Elle a pourtant permis et permet toujours en QED des calculs de précision croissante, donc l'accord avec l'expérience démontre de façon absolument convaincante que la TQC est le formalisme adéquat pour décrire l'électrodynamique au niveau quantique.

De plus la théorie de la renormalisation conduisit au très important concept de *théories renormalisables*. Seul un nombre limité de théories des champs conduisent à des résultats finis par la procédure expliquée ci-dessus. Ceci contraint donc fortement la structure des théories possibles.

Notons enfin que pendant plus de quinze ans les physiciens avaient été bloqués par le problème des divergences en TQC, et une fois que l'expérience commença à procurer des informations décisives, en deux ans un cadre complet et cohérent pour des calculs perturbatifs fut développé.

Quoiqu'il fut maintenant évident que la QED était la théorie correcte, la procédure permettant d'obtenir des réponses finies restait une énigme pour nombre de théoriciens: La signification de la recette de renormalisation, et donc des paramètres nus restait obscure. Beaucoup d'efforts furent alors consacrés à essayer de surmonter cette faiblesse conceptuelle fondamentale. Plusieurs types de solutions furent proposés:

(i) Le problème était lié à la théorie des perturbations et une resommation correcte du développement perturbatif ferait disparaître le problème (cf. par exemple la discussion de Thirring (1951) avec réponse de Källen (1953)).

(ii) Le problème était de nature mathématique: La procédure qui engendrait le développement renormalisé devait être modifiée pour éviter l'introduction de divergences non-physiques et pour engendrer automatiquement des quantités finies. Les paramètres nues n'avaient simplement pas de signification physique.

(iii) Finalement le cut-off avait un sens physique et était engendré par des interactions supplémentaires, non-descriptibles par la TQC. Un candidat favori, jusqu'à la fin des années soixante, fut l'Interaction Forte (le cut-off étant procuré par la portée des forces nucléaires).

Quelque peu relié à la démarche (i) fut le développement de ce qui fut appelé *la TQC Axiomatique* qui essayait d'extraire des résultats rigoureux et non-perturbatifs des principes généraux sur lesquels la TQC était basée. La ligne de pensée (ii) conduisit au formalisme BPHZ (Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmerman), et finalement au travail d'Epstein–Glaser, où le problème des divergences dans l'espace des positions (plutôt que l'espace des impulsions) était réduit au problème mathématique d'une définition correcte de produits de distributions singulières. Les efforts correspondants furent très efficaces à déguiser le problème des divergences de telle manière qu'il semblait n'avoir jamais existé. Finalement le point de vue (iii) est le plus proche du point de vue moderne, quoique bien sûr le cut-off nécessaire ne soit plus procuré par les Interactions Fortes.

TQC et Groupe de Renormalisation

Au milieu des années cinquante il fut noté par plusieurs groupes, plus notablement Peterman–Stückelberg (1953), Gell-Mann–Low (1954) et Bogoliubov–Shirkov (1955-1956), que dans la limite de la QED avec masse nulle de l'électron, le développement perturbatif avait une curieuse propriété formelle, conséquence directe du processus de renormalisation lui-même. Dans une théorie des champs de masse nulle il n'y a pas d'échelle. Il est alors nécessaire d'introduire une échelle de masse μ arbitraire pour définir la charge e renormalisée: elle est liée à l'intensité de la force électromagnétique mesurée dans des collisions d'une impulsion d'ordre $c\mu$. On peut appeler la charge renormalisée la *charge effective* à l'échelle μ. Toutefois, comme cette masse μ est arbitraire, on peut trouver d'autres couples $\{e', \mu'\}$ qui donne les mêmes résultats physiques. L'ensemble des transformations des paramètres physiques, associées à ces changements d'échelle de masse, et nécessaires pour maintenir les résultats physiques inchangés, fut appelé *groupe de renormalisation* (GR). Faisant un changement d'échelle infinitésimal on peut décrire le flot de la charge effective par une équation différentielle

$$\mu \frac{\mathrm{d}e^2(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = \beta\bigl(e^2(\mu)\bigr), \quad \beta(e^2) = \beta_2 e^4 + O(e^6), \tag{1}$$

où la fonction $\beta(e^2)$ peut être calculée perturbativement en série de puissances de e^2.

