

Introduction à la théorie quantique des champs

Magistère interuniversitaire de physique 2^{ème} année

année universitaire 2004-2005.

Jean-Yves Ollitrault (jean-yves.ollitrault@cea.fr)
Institut de physique théorique, Saclay
(<http://ipht.cea.fr>)

Table des matières

1	Rappels de relativité et d'électromagnétisme	9
1.1	Transformations de Lorentz	9
1.1.1	Temps propre	9
1.1.2	Transformation de Lorentz	10
1.1.3	Exemples	10
1.2	Indices contravariants et covariants	10
1.2.1	Scalaire	10
1.2.2	Vecteur contravariant	11
1.2.3	Vecteur covariant	11
1.2.4	Tenseurs	12
1.2.5	Contractions	12
1.2.6	Tenseur totalement antisymétrique	12
1.3	Equations de Maxwell	14
1.3.1	Tenseur du champ électromagnétique	14
1.3.2	Tenseur dual	14
1.3.3	Invariants bilinéaires	14
1.3.4	Premier groupe d'équations de Maxwell	15
1.3.5	Deuxième groupe d'équations de Maxwell	15
1.3.6	Invariance de jauge	15
2	Particule de spin 0	17
2.1	Particule libre	17
2.1.1	Equation de Klein–Gordon	17
2.1.2	Covariance de l'équation ; spin	18
2.1.3	Solution générale de l'équation	19
2.2	Interprétation probabiliste	20
2.2.1	Amplitude de probabilité	20
2.2.2	Invariance de Lorentz	20
2.2.3	Densité et courant de probabilité	21
2.2.4	Limite non relativiste	21
2.3	Couplage au champ électromagnétique	21
2.3.1	Rappels de mécanique lagrangienne	21
2.3.2	Forme de l'équation d'onde	22
2.3.3	Courant de transition	22
2.3.4	Invariance de jauge	22
2.4	Diffusion par un potentiel	23
2.4.1	Rappels sur l'équation de Schrödinger	23
2.4.2	Extension à l'équation de Klein–Gordon	24
2.4.3	Diffusion par un champ électromagnétique	24
2.4.4	Invariance de jauge	25
2.4.5	Diagramme de Feynman	25
2.5	Section efficace de diffusion	26
2.5.1	Amplitude de transition	26
2.5.2	Probabilité de transition	26
2.5.3	Nombre de transitions	27
2.5.4	Formule de Rutherford relativiste	27
2.6	Antiparticules	28

2.6.1	Interprétation de Feynman	28
2.6.2	Création de paires	28
2.7	Exercices et problèmes	29
2.7.1	Masse et dispersion	29
2.7.2	Hamiltonien de Klein–Gordon	29
2.7.3	Marche de potentiel	29
2.7.4	Niveaux de Landau	30
2.7.5	Atome d’hydrogène	30
2.7.6	Facteur de forme	31
2.7.7	Création de paires	31
2.7.8	Couplage à un potentiel scalaire	32
2.7.9	Couplage à une source	32
2.7.10	Potentiel de Yukawa	33
3	Particule de spin $\frac{1}{2}$	35
3.1	Particule libre	35
3.1.1	Construction de l’équation	35
3.1.2	Propriétés des matrices de Dirac	36
3.1.3	Interprétation probabiliste	36
3.1.4	Ondes planes monochromatiques	37
3.1.5	Changement de représentation	38
3.2	Covariance de l’équation de Dirac	39
3.2.1	Forme covariante de l’équation de Dirac	39
3.2.2	Transformation du spineur	39
3.2.3	Spineur conjugué	40
3.2.4	Invariants bilinéaires	40
3.2.5	Construction des transformations infinitésimales	42
3.2.6	Opérateur de spin	42
3.2.7	Parité	43
3.3	Couplage au champ électromagnétique	43
3.3.1	Précession d’un spin dans un champ magnétique	43
3.3.2	Couplage minimal	44
3.3.3	Limite non relativiste	45
3.4	Diffusion de Mott	46
3.4.1	Amplitude de transition	46
3.4.2	Section efficace non polarisée	47
3.5	Antiparticules	48
3.5.1	Points de vue de Feynman et de Dirac	48
3.5.2	Création de paires	48
3.6	Exercices et problèmes	49
3.6.1	Construction des matrices de Dirac	49
3.6.2	Ondes planes dans la représentation de Dirac	50
3.6.3	Quadrivecteur de Pauli–Lubanski	50
3.6.4	Couplage non minimal	50
3.6.5	Opérateur de vitesse; Zitterbewegung	51
3.6.6	Couplage spin–orbite	51
3.6.7	Niveaux de Landau	52
3.6.8	Atome d’hydrogène	53
3.6.9	Création de paires	53
3.6.10	Couplage à un potentiel scalaire	54
3.6.11	Puits de potentiel infini; modèle du sac	54
4	Photons	57
4.1	Photon libre	57
4.1.1	Onde plane monochromatique	57
4.1.2	Calcul semi-classique du nombre de photons	58
4.1.3	Interprétation probabiliste	59
4.1.4	Spin du photon	59
4.2	Création et destruction de photons	60

4.2.1	Amplitude de transition	60
4.2.2	Nombre de photons rayonnés	61
4.2.3	Destruction d'un photon ; états d'énergie négative	62
4.3	Rayonnement dipolaire	63
4.3.1	Calcul du courant	63
4.3.2	Nombre de photons	63
4.3.3	Effet Thomson	64
4.4	Bremsstrahlung	64
4.4.1	Calcul du courant	65
4.4.2	Catastrophe infrarouge	65
4.5	Exercices et problèmes	65
4.5.1	Section efficace de l'effet Thomson	65
4.5.2	Courant de la charge oscillante	66
4.5.3	Particule de spin 1 massive	66
4.5.4	Limite expérimentale sur la masse du photon	66
4.5.5	Probabilité de créer n photons	66
4.5.6	Rayonnement synchrotron	67
4.5.7	Bremsstrahlung : calcul du nombre de photons	68
5	Propagateurs	69
5.1	Propagation de l'onde électromagnétique	69
5.1.1	Position du problème	69
5.1.2	Choix du propagateur	70
5.1.3	Calcul du propagateur retardé	70
5.1.4	Formule des potentiels retardés	72
5.2	Propagateur de Klein–Gordon	72
5.2.1	Définition	72
5.2.2	Application aux calculs de perturbation	72
5.3	Propagateur de Dirac	73
5.4	Application à quelques processus élémentaires	74
5.4.1	Diffusion de deux particules scalaires chargées	74
5.4.2	Création de paires ; symétrie de croisement	76
5.4.3	Diffusion de particules identiques	77
5.5	Récapitulation : règles de Feynman	77
5.6	Exercices et problèmes	78
5.6.1	Fonction de Heaviside	79
5.6.2	Oscillateur forcé	79
5.6.3	Propagation de l'onde à une dimension	79
5.6.4	Propagateurs à 1+1 et 2+1 dimensions	81
5.6.5	Fonction de Green avancée	81
5.6.6	Champ électromagnétique rayonné par un courant	81
5.6.7	Rayonnement d'une particule accélérée	82
5.6.8	Effet Compton scalaire	83
6	Théorie classique des champs	87
6.1	Principe variationnel : équations d'Euler–Lagrange	87
6.1.1	Rappels sur la mécanique lagrangienne	87
6.1.2	Généralisation à plusieurs paramètres	90
6.1.3	Exemple : équation d'onde à une dimension	92
6.2	Symétries et lois de conservation	93
6.2.1	Théorème de Noether en mécanique classique	93
6.2.2	Générateur des transformations infinitésimales	96
6.2.3	Théorème de Noether en théorie des champs	96
6.2.4	Exemples : symétries de l'équation d'onde à une dimension	98
6.3	Exercices	99
6.3.1	Moment cinétique de l'oscillateur harmonique	99
6.3.2	Lagrangien de Klein–Gordon	99
6.3.3	Lagrangien du champ électromagnétique	100
6.3.4	Champ vectoriel libre	101

6.3.5	Lagrangien “topologique”	102
6.3.6	Potentiel de Yukawa	102
6.3.7	Invariance par dilatation (1)	103
6.3.8	Invariance de Lorentz	103
6.3.9	Invariance conforme	103
6.3.10	Non-unicité du courant de Noether	104
6.3.11	Invariance par dilatation (2)	104
6.3.12	Symétrisation du tenseur d’énergie–impulsion	105
7	Quantification du champ scalaire	107
7.1	Introduction	107
7.2	Oscillateur harmonique à deux dimensions	107
7.2.1	Relations de commutation canoniques	108
7.2.2	Le mouvement des opérateurs	108
7.2.3	Modes de vibration circulaires	108
7.2.4	Hamiltonien	109
7.2.5	Moment cinétique	109
7.3	Champ scalaire complexe libre	110
7.3.1	Décomposition en modes propres	110
7.3.2	Particules et antiparticules	111
7.4	Propriétés locales	113
7.4.1	Relations de commutation canoniques locales	113
7.4.2	Symétrie des fonctions d’onde	114
7.4.3	Générateurs des transformations infinitésimales	115
7.5	Champ scalaire réel libre	115
7.5.1	Décomposition en modes ; interprétation physique	115
7.5.2	Relations diverses	116
7.6	Interaction avec une source extérieure	117
7.6.1	Position du problème	117
7.6.2	Opérateurs “in” et “out”	117
7.6.3	Processus d’émission et d’absorption	118
7.6.4	Matrice S	119
7.7	Exercices	121
7.7.1	Commutateur de deux champs	121
7.7.2	Onde plane	121
7.7.3	Etats cohérents de l’oscillateur harmonique	121
7.7.4	Parité et conjugaison de charge	123
7.7.5	Théorème de Wick	123
8	Quantification du champ de Dirac	125
8.1	Quantification des équations du premier ordre	125
8.2	Quantification des variables normales	126
8.2.1	Variable canonique complexe	126
8.2.2	Cas des variables normales	126
8.2.3	Variables normales en mécanique quantique	127
8.2.4	Ensemble de systèmes à deux niveaux ; relations d’anticommutation	127
8.3	Quantification du champ de Dirac libre	128
8.3.1	Décomposition en modes normaux	128
8.3.2	Localité	129
8.4	Interprétation physique : particules et observables	129
8.4.1	Forme locale du hamiltonien	129
8.4.2	Le vide et son énergie	129
8.4.3	Etats à une particule ; redéfinition de b_α et d_α	130
8.4.4	Principe d’exclusion de Pauli	130
8.4.5	Charge, impulsion	130
8.5	Exercices	131
8.5.1	Variables normales et niveaux d’énergie	131
8.5.2	Systèmes à deux niveaux	131
8.5.3	Mer de Dirac	131

9	Théorie des perturbations	133
9.1	Représentation d'interaction	133
9.1.1	Définition	133
9.1.2	Solution de l'équation d'évolution	134
9.2	Perturbations au premier ordre	135
9.2.1	Généralités	135
9.2.2	Champ scalaire en interaction avec une source	136
9.2.3	Electrodynamique quantique	136
9.2.4	Théorie ϕ^4	138
9.2.5	Interactions faibles	138
9.3	Propagateurs de Feynman	138
9.3.1	Champ scalaire	139
9.3.2	Champ de Dirac	140
9.4	Théorème de Wick et règles de Feynman	141
9.5	Exercices et problèmes	142
9.5.1	Propagateurs de Feynman en représentation d'impulsion	142
9.5.2	Théorie de Fermi de la radioactivité β	143
10	Solutions des exercices et problèmes	145
10.1	Particule de spin 0	145
10.1.1	Masse et dispersion	145
10.1.2	Hamiltonien de Klein–Gordon	145
10.1.3	Marche de potentiel	145
10.1.4	Facteur de forme	145
10.1.5	Création de paires	145
10.2	Particule de spin $\frac{1}{2}$	146
10.2.1	Construction des matrices de Dirac	146
10.2.2	Opérateur de vitesse; Zitterbewegung	147
10.2.3	Couplage spin-orbite	147
10.3	Photons	148
10.3.1	Particule de spin 1 massive	148
10.3.2	Limite expérimentale sur la masse du photon	149
10.4	Propagateurs	150
10.4.1	Propagation de l'onde à une dimension	150
10.4.2	Effet Compton scalaire	151
10.5	Théorie classique des champs	155
10.5.1	Lagrangien du champ électromagnétique	155
10.5.2	Invariance de Lorentz	156
10.6	Quantification du champ scalaire	157
10.6.1	Etats cohérents de l'oscillateur harmonique	157
10.7	Quantification du champ de Dirac	159
10.7.1	Systèmes à deux niveaux	159
10.7.2	Théorie de Fermi de la radioactivité β	159

Chapitre 1

Rappels de relativité et d'électromagnétisme

Dans ce premier chapitre sont rassemblées des notations et des formules qui seront utilisées dans le cours. La plupart de ces résultats ont été étudiés, sous une forme parfois un peu différente, dans le cours "Electromagnétisme et relativité", auquel on se référera pour plus de détails.

Nous choisirons dans ce cours un système d'unités où l'unité de vitesse est la vitesse de la lumière, $c = 1$. Avec cette convention, l'unité de longueur est fixée dès qu'on a choisi une unité de temps.

1.1 Transformations de Lorentz

1.1.1 Temps propre

On note les coordonnées d'espace-temps (t, \vec{x}) sous la forme x^μ avec $\mu = 0, 1, 2, 3$. L'intervalle de temps propre τ entre le point X et l'origine est défini, au signe près, par l'équation

$$\tau^2 = t^2 - \vec{x}^2. \quad (1.1)$$

C'est une forme quadratique des coordonnées x^μ :

$$\tau^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \quad (1.2)$$

où $g_{\mu\nu}$ désigne l'élément (μ, ν) de la matrice G suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

dite *métrique de Minkowski*.

Dans l'équation (1.2), nous avons adopté la convention de sommation d'Einstein, qui sera appliquée dans tout ce cours : si, dans un monôme, un indice est présent deux fois, on somme implicitement sur toutes les valeurs possibles de cet indice. La sommation sur μ et ν est donc sous-entendue dans l'équation (1.2). Il faut retenir les règles suivantes, qui permettront de corriger des erreurs de calcul. Elles ont des justifications théoriques profondes, mais nous les énonçons simplement d'un point de vue pratique :

- L'indice répété apparaît une fois en haut, une fois en bas. On ne rencontrera pas d'expressions telles que $x^\mu x^\mu$.
- L'indice répété apparaît exactement deux fois. On ne rencontre pas en général d'expressions telles que $x^\mu y^\mu g_{\mu\mu}$, où le même indice est répété plus de deux fois.
- Un indice répété est un indice muet, qu'on peut remplacer par un autre : on écrira indifféremment $x^\mu y_\mu$ ou $x^\nu y_\nu$, puisqu'on somme de toutes les façons sur toutes les valeurs possibles de μ ou ν . On distinguera bien, dans une expression, les indices muets et les autres, que nous appellerons indices parlants, ceux qui ne sont pas répétés.
- Si une équation fait apparaître la somme de plusieurs termes, chaque terme doit avoir les mêmes indices parlants. Par exemple, $a^\nu + b^\mu c_\mu d^\nu = 0$ est correct, mais sont incorrectes les écritures $a^\mu b_\mu + c_\mu = 0$ (qui ne veut rien dire, l'indice étant répété dans le premier terme et pas dans le second), $a^\mu + b^\nu = 0$, etc.

1.1.2 Transformation de Lorentz

Une transformation linéaire des x^μ de la forme

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.4)$$

est dite transformation de Lorentz si elle conserve l'élément de temps propre, ce qui équivaut à la condition

$$g_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu g_{\rho\sigma} \Lambda^\sigma_\nu. \quad (1.5)$$

Ceci s'écrit sous forme matricielle

$$G = {}^t \Lambda G \Lambda, \quad (1.6)$$

où ${}^t \Lambda$ désigne la transposée de la matrice Λ . En prenant le déterminant de l'équation (1.6), on voit que $\det \Lambda = \pm 1$.

De par leur définition, les transformations de Lorentz forment un groupe, dit groupe de Lorentz homogène. On appelle transformations de Lorentz propres les transformations de déterminant 1. Elles forment évidemment un sous-groupe du groupe de Lorentz. On appelle transformations de Lorentz orthochrones les transformations ne renversant pas le temps, c'est à dire dont la première composante $\Lambda^0_0 > 0$. Elles forment également un sous-groupe du groupe de Lorentz, mais c'est moins évident. Les quatre choix possibles pour les signes de $\det \Lambda$ et Λ^0_0 correspondent aux quatre composantes connexes du groupe de Lorentz.

1.1.3 Exemples

Les isométries d'espace à trois dimensions sont évidemment des transformations de Lorentz. Elles forment un sous-groupe du groupe de Lorentz. L'inversion d'espace, ou parité, a pour matrice

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Les transformations spéciales de Lorentz d'axe x sont les transformations propres orthochrones laissant inchangés y et z . On montre facilement qu'elles sont de la forme

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

où ϕ est un réel quelconque, dit rapidité de la transformation spéciale. L'origine des coordonnées d'espace de l'ancien référentiel, $\vec{x} = \vec{0}$, se déplace dans le nouveau référentiel à la vitesse $\vec{v} = \tanh \phi \vec{e}_x$. On définit par ailleurs le facteur de contraction de Lorentz γ par $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} = \cosh \phi$. Les transformations spéciales d'axe x forment un sous-groupe du groupe de Lorentz. La composée de deux transformations spéciales de rapidités ϕ et ϕ' est une transformation spéciale de rapidité $\phi'' = \phi + \phi'$. La vitesse v'' de la transformation composée est donc égale à

$$v'' = \frac{v + v'}{1 + vv'} \quad (1.9)$$

qui définit la composition des vitesses en relativité.