Comme la préoccupation principale était le problème des divergences à grande impulsion en TQC, Gell-Mann et Low essayèrent d'utiliser le GR pour étudier le comportement à grande impulsion du propagateur de l'électron, au delà de la théorie des perturbations, en relation avec le comportement de la charge nue à grand cut-off. La charge nue pouvait en effet apparaître comme la charge effective à l'échelle du cut-off. Si la fonction $\beta(e^2)$ avait eu un zéro avec une pente négative, ce zéro aurait été la limite finie à cut-off infini de la charge nue, au delà de la théorie des perturbations.

Malheureusement la QED est une théorie libre à grande distance ($\beta_2 > 0$), ce qui signifie que la charge effective décroît à faible impulsion, et réciproquement croît à grande impulsion jusqu'à ce que le développement perturbatif de la fonction β ne soit plus valable. (Cette variation est vérifiée expérimentalement puisque la valeur de α mesurée à la masse du boson intermédiaire des Interactions Faibles Z, est en effet plus grande que la valeur mesurée à basse énergie).

Il est frappant de constater que si ces auteurs n'avaient pas insisté pour prendre la limite du cut-off infini, ils auraient été conduit à des conclusions plus intéressantes.

Notons encore quelques spéculations reliées: Landau et Pomeranchuk (1955) remarquèrent que si, dans le calcul de la self-énergie de l'électron on somme les termes dominants à grande impulsion à chaque ordre, on trouve un facteur qui a un pôle à une masse M

$$M = m\, \mathrm{e}^{1/\beta_2 \mathrm{e}^2} .$$

Un tel pôle pouvait indiquer un état lié, mais malheureusement cet état avait une norme négative, et fut donc appelé le "fantôme" de Landau. Pour Landau c'était le signe de quelque incohérence de la QED, quoique sans conséquence physique immédiate, parce que e^2 est si faible que cet état non-physique a une masse de l'ordre de 10^{30} GeV. Bogoliubov et Shirkov montrèrent alors correctement que ce résultat correspondait à résoudre l'équation de GR (1) à l'ordre dominant, dans la limite de faible charge effective. Comme la charge effective devenait grande à grande impulsion, la théorie des perturbations n'était pas crédible dans ce régime de grande masse. Il est amusant de noter que dans le point de vue moderne nous croyons que l'intuition de Landau était fondamentalement correcte, même si son argument était quelque peu naïf dans sa formulation.

Le triomphe de la TQC renormalisable: Le Modèle Standard

La Théorie Quantique des Champs dans les années soixante. Les années soixante furent des années difficiles pour la TQC. La situation peut être décrite de la manière suivante:

Après le triomphe de la QED il restait trois problèmes essentiels à résoudre liés aux trois autres interactions connues:

(i) Les Interactions Faibles étaient décrites par la théorie non renormalisable de Fermi (–Feynman–Gell-Mann). Puisque le couplage était faible, et l'interaction de type courant–courant un peu comme en Électrodynamique, il était concevable que cette théorie fût en quelque sorte l'approximation dominante à une théorie genre QED, mais avec au moins deux photons chargés et très lourds (masse de l'ordre de 100 GeV), parce que l'interaction apparaissait essentiellement ponctuelle.

Des théories de jauge non-abéliennes, c'est à dire des théories où les interactions sont engendrées par un principe de symétrie généralisé appelé symétrie de jauge, avaient bien été construites qui généralisaient la QED au cas de "photons" chargés (Yang–Mills 1954). Mais d'une part leur quantification posait des problèmes nouveaux et difficiles. D'autre part une autre difficulté venait de ce que les théories de jauge ont une forte tendance à produire des particules de masse nulle, comme le photon. Ainsi quelques théoriciens essayaient à la fois de quantifier ces théories des champs et de trouver les moyens d'engendrer des termes de masse, dans le cadre de théories renormalisables.