1.2 Indices contravariants et covariants

1.2.1 Scalaire

On appelle scalaire de Lorentz toute quantité invariante par transformation de Lorentz. L'élément de temps propre $d\tau$ le long d'une trajectoire de l'espace-temps $X^\mu(s)$, où s est une paramétrisation quelconque de la trajectoire, est un scalaire de Lorentz, relié à l'intervalle de temps dt par $d\tau = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2} = dt\sqrt{1 - \vec{v}^2} = dt/\gamma$, où $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ est la vitesse (nous avons supposé ici $|\vec{v}| \leq 1$, ce qui est le cas pour les trajectoires physiques). L'élément de volume d'espace-temps d^4x est également un scalaire de Lorentz car les transformations de Lorentz sont de déterminant ± 1 .

1.2.2 Vecteur contravariant

Un vecteur contravariant V^μ , est un ensemble de quatre quantités qui se transforment comme les x^μ par transformation de Lorentz :

$$V'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu \quad (1.10)$$

ou, sous forme matricielle :

$$V' = \Lambda V. \quad (1.11)$$

Un exemple de vecteur contravariant est la quadrivitesse d'une trajectoire $X^\mu(s)$, définie par

$$u^\mu \equiv \frac{dX^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

avec $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2}$. Le quadrivecteur énergie-impulsion d'une particule de masse m sur cette trajectoire est défini par

$$p^\mu = m u^\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} E_{\vec{p}} \\ \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (1.13)$$

avec $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Notons la relation $\vec{v} = \vec{p}/E_{\vec{p}}$.

La densité de charge $\rho(x)$ et la densité de courant $\vec{j}(x)$ peuvent être réunies pour former un quadrivecteur contravariant $j^\mu(x) = (\rho(x), \vec{j}(x))$.

1.2.3 Vecteur covariant

Un vecteur covariant est par définition un vecteur qui se transforme comme l'opérateur de gradient $\partial/\partial x^\mu$, noté ∂_μ :

$$\partial_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \partial'_\nu. \quad (1.14)$$

Cette définition est générale et dépasse le cadre de la seule relativité restreinte. Elle se réécrit sous forme matricielle, en notant ∇ la matrice colonne des ∂_μ :

$$\nabla' = {}^t \Lambda^{-1} \nabla. \quad (1.15)$$

Dans le cas particulier des rotations, on a ${}^t \Lambda^{-1} = \Lambda$, et il n'y a pas lieu de distinguer indice contravariant et indice covariant. Pour les transformations de Lorentz, par contre, on a en général d'après l'équation (1.6) :

$${}^t \Lambda^{-1} = G \Lambda G^{-1}. \quad (1.16)$$

En utilisant pour G la valeur (1.3), on voit qu'elle coïncide avec son inverse G^{-1} , mais nous les distinguerons ici pour plus de généralité. Des deux équations précédentes, on déduit

$$(G^{-1} \nabla') = \Lambda (G^{-1} \nabla) \quad (1.17)$$

qui montre que $G^{-1} \nabla$ se transforme comme un vecteur contravariant. Réciproquement, si V est un vecteur contravariant, $G V$ est un vecteur covariant qu'on note avec un indice en bas :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu \quad (1.18)$$

soit explicitement, en utilisant (1.3),

$$\begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 \\ -V^1 \\ -V^2 \\ -V^3 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Inversement, à tout vecteur covariant on associe un vecteur contravariant par

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu \quad (1.20)$$

où $g^{\mu\nu}$ est un élément de G^{-1} . D'après (1.3), on a bien sûr $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$.

1.2.4 Tenseurs

Un tenseur peut avoir des indices covariants et contravariants. Par exemple, $T^{\mu\nu}$ se transforme comme $V^\mu V^\nu V_\rho$.

Un tenseur de rang 2 covariant $T_{\mu\nu}$ se transforme, en utilisant (1.14), suivant la loi

$$T_{\mu\nu} = \Lambda^\alpha{}_\mu \Lambda^\beta{}_\nu T'_{\alpha\beta}. \quad (1.21)$$

On peut se servir de $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ pour baisser ou monter un indice d'un tenseur, comme dans les équations (1.18) et (1.20). En particulier, on peut appliquer ce petit jeu à $g^{\mu\nu}$ lui-même, et en abaisser un indice :

$$g^\mu{}_\nu = g_{\nu\rho} g^{\mu\rho} = \delta^\mu{}_\nu. \quad (1.22)$$

puisque $g_{\mu\nu}$ et $g^{\mu\nu}$ sont inverses l'un de l'autre, en formant leur produit on obtient la matrice identité, c'est à dire le symbole de Kronecker $\delta^\mu{}_\nu$, valant 1 si $\mu = \nu$ et 0 sinon.

Application : transformations de Lorentz infinitésimales

Une transformation infinitésimale des coordonnées s'écrit

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu. \quad (1.23)$$

où les $\omega^\mu{}_\nu$ sont tous petits devant 1. En développant (1.5) au premier ordre en $\omega^\mu{}_\nu$, on obtient la condition pour que Λ soit une transformation de Lorentz infinitésimale :

$$g_{\rho\nu} \omega^\rho{}_\mu + g_{\mu\rho} \omega^\rho{}_\nu = 0. \quad (1.24)$$

Bien que $\omega^\mu{}_\nu$ ne soit pas a proprement parler un tenseur, puisque c'est la transformation de Lorentz elle-même, on peut lui appliquer formellement les règles ci-dessus pour en abaisser les indices :

$$\omega_{\nu\mu} + \omega_{\mu\nu} = 0. \quad (1.25)$$

Retenons qu'une transformation linéaire infinitésimale, de la forme (1.23), est une transformation de Lorentz si et seulement si $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique. Ce résultat nous sera utile dans les chapitres suivants. L'ensemble des $\omega^\mu{}_\nu$ forme donc un espace vectoriel de dimension 6. Ceci reflète que les transformations de Lorentz infinitésimales peuvent s'écrire comme produits de rotations infinitésimales autour des trois axes de coordonnées et de transformations spéciales infinitésimales suivant les 3 axes. On montre que toute transformation de Lorentz propre et orthochrone peut s'écrire comme produit de transformations infinitésimales. Dans le langage de la topologie, ceci exprime le fait que le sous-groupe propre orthochrone est la composante connexe de l'identité.

1.2.5 Contractions

Si V^μ est un vecteur contravariant et W_μ un vecteur covariant, il découle des lois de transformation (1.11) et (1.15) que $W_\mu V^\mu = {}^t W V$ est un scalaire de Lorentz (le "produit scalaire" de W et V , improprement nommé puisqu'il peut être négatif). En revanche, ni $W^\mu V^\mu$ ni $W_\mu V_\mu$ ne sont des scalaires.

Quelques exemples : le "carré scalaire" du quadrivecteur d'énergie impulsion (1.13) est simplement $p_\mu p^\mu = m^2$; l'équation de conservation du courant $j^\mu(x)$ s'écrit comme la contraction avec l'opérateur de gradient :

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (1.26)$$

Sous cette forme, il est manifeste que l'équation de conservation du courant est invariante par transformation de Lorentz, puisque chaque membre de l'équation est un scalaire de Lorentz. On dit qu'elle est écrite sous forme covariante.

Notations : si a^μ et b^μ sont deux quadrivecteurs, on notera souvent $a \cdot b = a^\mu b_\mu$ et $a^2 = a^\mu a_\mu$. Ainsi, on écrira pour le quadrivecteur d'énergie-impulsion $p^2 \equiv E^2 - \vec{p}^2 = m^2$.

1.2.6 Tenseur totalement antisymétrique

Définition de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Un tenseur de rang 4 (c'est à dire à 4 indices) $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ est dit totalement antisymétrique s'il change de signe par n'importe quel échange de deux indices. Il est donc nul lorsque deux indices sont égaux. Si les quatre indices sont tous différents, ils sont nécessairement une permutation de (0,1,2,3). $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ est alors égal au produit de T^{0123} par la signature de cette permutation : tous les tenseurs totalement antisymétriques de rang 4 sont proportionnels entre eux. On note conventionnellement $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ le tenseur totalement antisymétrique tel que $\epsilon^{0123} = 1$. D'après la discussion précédente, si $T^{\mu\nu\rho\sigma}$ est totalement symétrique, alors $T^{\mu\nu\rho\sigma} = T^{0123} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Transformation de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$; définition d'un pseudo-tenseur

Regardons comment $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ se transforme dans la transformation de Lorentz $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$. Par définition de la transformation d'un tenseur contravariant, nous pouvons écrire dans le nouveau référentiel

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} \Lambda^{\rho}_{\gamma} \Lambda^{\sigma}_{\delta} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (1.27)$$

Le premier élément de ce nouveau tenseur, ϵ'^{0123} , correspond précisément à la définition du déterminant de la matrice Λ . D'autre part, l'équation précédente permet de montrer facilement que $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$ est également totalement antisymétrique. On en déduit donc

$$\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Lambda. \quad (1.28)$$

Rappelons que les transformations de Lorentz sont de déterminant ± 1 . On choisit en fait d'inclure le facteur $\det \Lambda$ dans la loi de transformation de $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$, Eq. (1.27). On dit alors qu'il s'agit d'un *pseudo-tenseur*. Avec cette transformation modifiée, $\epsilon'^{\mu\nu\rho\sigma}$ garde la même forme dans tout référentiel : il s'agit d'un *pseudo-tenseur invariant*.