(ii) Beaucoup pensaient, par contre que le cas de la TQC était désespéré dans la physique des Interactions Fortes: Parce que les interactions étaient trop fortes, un calcul perturbatif n'avait pas de sens. La théorie des observables physiques, appelée théorie de la matrice S, paraissait le cadre adéquat pour décrire cette physique, et la localité stricte devait sans doute être abandonnée. On peut d'ailleurs noter une première incarnation de la théorie des Cordes dans ce contexte.

(iii) Enfin, puisque la force gravitationnelle était extrêmement faible à courte distance, il n'avait pas d'urgence immédiate à s'occuper de la gravitation quantique, et la solution de ce problème d'impact expérimental incertain pouvait attendre.

Le triomphe de la TQC renormalisable. Vers la fin des années soixante la situation se mit à évoluer très rapidement. On trouva enfin une méthode pour quantifier les théories de jauge non-abéliennes (Faddeev–Popov, DeWitt 1967). On put démontrer que ces nouvelles théories étaient renormalisables ('t Hooft, 't Hooft–Veltman, Slavnov, Taylor, Lee–Zinn-Justin, Becchi–Rouet–Stora, 1971–1975), même dans une version de symétrie brisée qui permettaient de donner des masses aux particules de jauge correspondantes (le mécanisme de Higgs, Brout–Englert, Guralnik–Hagen–Kibble 1964). Ces développements permirent de construire une version quantique d'un modèle pour les Interactions Faibles basé sur une symétrie de jauge, qui avait été proposé auparavant (Weinberg 1967, Salam 1968) et qui unifiait dans une certaine mesure l'électromagnétisme et l'interaction faible. Ses prédictions devaient être rapidement confirmées par l'expérience.

Dans la situation très confuse des Interactions Fortes, la solution vint comme souvent dans de tels cas de l'expérience: Les expériences de Diffusion Profondément Inélastique faites au SLAC (Stanford), qui sondaient l'intérieur des protons et neutrons, révélèrent que ces hadrons étaient composés de particules ponctuelles quasi libres, appelées initialement *partons* et finalement identifiées avec les *quarks,* ces entités mathématiques qui avaient été introduites pour décrire de façon simple le spectre des hadrons et ses symétries.

Pour comprendre ce phénomène particulier on fit appel aux idées de GR dans une version modernisée (Callan, Symanzik 1970) valable aussi pour les théories massives, mais le phénomène resta quelque temps mystérieux jusqu'à ce qu'une théorie des champs puisse être trouvée qui ait la propriété de *liberté asymptotique*, c'est à dire que les interactions deviennent faibles à très courte distance de façon à expliquer les résultats du SLAC. Finalement les mêmes progrès théoriques dans la quantification des théories de jauge non-abéliennes qui avaient permis de modéliser les Interactions Faibles, permirent de construire une théorie de l'Interaction Forte: la ChromoDynamique Quantique (QCD). En effet les théories de jauge non-abéliennes, avec un nombre de fermions pas trop élevé, sont *asymptotiquement libres* (Gross–Wilczek, Politzer 1973): À la différence de la QED, le premier coefficient β_2 de la fonction β pour la charge forte est alors négatif. La faiblesse des interactions entre quarks à courte distance devient une conséquence par la décroissance de la charge forte effective.

Donc autour de 1973–1974 un modèle complet de TQC pour toutes les interactions fondamentales sauf la gravitation fut proposé, maintenant appelé le Modèle Standard, qui a survécu avec un succès croissant à plus de vingt-cinq ans de tests expérimentaux. Ce fut le triomphe de toutes les idées basées sur le concept de TQC renormalisable.

À ce moment là il devenait tentant de conclure qu'en quelque sorte une nouvelle loi de la nature avait été découverte: toutes les interactions peuvent être décrites par des TQC *renormalisables* et par la théorie des perturbations renormalisée. Le problème des divergences avait à cette époque été si bien camouflé, que pour beaucoup de physiciens ce n'était plus un réel souci.

Un problème potentiel restant était ce que Weinberg appelait la condition de protection asymptotique (*asymptotic safety*): l'existence de points fixes de grande impulsion du GR, dans le formalisme de l'équation (1) des solutions de

$$\beta(e^2) = 0 \,, \qquad \text{avec} \quad \beta'(e^2) < 0 \,,$$

semblait nécessaire pour la cohérence à toute échelle d'une TQC (l'option déjà considérée par Gell-Mann et Low). Les théories des champs asymptotiquement libres partagent bien sûr cette propriété, mais les champs scalaires (comme requis par le mécanisme de Higgs) ont tendance à détruire la liberté asymptotique.

Enfin il restait à mettre la gravitation quantique dans ce cadre renormalisable, et ceci devint le but de beaucoup d'études théoriques dans les années qui suivirent.

Phénomènes Critiques et Théorie du Champ Moyen

La théorie de phénomènes critiques a comme objet la description des transitions de phase continues ou du second ordre dans les systèmes macroscopiques. Des exemples simples sont fournis par la transition liquide vapeur, les transitions dans les mélanges, binaires, l'Hélium superfluide, les systèmes magnétiques. Le modèle sur réseau le plus simple qui exhibe une telle transition est le fameux modèle d'Ising.

Ces transitions sont caractérisées par des comportements collectifs à grande échelle à la température de transition (la température critique T_c). Par exemple la longueur de corrélation, qui caractérise la décroissance de corrélations dans le système, devient infinie. Près de T_c ces systèmes font donc apparaître deux échelles de longueur très différentes, une échelle microscopique liée à la taille des atomes, la maille du cristal ou la portée des forces, et une autre engendrée dynamiquement, la longueur de corrélation. À cette nouvelle échelle est associée une physique de longue distance ou macroscopique non-triviale.

On s'attend alors à ce que cette physique près de la température critique puisse faire l'objet d'une description macroscopique, ne faisant intervenir qu'un petit nombre de paramètres adaptés à cette échelle, sans référence explicite aux paramètres microscopiques initiaux. Cette idée conduit à la Théorie du Champ Moyen (TCM) et dans sa forme la plus générale à la théorie de Landau des Phénomènes Critiques (1937).

Parmi les prédictions les plus simples et les plus solides d'une telle théorie, on trouve l'*universalité* des comportements singuliers des quantités thermodynamiques quand on s'approche de T_c: par exemple la longueur de corrélation ξ diverge toujours comme $(T - T_c)^{-1/2}$, l'aimantation spontanée s'annule comme $(T_c - T)^{1/2}$..., ces propriétés étant indépendantes de la dimension de l'espace, de la symétrie du système, et bien sûr des détails de la dynamique microscopique.

Aussi les physiciens furent-ils très surpris quand quelques expériences aussi bien que des calculs de modèles de mécanique statistique sur réseau commencèrent à mettre en cause les prédictions de la TCM. Un coup supplémentaire à la TCM fut porté par la solution exacte du modèle d'Ising à deux dimensions par Onsager (1949) qui confirma les calculs numériques sur réseau correspondant. Dans les années suivantes les preuves empiriques s'accumulèrent, montrant que les Phénomènes Critiques en deux et trois dimensions d'espace ne pouvaient pas être décrits quantitativement par la TCM. En fait on trouva que le comportement critique variait avec la dimension d'espace ainsi qu'avec d'autres propriétés générales des modèles. Néanmoins il semblait aussi qu'une certaine *universalité* survivait, mais d'une forme plus limitée. Quelques propriétés spécifiques paraissaient importantes, mais pas tous les détails de la dynamique microscopique.