Notons que la forme covariante du tenseur totalement antisymétrique a le signe opposé : $\epsilon_{0123} = g_{00}g_{11}g_{22}g_{33}\epsilon^{0123} = -1$. On notera aussi que contrairement à son homologue à trois indices ϵ_{ijk} , il n'est pas invariant par permutation circulaire : $\epsilon^{1230} = -\epsilon^{0123} = -1$.

Utilisations de $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$

Les utilisations de ce tenseur sont nombreuses. Par contraction, il permet notamment d'associer de manière bijective à tout tenseur totalement antisymétrique de rang r ($0 \leq r \leq 4$) un pseudotenseur, lui aussi totalement antisymétrique, de rang $4 - r$. On en verra un exemple dans la section 1.3.2.

Le tenseur totalement antisymétrique permet aussi, comme à trois dimensions, de définir les éléments de volume et de surface. Etant donné quatre quadrivecteurs a^{μ} , b^{μ} , c^{μ} et d^{μ} , $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\mu} b^{\nu} c^{\rho} d^{\sigma}$ est le déterminant de ces quatre vecteurs, et correspond par conséquent (à un signe près, qui est une convention d'orientation liée à la définition de $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$) à l'élément de volume d'espace-temps qu'ils délimitent. De même, le quadrivecteur w_{μ} défini par $w_{\mu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^{\nu} b^{\rho} c^{\sigma}$ est un vecteur orthogonal à a , b et c : $w_{\mu} a^{\mu} = w_{\mu} b^{\mu} = w_{\mu} c^{\mu} = 0$. C'est la généralisation du produit vectoriel à quatre dimensions. Si, par exemple, les trois vecteurs a , b et c ont des composantes temporelles nulles, alors w_{μ} est dirigé suivant l'axe des temps, et w_0 est l'élément de volume d'espace compris dans le parallélépipède formé par ces trois vecteurs. Plus généralement, si a , b et c sont quelconques, w_{μ} représentera le vecteur normal à l'hyperplan qu'ils définissent, et sa norme l'élément d'hypersurface correspondant.

Ceci permet de définir l'intégration sur une hypersurface, à trois dimensions, de l'espace-temps. On la découpe en petits parallélépipèdes infinitésimaux délimités par des quadrivecteurs a , b et c . L'élément d'hypersurface est alors leur produit vectoriel, noté $d\sigma_{\mu}$. Si Σ est une hypersurface fermée, délimitant un volume d'espace-temps \mathcal{V} , le *théorème de Stokes* permet d'écrire :

$$\int_{\mathcal{V}} \partial_{\mu} f d^4x = \oint_{\Sigma} f(x) d\sigma_{\mu} \quad (1.29)$$

où $d\sigma_{\mu}$ est l'élément de surface orienté vers l'extérieur de \mathcal{V} .

Application : courant et charge

Soit un quadrivecteur $j^{\mu}(x)$ dépendant des coordonnées x^{μ} . Par analogie avec l'électromagnétisme, nous dirons qu'il s'agit d'une densité de courant et nous noterons $Q(t)$ la charge associée à l'instant t , définie par $Q(t) = \int j^0(t, \vec{x}) d^3\vec{x}$. Le théorème de Stokes donne

$$\oint_{\Sigma} j^{\mu} d\sigma_{\mu} = \int_{\mathcal{V}} (\partial_{\mu} j^{\mu}) d^4x. \quad (1.30)$$

Si \mathcal{V} désigne le volume d'espace-temps compris entre les instants t_1 et t_2 avec $t_1 < t_2$, alors cette formule s'écrit

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1 < t < t_2} (\partial_{\mu} j^{\mu}) d^4x. \quad (1.31)$$

Si j^{μ} désigne un courant conservé, vérifiant $\partial_{\mu} j^{\mu} = 0$, la charge est constante au cours du temps d'après l'équation précédente. D'autre part, on peut en donner une expression plus générale :

$$Q = \int_{\Sigma} j^{\mu} d\sigma_{\mu} \quad (1.32)$$

où Σ est une hypersurface quelconque s'étendant à l'infini dans la direction spatiale. En effet, cette définition coïncide bien avec la définition usuelle si Σ désigne tout l'espace à t donné. Et d'autre part, si Σ et Σ' désignent deux hypersurfaces différentes et Q et Q' les charges correspondantes, la réunion de Σ et Σ' définit une hypersurface fermée (plus précisément, qu'on peut refermer à l'infini), et l'équation (1.30) montre alors que Q et Q' coïncident.

Nous avons démontré que si $j^\mu(x)$ est un quadrivecteur, alors $Q(t) = \int j^0(t, \vec{x}) d^3\vec{x}$ est indépendant du temps et scalaire de Lorentz (d'après l'équation (1.32)). Nous utiliserons à plusieurs reprises ce résultat dans les chapitres suivants.

1.3 Equations de Maxwell

On forme avec le potentiel scalaire $V(x)$ et le potentiel vecteur $\vec{A}(x)$ un quadrivecteur contravariant $A^\mu(x) = (V(x), \vec{A}(x))$.

1.3.1 Tenseur du champ électromagnétique

C'est un tenseur de rang 2 antisymétrique défini par

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.33)$$

On vérifie que ses composantes correspondent aux coordonnées du champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t$ et du champ magnétique $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

La forme contravariante $F^{\mu\nu}$ s'obtient en remplaçant \vec{E} par $-\vec{E}$ dans (1.34).

1.3.2 Tenseur dual

On définit le tenseur dual, qui est en fait un pseudotenseur, par

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}. \quad (1.35)$$

Il s'écrit explicitement

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z & -E_y \\ B_y & -E_z & 0 & E_x \\ B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

On voit qu'on passe de $F^{\mu\nu}$ (forme contravariante) à $\tilde{F}^{\mu\nu}$ au moyen des substitutions

$$\begin{aligned} \vec{E} &\rightarrow \vec{B} \\ \vec{B} &\rightarrow -\vec{E}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Par conséquent, le dual du dual de $F^{\mu\nu}$ est $-F^{\mu\nu}$.

1.3.3 Invariants bilinéaires

A partir de $F^{\mu\nu}$, on peut construire par contraction un scalaire de Lorentz et un pseudo-scalaire :

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -2(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \\ \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= -4\vec{E} \cdot \vec{B}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Ceci montre en particulier que si \vec{E} et \vec{B} sont orthogonaux dans un référentiel, ils le restent dans tout référentiel. De même, s'ils ont même norme dans un référentiel (dans un système d'unités où $c = 1$), ils ont même norme dans tout référentiel.

1.3.4 Premier groupe d'équations de Maxwell

Le premier groupe d'équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.39)$$

s'écrit sous forme covariante en utilisant le tenseur dual (1.36) :

$$\begin{aligned}\partial_\mu \tilde{F}^{\mu 0} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu i} &= -\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_i,\end{aligned}\quad (1.40)$$

d'où

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (1.41)$$

En remplaçant $\tilde{F}^{\mu\nu}$ par sa définition, (1.35), on peut obtenir une expression équivalente du premier groupe d'équations de Maxwell :

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0. \quad (1.42)$$

Cette expression est totalement antisymétrique dans les indices μ, ν et ρ , et ne donne donc que 4 équations indépendantes, comme (1.41).

Le premier groupe d'équations de Maxwell est automatiquement vérifié si $F_{\mu\nu}$ s'exprime au moyen de potentiels suivant l'équation (1.33). En remplaçant $\tilde{F}^{\mu\nu}$ par sa définition, Eq. (1.35), on obtient en effet

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} (\partial_\mu \partial_\rho A_\sigma - \partial_\mu \partial_\sigma A_\rho). \quad (1.43)$$

En développant, le premier terme contient $\partial_\mu \partial_\rho$ qui est symétrique en μ et ρ , et s'annule par contraction avec le tenseur totalement antisymétrique. De même pour le deuxième terme.

1.3.5 Deuxième groupe d'équations de Maxwell

Le deuxième groupe d'équations de Maxwell

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\quad (1.44)$$

(nous choisissons un système d'unités où $\epsilon_0 = 1$) s'écrit sous forme covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (1.45)$$

La conservation du courant apparaît comme une conséquence directe des équations de Maxwell écrites sous la forme (1.45). En effet, en contractant le premier membre par ∂_ν , on obtient $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}$, qui est la contraction d'un tenseur symétrique par un tenseur antisymétrique, et vaut donc 0 :

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (1.46)$$

qui est bien l'équation de conservation du courant, (1.26).