Pour comprendre combien le problème était profond, il faut prendre conscience que cette situation n'avait jamais été confrontée auparavant: En effet l'ingrédient principal de la théorie de Landau est l'hypothèse que, comme d'habitude en physique, les différentes échelles se découplent.

Illustrons cette idée par un exemple classique très simple. À un niveau naïf on obtient τ, la période du pendule, par analyse dimensionnelle,

$$\tau \ \propto \sqrt{\text{longueur}/g}\ .$$

En réalité dans cet argument se cache une hypothèse physique essentielle: à savoir qu'on peut oublier la structure atomique interne du pendule, la taille de la terre ou la distance terre soleil. Ces échelles de distance n'interviennent pas de parce que beaucoup trop petites ou trop grandes par rapport à l'échelle du pendule.

De même en mécanique Newtonienne, pour décrire le mouvement planétaire on peut oublier dans une très bonne approximation, à la fois les autres étoiles et la taille de soleil et des planètes, qui peuvent être remplacés par des objets ponctuels. De la même manière encore, en mécanique quantique non-relativiste, on peut ignorer la structure interne du proton, et obtenir les niveaux d'énergies de l'atome d'hydrogène avec une excellente précision.

L'échec de la théorie du champ moyen démontre au contraire que ceci n'est plus généralement vrai pour les Phénomènes Critiques, une situation inattendue et totalement nouvelle.

On aurait pu craindre dans ces conditions que la physique macroscopique soit sensible à toute la structure de courte distance, que les phénomènes à grande distance dépendent de la dynamique microscopique détaillée, et donc soient essentiellement imprédictibles. La survivance d'une universalité, même réduite, était encore plus surprenante. Pour comprendre toutes ces observations, un nouveau cadre conceptuel devait évidemment être inventé.

Le groupe de renormalisation de Kadanoff–Wilson

En 1966 Kadanoff proposa une méthode pour attaquer ce problème: calculer les observables physiques de façon récursive en sommant d'abord sur les degrés de liberté de courte distance. Comme lui nous allons illustrer l'idée par le modèle d'Ising, mais avec un point de vue plus général.

Un exemple: le modèle d'Ising. Le modèle d'Ising est un modèle de mécanique statistique sur réseau. À chaque site i du réseau est associé un spin (classique) S_i prenant les valeurs ± 1. La fonction de partition (la quantité de base de la mécanique statistique, dont toutes les observables thermodynamiques peuvent se déduire) est obtenue en sommant sur toutes les configurations de spins avec un poids de Boltzmann $\mathrm{e}^{-\mathcal{H}_a(S)/T}$, où a est la maille du réseau, et $\mathcal{H}_a(S)$ une énergie de configuration correspondant à une interaction de courte portée (par exemple seuls les spins proches voisins sur le réseau sont couplés).

L'idée alors est de sommer sur les spins S_i à moyenne sur un sous-réseau de maille $2a$ fixé. Par exemple sur un réseau carré on regroupe les spins sur des carrés disjoints et fixe la moyenne sur chaque carré. Après cette sommation la fonction de partition est donnée en sommant sur des configurations de ces spins moyens (qui prennent plus de deux valeurs) sur un réseau de maille double. À ces spins correspondent une nouvelle énergie de configuration *effective* $\mathcal{H}_{2a}(S)$. On peut itérer cette transformation, aussi longtemps que la maille du réseau reste petite comparée à la longueur de corrélation, c'est à dire l'échelle des phénomènes macroscopiques qu'on veut décrire,

$$\mathcal{H}_{2^n a}(S) = \mathcal{T}\left[\mathcal{H}_{2^{n-1} a}(S)\right].$$

On espère que l'application répétée de cette transformation produira finalement une interaction effective dont la forme serait indépendante dans une large mesure de l'interaction initiale, justifiant de cette manière l'universalité restante. Un tel espoir est basé sur l'existence possible de *points fixes* ou plutôt de *surfaces fixes* de la transformation $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{H}^*(S) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \mathcal{H}_{2^n a}(S), \quad \mathcal{H}^*(S) = \mathcal{T}\left[\mathcal{H}^*(S)\right].$$