1.3.6 Invariance de jauge

En effectuant la transformation

$$A^\mu(x) \rightarrow A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x), \quad (1.47)$$

où $\Lambda(x)$ est une fonction arbitraire des coordonnées d'espace-temps, alors $F_{\mu\nu}$ défini par l'équation (1.33) est inchangé. On appelle ceci une transformation de jauge. Elle ne modifie pas les quantités physiques.

Par un choix convenable de Λ , on peut assurer la condition $\partial_\mu A^\mu = 0$, dite condition de jauge de Lorenz. C'est une condition covariante, qui reste vérifiée dans tout référentiel contrairement à, par exemple, la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Dans la jauge de Lorenz, les équations de Maxwell (1.45) se réécrivent, en utilisant (1.33) :

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (1.48)$$

avec la notation $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$.

Chapitre 2

Particule de spin 0

La mécanique quantique non relativiste cesse de s'appliquer lorsque la quantité de mouvement devient comparable à mc , c'est à dire lorsque la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = h/p$ n'est plus très grande devant la longueur d'onde de Compton définie par $\lambda_C = h/mc$. Pour l'électron, celle-ci vaut $\lambda_C \simeq 2,4 \times 10^{-12}$ m. Elle est donc plus petite que l'atome d'hydrogène, mais beaucoup plus grande que le noyau atomique : les effets relativistes se traduisent par des petites corrections (dites de *structure fine*) sur le spectre de l'atome d'hydrogène; en revanche, des électrons ultrarelativistes seront nécessaires pour sonder la structure du noyau atomique.

Nous commençons l'étude de la mécanique quantique relativiste par les particules sans spin. Ce choix est guidé par un souci de simplicité. Dans le modèle standard des interactions électrofaibles et fortes, cependant, la seule particule élémentaire de spin nul est le boson de Higgs, qui n'a pas encore été vu; les autres sont soit de spin 1/2 (électrons, neutrinos, quarks), soit de spin 1 (photons, gluons, bosons W et Z). Un exemple important de particule de spin 0 est cependant fourni par les pions π^+ , π^0 et π^- , particules composites instables formées d'un quark et d'un antiquark. Presque sept fois moins lourds que le proton, ce sont les plus légers des "hadrons", particules subissant l'interaction forte. Dans les collisions à haute énergie, produites dans les accélérateurs de particules ou lors de l'entrée des rayons cosmiques dans l'atmosphère, la majorité des particules créées sont des pions.

2.1 Particule libre

Nous travaillerons dans le système d'unités naturel de la mécanique quantique relativiste, dans lequel $\hbar = c = 1$. Il suffit alors de choisir une unité d'énergie (souvent exprimée en électron-Volt, eV) pour fixer les unités de masse ($[M] = [E]$), de longueur et de temps ($[L] = [T] = [E]^{-1}$).

2.1.1 Equation de Klein–Gordon

Le passage de la mécanique du point à la mécanique ondulatoire se fait à partir de la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, suivant la procédure de quantification dite "canonique", qui postule les correspondances :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{p} &\rightarrow -i \vec{\nabla}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

où \vec{p} désigne l'impulsion canonique associée à la coordonnée \vec{x} , et E l'énergie. En utilisant la notation covariante, ces deux règles se résument à une seule :

$$p^\mu \rightarrow i \partial^\mu. \tag{2.2}$$

Pour une particule libre non relativiste, cette prescription conduit à l'équation de Schrödinger.

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \longrightarrow i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \Delta \psi. \tag{2.3}$$

Pour une particule relativiste, la relation correcte entre énergie et impulsion est $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Si on appliquait directement ceci à une équation d'onde, en développant en puissances de \vec{p}^2 , qui devient $-\Delta$, on

obtiendrait des dérivées d'ordre arbitraire de la fonction d'onde. Pour éviter ces difficultés, on préfère écrire $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

Mais en faisant cette modification, on introduit également comme solution possible $E = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, et une solution d'énergie négative n'est pas physiquement satisfaisante. Nous verrons que l'interprétation des solutions d'énergie négative est le problème essentiel, caractéristique, de la mécanique quantique relativiste. La solution de ce problème est tout à fait remarquable : loin d'être un simple artefact mathématique, ces solutions d'énergie négative reflètent l'existence d'antiparticules associées à chaque particule.

La relation $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ se traduit par l'équation d'onde

$$(\square + m^2)\phi(t, \vec{x}) = 0, \quad (2.4)$$

dite équation de Klein–Gordon.

Contrairement à l'équation de Schrödinger, l'équation de Klein–Gordon est du second ordre en temps. Pour définir complètement l'état quantique à un instant t_0 , il faut donc se donner à la fois la fonction d'onde $\phi(t_0, \vec{x})$ et sa dérivée temporelle $\partial\phi/\partial t(t_0, \vec{x})$ en tout point \vec{x} : ces conditions initiales définissent, mathématiquement, un problème de Cauchy pour l'équation de Klein–Gordon, dont la solution est unique.

Notons aussi que comme toute équation différentielle du second ordre en temps, l'équation de Klein–Gordon (2.4) peut être réécrite sous forme d'un système de deux équations du premier ordre en temps. C'est l'objet de l'exercice 2.7.2, qui met l'équation de Klein–Gordon sous une forme analogue à l'équation de Schrödinger.

2.1.2 Covariance de l'équation ; spin

L'opérateur $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ étant un scalaire de Lorentz, l'équation de Klein–Gordon est manifestement invariante par transformation de Lorentz.

Soyons plus précis. Notons Λ la matrice 4×4 de la transformation de Lorentz. Les nouvelles coordonnées sont alors définies par $x' = \Lambda x$. Si ϕ est solution de l'équation de Klein–Gordon, alors la solution correspondante dans le nouveau référentiel est notée ϕ' . Elle est définie par

$$\phi'(x') = \phi(x). \quad (2.5)$$

En particulier, cette équation nous dicte la transformation de la fonction d'onde de Klein–Gordon dans une rotation. Ceci nous permet d'obtenir l'expression du moment cinétique total de la particule correspondante, qui est par définition le *générateur des rotations infinitésimales*. Rappelons ce que cela signifie. Tout d'abord, définissons la rotation infinitésimale d'angle $\theta \ll 1$ autour de l'axe de coordonnées j . A \vec{x} , elle associe \vec{x}' défini par :

$$\vec{x}' = \vec{x} + \theta \vec{e}_j \times \vec{x}, \quad (2.6)$$

soit explicitement

$$x'_k = x_k + \theta \epsilon_{kjl} x_l. \quad (2.7)$$

Dans cette rotation, la fonction d'onde ϕ sera changée en ϕ' définie plus haut. Le moment cinétique selon l'axe j , noté J_j , est un opérateur agissant sur ϕ , qu'on définit à partir de la transformation de ϕ à ϕ' en un point donné \vec{x} :

$$\phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = -i\theta J_j \phi(\vec{x}), \quad (2.8)$$

où nous avons omis le temps t , qui est le même partout. Cette définition du moment cinétique total est générale.

A partir de la loi de transformation (2.5), nous pouvons obtenir l'expression explicite de l'opérateur J_j . Notons déjà qu'elle sera la même que pour la fonction d'onde de Schrödinger, qui se transforme de la même façon par rotation. Nous commençons par écrire

$$\phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = \phi'(\vec{x}) - \phi'(\vec{x}') = -\delta x_k \frac{\partial \phi'}{\partial x_k} \quad (2.9)$$

où $\delta x_k = x'_k - x_k$ désigne la variation de la coordonnée x_k . Au premier ordre en θ , on peut confondre ϕ' avec ϕ . En remplaçant δx_k par son expression (2.7), on obtient alors

$$\phi'(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) = -\theta \epsilon_{kjl} x_l \frac{\partial \phi}{\partial x_k}. \quad (2.10)$$

En identifiant avec (2.8), on obtient

$$J_j = -i \epsilon_{jlk} x_l \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.11)$$

Vectériellement, ceci s'écrit comme un produit vectoriel

$$\vec{J} = \vec{x} \times (-i\vec{\nabla}). \quad (2.12)$$

On reconnaît l'expression de l'opérateur de moment cinétique orbital, $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{P}$, où $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur d'impulsion. Rappelons qu'on décompose généralement le moment cinétique \vec{J} sous la forme $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, où \vec{S} désigne l'opérateur de spin. Ici, $\vec{J} = \vec{L}$ donc $\vec{S} = 0$: la particule décrite par l'équation de Klein–Gordon est de spin nul.

2.1.3 Solution générale de l'équation

L'équation de Klein–Gordon (2.4) est une équation aux dérivées partielles à coefficients constants. Toute solution peut donc s'écrire comme combinaison linéaire d'ondes planes, de la forme

$$\phi(t, \vec{x}) = e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})}. \quad (2.13)$$

L'équation de Klein–Gordon impose la relation de dispersion avec $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$.

Nous allons commencer par définir une base d'ondes planes. Nous notons $p^0 = E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, et nous définissons

$$\phi_{\vec{p}}(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}V}} e^{-i(E_{\vec{p}}t - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}V}} e^{-ip^\mu x_\mu}, \quad (2.14)$$

où la normalisation dans le volume V , pour l'instant arbitraire, s'avérera utile un peu plus loin. C'est une solution à énergie positive de l'équation de Klein–Gordon. D'autre part, l'équation de Klein–Gordon (2.4) est à coefficients réels. Par conséquent, si $\phi_{\vec{p}}(t, \vec{x})$ est solution, son complexe conjugué $\phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x})$ l'est également. C'est une solution d'impulsion $-\vec{p}$ et d'énergie négative $-E_{\vec{p}}$.

La solution générale de l'équation de Klein–Gordon s'écrit donc

$$\phi(x) = \sum_{\vec{p}} (b_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(x) + d_{\vec{p}}^* \phi_{\vec{p}}^*(x)), \quad (2.15)$$

où la somme porte sur les valeurs permises de l'impulsion dans le volume V , et $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ désignent des coefficients complexes arbitraires.

Nous allons terminer cette première partie par la résolution du problème suivant : étant donné une solution arbitraire $\phi(x)$ de l'équation de Klein–Gordon, comment calculer les coefficients $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ de sa décomposition sur la base des ondes planes ? Commençons par $b_{\vec{p}}$. Dans le cas de l'équation de Schrödinger, on projette ϕ sur $\phi_{\vec{p}}$ en calculant

$$\langle \phi_{\vec{p}} | \phi \rangle = \int_V \phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) \phi(t, \vec{x}) d^3\vec{x}, \quad (2.16)$$

où l'intégrale s'effectue sur le volume V à un temps fixé t . $\phi_{\vec{p}}$ étant une onde plane, ceci revient à effectuer une transformée de Fourier à t fixé, qui isole la composante d'impulsion \vec{p} dans la fonction d'onde ϕ . Dans le cas de l'équation de Klein–Gordon, ça ne marche pas, car il y a deux solutions indépendantes d'impulsion \vec{p} , la solution d'énergie positive $\phi_{\vec{p}}(x)$ et la solution d'énergie négative $\phi_{-\vec{p}}^*(x)$. En remplaçant $\phi_{\vec{p}}$ et ϕ par leurs expressions respectives (2.14) et (2.15), on obtient en effet

$$\int_V \phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) \phi(t, \vec{x}) d^3\vec{x} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}} b_{\vec{p}} + \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{2iE_{\vec{p}}t} d_{-\vec{p}}^*, \quad (2.17)$$

ce qui ne suffit pas à déterminer $b_{\vec{p}}$. C'est logique car à t fixé, $\phi(x)$ ne contient pas toute l'information sur l'état du système. Celui-ci n'est déterminé que si on connaît également la dérivée $\partial\phi/\partial t$, qu'il est donc naturel de faire intervenir. Calculons donc

$$\int_V \phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) i \frac{\partial\phi(t, \vec{x})}{\partial t} d^3\vec{x} = \frac{1}{2} b_{\vec{p}} - \frac{1}{2} e^{2iE_{\vec{p}}t} d_{-\vec{p}}^*. \quad (2.18)$$

Il ne reste qu'à éliminer $d_{-\vec{p}}^*$ entre les deux dernières équations pour obtenir $b_{\vec{p}}$:

$$\begin{aligned} b_{\vec{p}} &= \int_V \left(\phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) i \frac{\partial\phi(t, \vec{x})}{\partial t} + E_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) \phi(t, \vec{x}) \right) d^3\vec{x} \\ &= i \int_V \left(\phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x}) \frac{\partial\phi(t, \vec{x})}{\partial t} - \frac{\partial\phi_{\vec{p}}^*(t, \vec{x})}{\partial t} \phi(t, \vec{x}) \right) d^3\vec{x}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

On obtient de même $d_{\vec{p}}$ en remplaçant ϕ par ϕ^* dans cette équation.

2.2 Interprétation probabiliste

Pour que l'équation d'onde acquière un sens physique, il faut définir son interprétation en terme de probabilités. Nous allons en proposer une qui s'applique aux états d'énergie positive. Nous reviendrons sur les états d'énergie négative à la fin de ce chapitre.

2.2.1 Amplitude de probabilité

Soit $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ deux solutions d'énergie positive de l'équation de Klein-Gordon. Si le système est dans l'état $\phi_2(x)$, nous définissons l'amplitude de probabilité d'être dans l'état $\phi_1(x)$ par analogie avec l'équation (2.19) :

$$\langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = i \int_V d^3 \vec{x} \left(\phi_1^* \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1^*}{\partial t} \phi_2 \right), \quad (2.20)$$

où l'intégrale s'effectue pour une valeur fixée de t . Cette quantité est aussi appelée *recouvrement* entre ϕ_1 et ϕ_2 . Cette définition diffère de celle de l'équation de Schrödinger parce que l'équation de Klein-Gordon est du second ordre en temps. C'est la difficulté essentielle de ce chapitre. Nous verrons au chapitre 3 que ce problème n'apparaît pas pour des particules de spin 1/2, décrites par l'équation de Dirac.

En prenant pour $\phi(x)$ une onde plane d'énergie positive $\phi_{\vec{q}}(x)$ dans les équations (2.15) et (2.19), on obtient $\langle \phi_{\vec{p}} | \phi_{\vec{q}} \rangle = \delta_{\vec{p}, \vec{q}}$. On en déduit deux choses : d'une part les ondes planes (2.14) sont normalisées ($\langle \phi_{\vec{p}} | \phi_{\vec{p}} \rangle = 1$), ce qui explique notre convention de normalisation. D'autre part, l'équation (2.20) définit bien un produit scalaire hermitien (une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive) sur l'espace des solutions d'énergie positive.

Peut-on étendre la définition (2.20) aux états d'énergie négative ? Tout d'abord, si on remplace $\phi(x)$ par une onde plane d'énergie négative $\phi_{\vec{q}}^*(x)$ dans les équations (2.15) et (2.19), on obtient $\langle \phi_{\vec{p}} | \phi_{\vec{q}}^* \rangle = 0$: le recouvrement est nul entre un état d'énergie positive et un état d'énergie négative, ce qui est satisfaisant. Les problèmes surviennent si on calcule le recouvrement entre deux ondes planes d'énergie négative $\phi_{\vec{p}}^*(x)$ et $\phi_{\vec{q}}^*(x)$. En remplaçant ϕ_1 et ϕ_2 par leurs complexes conjugués dans (2.20), on change en effet le signe de l'amplitude à cause du facteur i . On a donc $\langle \phi_{\vec{p}}^* | \phi_{\vec{q}}^* \rangle = -\langle \phi_{\vec{p}} | \phi_{\vec{q}} \rangle = -\delta_{\vec{p}, \vec{q}}$. Par conséquent, l'équation (2.20) ne définit pas une forme bilinéaire définie positive sur l'ensemble des solutions de l'équation de Klein-Gordon. Mais nous n'avons pas encore d'interprétation physique pour les solutions d'énergie négative, et nous laisserons ce problème de côté pour l'instant.

Notons que la définition du recouvrement fixe la dimension de la fonction d'onde de Klein-Gordon. Puisque l'amplitude de probabilité est sans dimension, on déduit de l'équation (2.20) que la fonction d'onde ϕ doit être homogène à l'inverse d'une longueur $[\phi] \equiv L^{-1} = E$. La fonction d'onde de Klein-Gordon n'a donc pas la même dimension que la fonction d'onde de Schrödinger $[\psi] \equiv L^{-3/2}$.

2.2.2 Invariance de Lorentz

Notre interprétation probabiliste n'a de sens que si l'amplitude de probabilité est indépendante du temps (ce qu'on a déjà pu constater sur l'équation (2.19)), et aussi indépendante du référentiel choisi pour la calculer.

Pour vérifier ces propriétés, nous introduisons un quadrivecteur $j^\mu(x)$, dit *courant de transition* entre ϕ_2 et ϕ_1 , défini par

$$j^\mu(x) = i (\phi_1^* \partial^\mu \phi_2 - (\partial^\mu \phi_1^*) \phi_2). \quad (2.21)$$

Ce courant est conservé si ϕ_1 et ϕ_2 sont solutions de l'équation de Klein-Gordon (2.4) :

$$\partial_\mu j^\mu(x) = i (\phi_1^* \square \phi_2 - (\square \phi_1^*) \phi_2) = i (\phi_1^* (-m^2 \phi_2) - (-m^2 \phi_1^*) \phi_2) = 0. \quad (2.22)$$

La conservation d'un quadrivecteur courant implique que la charge associée $Q = \int_V j^0 d^3 \vec{x}$, qui correspond précisément à l'amplitude de probabilité (2.20), est bien indépendante de t ainsi que du référentiel choisi pour la calculer (on peut le voir par analogie avec le courant électrique ; une démonstration formelle est également donnée dans la section 1.2.6).

Si nous avons choisi la même définition de l'amplitude de probabilité que pour l'équation de Schrödinger, elle n'aurait pas été invariante par transformation de Lorentz. De plus, le recouvrement entre un état d'énergie positive et un état d'énergie négative aurait été non nul (et dépendant du temps!).