Ce fut Wilson (1971) qui transforma une idée à l'origine un peu vague, en un cadre précis et opérationnel, passant en particulier en variables de Fourier, unifiant finalement le groupe de renormalisation de Kadanoff et celui de la TQC. Ceci conduisit à une compréhension de l'universalité, comme conséquence de l'existence de points fixes de longue distance du groupe de renormalisation général. Il devint possible de développer des méthodes de calcul précises des quantités universelles, avec l'aide de techniques déjà partiellement préexistantes de la TQC (Brézin–Le Guillou–Zinn-Justin 1973).

Limite continue et théorie quantique des champs. En premier lieu il est clair que dans le modèle d'Ising, après beaucoup d'itérations, la variable de spin effective, qui est une moyenne locale de beaucoup de spins, prend un continuum de valeurs, et peut être identifiée avec un champ continu $S(x)$. La somme sur les spins devient une intégrale fonctionnelle (généralisation de l'intégrale de chemin) formellement analogue à celle qui permet de calculer les observables physiques en théorie quantique des champs, mais avec une interaction de type très général.

Le point fixe gaussien. Une propriété qui devient alors apparente est que le modèle gaussien est un point fixe du GR. En effet une intégration partielle sur des variables gaussiennes redonne toujours une distribution gaussienne (ce qui n'est pas sans rapport avec le théorème central limite de la théorie des probabilités). À T_c, dans la limite de grande distance, il prend la forme d'une théorie quantique de champs (scalaires) libres et sans masses

$$\mathcal{H}(S) = \int \mathrm{d}^d x \left(\partial_\mu S(x)\right)^2.$$

De plus le modèle gaussien perturbé reproduit tous les résultats connus de la TCM.

Au delà de la théorie du champ moyen. Plus généralement près de T_c les valeurs typiques du champ $S(x)$ sont petites. De plus si nous ne sommes pas trop loin du point fixe gaussien, le champ ne varie que sur une échelle macroscopique. Les variations du champ à l'échelle de la maille du réseau sont faibles

$$|S(x+a)-S(x)| \sim a|\partial S(x)| \ll |S(x)|\,.$$

On peut donc faire un développement *local* de l'interaction effective (de l'énergie de configuration) en puissances de $S(x)$ et de ses dérivées. Les coefficients des différents monômes sont affectés d'une puissance de la maille du réseau a obtenue par une analyse dimensionnelle et basée sur la propriété que a est la seule échelle du modèle (la grande longueur de corrélation est engendrée dynamiquement). Dans la limite de longue distance, seuls les termes multipliés par a à une puissance non-positive sont importants. Cette propriété n'est vérifiée que par un petit nombre de termes. Pour une dimension d'espace $d > 4$ seule la partie quadratique survit et donc la TCM est correcte, le gaussien fixé point est stable pour la physique de longue distance. Pour $d = 4$ or $d = 4 - \varepsilon$ (on imagine, suivant Wilson–Fisher (1972), que la dimension d'espace peut être considérée comme un paramètre continu) seule l'interaction $S^4(x)$ doit être ajoutée.

Il se trouve que les termes qui sont affectés d'une puissance non-positive de a sont justement ceux qui correspondent à une théorie des champs (ici scalaire) *renormalisable!*. Mais cette théorie a un cut-off automatique parce que toutes impulsions sont coupées à une échelle $1/a$, réflexion de la structure initiale de réseau.

Bien sûr il reste encore déterminer le comportement à grande distance de la théorie des champs S^4, mais celui-ci peut maintenant être étudié avec le groupe de renormalisation de la TQC. Le groupe de renormalisation de la TQC apparaît ainsi comme une forme limite du groupe de renormalisation général à la Wilson–Kadanoff.

Ce qui est frappant dans cette approche, en particulier pour les physiciens qui s'intéressent à la fois à la Matière Condensée et à la Physique des Particules, c'est l'apparition naturelle d'une TQC renormalisable, comme théorie effective pour décrire la physique de grande distance des phénomènes critiques.

Il devient alors difficile de résister à la tentation d'appliquer les mêmes idées à la théorie quantique des champs qui décrit la Physique des Particules.

Théories Quantiques des Champs Effectives

La condition que les Interactions Fondamentales devaient être décrites par des théories renormalisables a été un des principes de base dans la construction du Modèle Standard. Du succès de ce programme il pouvait être conclu que le principe de renormalisabilité était une nouvelle loi de la nature. Ceci impliquait évidemment que toutes les interactions incluant la gravitation devaient être descriptibles par de telles théories. L'incapacité d'exhiber une version renormalisable de la théorie de la gravitation quantique a donc jeté un doute sur le programme lui-même. En effet si par contre le Modèle Standard et ses extensions naturelles possibles n'étaient que des théories approchées, il devenait difficile de comprendre pourquoi elles devaient obéir à un principe aussi abstrait.

La théorie des phénomènes critiques procure une interprétation beaucoup plus simple et plus naturelle. On peut maintenant imaginer que les Interactions Fondamentales sont décrites à très courte distance (longueur de Planck?) ou à très grande énergie par une théorie finie et sans doute non-locale. Pour des raisons qui restent à être comprises, la dynamique collective caractérisée par cette petite échelle engendre une physique de grande distance avec interactions entre particules de très faible masse. Dans les Phénomènes Critiques c'est l'expérimentateur qui ajuste la température à sa valeur critique pour faire diverger la longueur de corrélation. Dans la physique des Interactions Fondamentales ceci doit se produire naturellement, sinon on est confronté au fameux problème de *l'ajustage fin*. Comme la masse de Planck est au moins de l'ordre de 10^{13} fois la masse de la particule de Higgs, dont l'existence est conjecturée par le modèle Standard, il faudrait qu'un paramètre de la théorie soit par accident proche de sa valeur critique avec une précison analogue.

Quelques mécanismes possibles sont connus, qui engendrent des particules de masse nulle, les symétries brisées spontanément avec bosons scalaires dit de Goldstone, les particules au coeur des interactions de jauge tel le photon, la symétrie chirale qui produit des fermions de masse nulle.

Alors, comme conséquence de l'existence d'un point fixe de longue distance, la physique de basse énergie, de longue distance, de faible masse, peut être décrite par une théorie des champs effective. Cette théorie des champs est munie naturellement d'un cut-off, réflexion de la structure microscopique initiale, et contient toutes les interactions locales permises par le contenu en champs et les symétries. Si la théorie des champs libres (c'est à dire la TCM) n'est pas une trop mauvaise approximation (le point fixe est suffisamment proche du point fixe gaussien) les interactions peuvent être classées par la dimension des couplages correspondants. Ainsi les interactions de type non-renormalisable, qui apparaissent dans la présentation traditionnelle de la TQC comme très dangereuses, sont automatiquement supprimées par des puissances du cut-off (ceci est sans doute le cas de la gravitation d'Einstein). Les interactions renormalisables qui sont sans dimension n'évoluent que très lentement (logarithmiquement) avec l'échelle et survivent à longue distance. Ce sont elles qui déterminent la physique à basse énergie. Les interactions super-renormalisables (ceci inclut aussi les termes de masse), qu'on jugeait inoffensives car elles engendrent le moins de divergences, doivent être naturellement absentes ou très faibles. La théorie nue est alors une version de la théorie effective dans laquelle toutes les interactions non-renormalisables ont déjà été négligées, excepté dans la partie cinétique pour assurer que la théorie reste finie. Elle n'a nul besoin d'être physiquement cohérente à très courte distance où elle ne constitue plus une approximation valable.