2.2.3 Densité et courant de probabilité

La densité $\rho(x)$ et le courant de probabilité $\vec{j}(x)$ associés à une fonction d'onde $\phi(x)$ forment un quadrvecteur $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, qui s'obtient naturellement en posant $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ dans le courant de transition (2.21) :

$$j^\mu(x) = i(\phi^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^*) \phi). \quad (2.23)$$

Ce courant de probabilité est réel (le courant de transition, lui, ne l'est pas en général). Pour l'onde plane d'énergie positive $\phi_{\vec{p}}(x)$, il est constant :

$$j^\mu(x) = \frac{1}{2E_{\vec{p}}V} 2p^\mu. \quad (2.24)$$

Le courant et la densité sont donc reliés par $\vec{j} = \rho \vec{p}/E_{\vec{p}} = \rho \vec{v}$, où $\vec{v} = \vec{p}/E_{\vec{p}}$ désigne la vitesse de groupe de l'onde plane, qui correspond à la vitesse des particules classiques.

2.2.4 Limite non relativiste

Il reste à vérifier que notre interprétation probabiliste coïncide avec celle de l'équation de Schrödinger dans la limite non relativiste.

Soit une solution $\phi(x)$ d'énergie positive et non relativiste, c'est à dire une superposition d'ondes planes avec $|\vec{p}| \ll m$, et $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \simeq m + \vec{p}^2/2m$. Alors, la fonction $\psi(x)$ définie par

$$\phi(x) = \frac{e^{-imt}}{\sqrt{2m}} \psi(x) \quad (2.25)$$

sera naturellement solution de l'équation de Schrödinger, puisqu'elle est superposition d'ondes planes d'énergie cinétique $\vec{p}^2/2m$.

Calculons la densité et le courant de probabilité dans cette limite. L'énergie totale étant presque égale à l'énergie de masse, $i\partial\phi/\partial t \simeq m\phi$ à l'ordre 0 en \vec{p} . La densité de probabilité devient alors

$$\rho(t, \vec{x}) = 2m\phi^* \phi = \psi^* \psi \quad (2.26)$$

qui correspond bien à la densité de probabilité de l'équation de Schrödinger.

Quant au courant, il s'obtient immédiatement à partir de (2.23) et (2.25) :

$$\begin{aligned} \vec{j}(t, \vec{x}) &= -i(\phi^* \vec{\nabla} \phi - (\vec{\nabla} \phi^*) \phi) \\ &= -\frac{i}{2m} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi), \end{aligned} \quad (2.27)$$

qui coïncide bien avec le courant de probabilité de l'équation de Schrödinger.

2.3 Couplage au champ électromagnétique

Pour faire de la physique intéressante, il faut mettre des interactions, que nous voulons d'autre part compatibles avec la relativité. Dans les deux sections qui suivent, nous examinons le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique. D'autres types d'interactions, formellement plus simples mais d'un intérêt physique moins immédiat, sont étudiés dans les exercices 2.7.8 et 2.7.9.

2.3.1 Rappels de mécanique lagrangienne

Le lagrangien d'une particule de charge e dans un champ électromagnétique $A^\mu(x)$ donné s'écrit

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{v}) = -m\sqrt{1 - \vec{v}^2} - eA^0(\vec{x}) + e\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \quad (2.28)$$

De ce lagrangien, on déduit l'impulsion canonique

$$\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + e\vec{A} \quad (2.29)$$

et l'énergie

$$E = \vec{p} \cdot \vec{v} - \mathcal{L} = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} + eA^0. \quad (2.30)$$

Autrement dit, on introduit le champ électromagnétique au moyen de la substitution $p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu$. En éliminant la vitesse \vec{v} entre ces deux expressions, on obtient la relation suivante entre énergie et impulsion, que nous écrivons sous forme covariante :

$$(E - eA^0)^2 - (\vec{p} - e\vec{A})^2 = (p^\mu - eA^\mu)(p_\mu - eA_\mu) = m^2. \quad (2.31)$$

On remarquera que, comme dans le cas non relativiste, l'impulsion canonique (2.29) ne coïncide pas avec la quantité de mouvement en présence d'un champ magnétique. De même, l'énergie (2.30) est ici l'énergie mécanique totale, somme de l'énergie de masse, de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle électrostatique. Notons aussi que p^μ défini par (2.29) et (2.30) n'est pas une quantité invariante de jauge.

2.3.2 Forme de l'équation d'onde

En appliquant la règle de correspondance $p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$, la relation (2.31) donne l'équation d'onde

$$(i\partial^\mu - eA^\mu(x))(i\partial_\mu - eA_\mu(x))\phi(x) = m^2\phi(x). \quad (2.32)$$

Introduisons l'opérateur de *dérivée covariante* défini par

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu(x). \quad (2.33)$$

L'équation (2.32) devient alors

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.34)$$

En développant, cette équation se récrit

$$(\square + m^2)\phi = -ie(\partial_\mu(A^\mu\phi) + A^\mu\partial_\mu\phi) + e^2 A^\mu A_\mu\phi \quad (2.35)$$

où le second membre décrit le couplage au champ électromagnétique.

Il est important de connaître la dimension des diverses quantités intervenant dans l'équation (2.32). Dans le système d'unités où $\hbar = c = \epsilon_0 = 1$, A^μ a la dimension d'une énergie : en effet, $\vec{E}^2/2$ est la densité d'énergie par unité de volume, homogène à $[E]^4$, donc \vec{E} est homogène à $[E]^2$ et A^μ à $[E]$. Ceci implique que la charge e est sans dimension : $e^2/(4\pi) = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137,036$ est dite constante de structure fine. Le fait que e soit petit devant 1 est fondamental : il nous permettra de faire des développements en puissances de e , c'est à dire de la théorie de perturbations.

2.3.3 Courant de transition

En présence d'un champ électromagnétique, il faut remplacer la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante D_μ dans l'expression du courant de transition (2.21) :

$$j^\mu(x) = i(\phi_1^* D^\mu \phi_2 - (D^\mu \phi_1)^* \phi_2). \quad (2.36)$$

On doit naturellement effectuer la même substitution dans l'amplitude de probabilité (2.20) et le courant de probabilité (2.23).

Pour vérifier que le courant ainsi défini est bien conservé, il suffit d'utiliser l'identité suivante, valable pour n'importe quelles fonctions complexes $f(x)$ et $g(x)$, qui s'obtient en utilisant la définition de la dérivée covariante, Eq. (2.33) :

$$\partial_\mu(f^*g) = (D_\mu f)^*g + f^*(D_\mu g). \quad (2.37)$$

En utilisant cette identité, on obtient

$$\partial_\mu j^\mu(x) = i(\phi_1^* D_\mu D^\mu \phi_2 - (D_\mu D^\mu \phi_1)^* \phi_2), \quad (2.38)$$

qui s'annule en utilisant l'équation de Klein-Gordon sous la forme (2.34).

2.3.4 Invariance de jauge

La transformation

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(x)e^{-ie\Lambda(x)} \\ A'^\mu(x) &= A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x), \end{aligned} \quad (2.39)$$

avec $\Lambda(x)$ arbitraire est une transformation de jauge sur le champ $A^\mu(x)$, c'est à dire qu'elle ne change pas le tenseur du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$. Cette transformation laisse inchangée l'équation de Klein–Gordon, comme on le vérifie aisément en regardant la transformation de la dérivée covariante D_μ :

$$D'_\mu \phi' = (\partial_\mu + ieA'_\mu)\phi' = e^{-ie\Lambda}(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi = e^{-ie\Lambda}D_\mu\phi. \quad (2.40)$$

Cette équation montre également que le courant de transition (2.36) est invariant de jauge. Ceci assure que les amplitudes de probabilité sont invariantes par transformation de jauge.

2.4 Diffusion par un potentiel

Nous allons étudier, à titre d'exemple, la diffusion d'une particule relativiste par un champ électromagnétique donné $A^\mu(x)$: il s'agit simplement de la généralisation relativiste de la diffusion de Rutherford. Ce calcul nous permettra d'introduire des concepts et des techniques très utiles en physique des particules. D'autres exemples de solutions de l'équation de Klein–Gordon en présence d'un champ électromagnétique sont présentés dans les exercices 2.7.3 à 2.7.7.

Pour ce calcul, le champ électromagnétique $A^\mu(x)$ sera traité comme une petite perturbation. Rappelons d'abord la théorie des perturbations dépendant du temps au premier ordre pour l'équation de Schrödinger. Nous verrons ensuite comment l'étendre à l'équation de Klein–Gordon.