Bien sûr cette interprétation n'a aucune influence sur la manière dont les calculs perturbatifs sont effectués, et donc on pourrait se demander si cette discussion n'est pas de nature presque philosophique. Pas tout à fait!

Nous avons mentionné ci-dessus que prendre la théorie nue au sérieux conduit en particulier à confronter le problème de l'ajustage fin des masses des particules scalaires (ceci s'applique donc au boson de Higgs), et donc force à chercher des solutions (supersymétrie, état lié de fermions plus fondamentaux).

Il résout le problème de la *trivialité*: des interactions renormalisées décroissant logarithmiquement avec le cut-off sont acceptables parce que le cut-off est fini. Reprenons l'exemple de la QED et utilisons l'argument de Gell-Mann–Low en sens inverse. À charge nue maintenant fixée, la charge effective à la masse μ tend vers zéro comme $1/\ln(\Lambda/\mu)$, ce qui est acceptable pour toute valeur raisonnable du cut-off Λ si μ est de l'ordre de grandeur de la masse de l'électron. Ceci peut même expliquer la faible valeur de la constante de structure fine.

Il suggère la possibilité d'une découverte d'interactions non-renormalisables, bien qu'elles soient très faibles. Un mécanisme possible est le suivant. Des exemples peuvent être trouvés dans les phénomènes critiques dans lesquels la théorie réduite aux interactions renormalisables a plus de symétrie que la théorie complète (la symétrie cubique du réseau conduit à une symétrie de rotation à grande distance). Alors de très petites violations de symétries pourraient être le signe d'interactions non-renormalisables (et comme nous l'avons déjà mentionné la gravitation quantique est déjà peut-être un exemple).

Donc ce point de vue moderne, profondément basé sur le groupe de renormalisation et la notion de forces des interactions dépendant de l'échelle d'observation, non seulement procure une image plus cohérente de la théorie quantique des champs, mais également un cadre dans lequel de nouveaux phénomènes peuvent être discutés.

Il implique aussi que les théories quantiques des champs sont des objets temporaires, qui ne sont pas nécessairement cohérents à toutes les échelles, et destinées à être finalement remplacées par une théorie plus fondamentale de nature radicalement différente.

Nous devons néanmoins souligner que le formalisme de la théorie quantique des champs reste pour l'instant le formalisme le plus fécond pour étudier les probèmes en physique où un nombre très grand de degrés de liberté interagissent fortement.

Une Bibliographie Succincte

Beaucoup de détails intéressants et des références sur l'histoire primitive de la QED et des divergences peuvent être trouvés dans

S. Weinberg, *The Theory of Quantum Fields*, vol. 1, chap. 1, Cambridge 1995 (Cambridge Univ. Press).

Un certain nombre d'articles originaux est contenu dans

J. Schwinger éd., *Selected Papers in Electrodynamics*, (Dover, New-York 1958).

Voir aussi

N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience (New-York 1959).

Une revue de la situation après la découverte du Modèle Standard peut être trouvée dans

Methods in Field Theory, Les Houches 1975, R. Balian et J. Zinn-Justin éds., (North-Holland, Amsterdam 1976);

C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (McGraw-Hill, New-York 1980).

Pour une présentation des idées de GR appliquées aux phénomènes critiques voir

L.P. Kadanoff, *Physics* 2 (1966) 263;

K.G. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* 12C (1974) 75,

et les contributions à

Phase Transitions and Critical Phenomena, vol. 6, C. Domb et M.S. Green éds. (Academic Press, London 1976). En particulier la contribution *Field Theory Approach to Critical Phenomena* par E. Brézin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, décrit l'application des méthodes de la théorie quantique des champs au calcul de quantités universelles.

Enfin une présentation unifiée de la théorie quantique des champs telle qu'elle apparaît en physique des particules et dans la théorie des phénomènes critiques peut être trouvée dans

J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press 1989, (Oxford 3ième éd. 1996).