2.4.1 Rappels sur l'équation de Schrödinger

Pour une particule non relativiste soumise à un potentiel pouvant dépendre du temps $W(x)$, l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_0\right)|\psi\rangle = W|\psi\rangle \quad (2.41)$$

où l'on a noté $H_0 = -\Delta/2m$ le hamiltonien libre. Nous allons calculer l'amplitude de diffusion d'une particule par le potentiel $W(x)$, au premier ordre en $W(x)$. On suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, $|\psi\rangle$ est une solution de l'équation de Schrödinger libre, notée $|\psi_i\rangle$, et on va calculer la probabilité d'être dans un autre état libre, noté $|\psi_f\rangle$, à $t \rightarrow +\infty$. Ces deux états, qui sont bien définis pour tout t , sont dits états "in" (entrant) et "out" (sortant), respectivement.

Il faut donc calculer l'amplitude de transition

$$\mathcal{A}_{fi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi_f | \psi \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_V d^3\vec{x} \psi_f^*(x) \psi(x) \quad (2.42)$$

où ψ et ψ_f sont respectivement solutions de

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle &= (H_0 + W)|\psi\rangle \\ i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_f\rangle &= H_0|\psi_f\rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

La deuxième équation se réécrit

$$-i\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_f| = \langle\psi_f|H_0, \quad (2.44)$$

où le hamiltonien agit à gauche. En combinant les équations d'évolution de $|\psi\rangle$ et $\langle\psi_f|$, on obtient

$$i\frac{\partial}{\partial t}\langle\psi_f|\psi\rangle = \langle\psi_f|W|\psi\rangle. \quad (2.45)$$

En intégrant (2.45) sur le temps, et en supposant le recouvrement nul à $t = -\infty$ (l'état initial et l'état final différent), on en déduit l'amplitude de transition

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle\psi_f|W|\psi\rangle = -i \int d^4x \psi_f^*(x)W(x)\psi(x). \quad (2.46)$$

Cette équation est exacte, mais on ne connaît pas la fonction d'onde $\psi(x)$. On va supposer que ψ coïncide avec l'onde incidente ψ_i . On obtient alors le résultat suivant, correct au premier ordre dans la perturbation $W(x)$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \psi_f^*(x)W(x)\psi_i(x). \quad (2.47)$$

Remarquons que nous avons obtenu l'amplitude de transition au premier ordre directement, sans même avoir eu besoin de calculer la fonction d'onde $\psi(x)$ au premier ordre dans la perturbation. Si on veut effectuer un calcul à un ordre n , il suffit, d'après l'équation (2.46), de déterminer $\psi(x)$ à l'ordre $n - 1$. On dit qu'il s'agit d'une formule de *réduction*, que nous allons maintenant généraliser à l'équation de Klein–Gordon.

2.4.2 Extension à l'équation de Klein–Gordon

Considérons l'équation

$$(\square + m^2)\phi(x) = -W(x)\phi(x), \quad (2.48)$$

où $W(x)$ désigne un opérateur agissant sur ϕ (notons que $W(x)$ ne correspond pas à une énergie potentielle : sa dimension est $[E]^2$ au lieu de $[E]$). En raisonnant de la même façon que pour l'équation de Schrödinger, on suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, ϕ est une onde libre $\phi_i(x)$, et on va calculer la probabilité d'être dans une autre onde libre, notée $\phi_f(x)$, pour $t \rightarrow \infty$.

D'après la définition du recouvrement pour l'équation de Klein–Gordon (2.20), l'amplitude de transition s'écrit cette fois

$$\mathcal{A}_{fi} = i \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_t d^3 \vec{x} \left(\phi_f^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi_f^*}{\partial t} \phi \right) \quad (2.49)$$

où ϕ et ϕ_f sont respectivement solutions de

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi &= -W\phi \\ (\square + m^2)\phi_f &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Comme dans la section 2.2.1, le recouvrement entre ϕ et ϕ_f représente la charge associée au courant de transition défini par (2.21) :

$$j^\mu(x) = i (\phi_f^* \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi). \quad (2.51)$$

Mais à cause de la perturbation $W(x)$, ce courant n'est plus conservé, comme il l'était pour l'équation libre. Des équations (2.50), on déduit en effet

$$\partial_\mu j^\mu = -i \phi_f^* W \phi. \quad (2.52)$$

Par conséquent, le recouvrement entre ϕ_f et ϕ n'est pas constant au cours du temps. Sa variation entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par l'intégrale sur l'espace-temps compris entre t_1 et t_2 de $\partial_\mu j^\mu$ (voir Eq. (1.31)). Dans la limite $t_1 \rightarrow -\infty$ et $t_2 \rightarrow +\infty$, le recouvrement étant nul pour $t \rightarrow -\infty$ (on s'intéresse à une transition vers un état différent de l'état initial), on obtient donc

$$\mathcal{A}_{fi} = \int d^4 x \partial_\mu j^\mu = -i \int d^4 x \phi_f^* W \phi. \quad (2.53)$$

Notons qu'avec les conventions choisies, le résultat est formellement identique à celui obtenu pour l'équation de Schrödinger, Eq. (2.46).

C'est une formule exacte, mais on ne connaît pas $\phi(x)$. Au premier ordre dans la perturbation $W(x)$, on peut remplacer ϕ par ϕ_i , d'où

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4 x \phi_f^* W \phi_i. \quad (2.54)$$

Les calculs d'ordre supérieur seront étudiés dans le chapitre 5.

2.4.3 Diffusion par un champ électromagnétique

Au premier ordre en A^μ , l'équation de Klein–Gordon en présence d'un champ électromagnétique, Eq. (2.35), s'écrit sous la forme (2.48) avec $W = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)$. On n'oubliera pas que l'opérateur ∂_μ agit sur tout ce qui suit. L'amplitude de transition au premier ordre est donnée par (2.54) :

$$\mathcal{A}_{fi} = e \int d^4 x (\phi_f^* \partial^\mu (A_\mu \phi_i) + \phi_f^* A_\mu \partial^\mu \phi_i). \quad (2.55)$$

En intégrant le premier terme par parties, en supposant que A^μ s'annule pour $t = \pm\infty$, on peut mettre l'amplitude sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4 x j^\mu(x) A_\mu(x) \quad (2.56)$$

où l'on a introduit le courant de transition entre ϕ_i et ϕ_f

$$j^\mu(x) = ie (\phi_f^* \partial^\mu \phi_i) - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i, \quad (2.57)$$

qui est celui défini par l'équation (2.21), c'est à dire calculé en l'absence de champ, à un facteur e près : il ne s'agit plus d'un courant de probabilité mais d'un courant électrique.

2.4.4 Invariance de jauge

Soit la transformation de jauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, avec $\Lambda(x)$ arbitraire, nulle à l'infini. La variation de l'amplitude dans cette transformation est donnée par (2.56) :

$$\delta \mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \Lambda(x). \quad (2.58)$$

En intégrant par parties, en utilisant que $\Lambda(x)$ est nulle à l'infini, on obtient

$$\delta \mathcal{A}_{fi} = i \int d^4x (\partial_\mu j^\mu(x)) \Lambda(x) = 0. \quad (2.59)$$

Or le courant de transition vérifie l'équation de conservation $\partial_\mu j^\mu = 0$, comme le montre l'équation (2.22) (rappelons que ϕ_i et ϕ_f sont solutions de l'équation de Klein-Gordon libre) Donc l'amplitude de transition est invariante dans la transformation de jauge.

2.4.5 Diagramme de Feynman

Choisissons pour ϕ_i et ϕ_f des ondes planes normalisées d'énergies positive, d'impulsions respectives p_i et p_f , données par l'équation (2.14). Le courant de transition (2.57) vaut alors

$$j^\mu(x) = e \left(p_i^\mu + p_f^\mu \right) e^{-i(p_i^\nu - p_f^\nu)x_\nu} \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_i}}} \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_f}}}. \quad (2.60)$$

L'amplitude de transition, Eq. (2.56), fait apparaître la transformée de Fourier du champ électromagnétique.

Nous commençons donc par définir la transformée de Fourier $\tilde{F}(\omega, \vec{k})$ d'une fonction quelconque $F(t, \vec{x})$ par

$$\tilde{F}(\omega, \vec{k}) = \int dt d^3\vec{x} F(t, \vec{x}) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (2.61)$$

Ceci peut également s'écrire sous forme covariante, en introduisant le quadrivecteur $k^\mu \equiv (\omega, \vec{k})$:

$$\tilde{F}(k) = \int d^4x F(x) e^{ik^\mu x_\mu}. \quad (2.62)$$

Si $F(x)$ est une fonction scalaire de Lorentz, il en sera alors de même de $\tilde{F}(k)$.

La transformée inverse est donnée par

$$F(t, \vec{x}) = \int \frac{d\omega d^3\vec{k}}{(2\pi)^4} \tilde{F}(\omega, \vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{F}(k) e^{-ik^\mu x_\mu}. \quad (2.63)$$

Avec cette notation, l'amplitude de transition (2.56) s'écrit sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \left(p_i^\mu + p_f^\mu \right) \tilde{A}_\mu(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_i}}} \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_f}}} \quad (2.64)$$

où l'on a fait apparaître la transformée de Fourier du champ électromagnétique.

Retenons que l'amplitude de transition est le produit des facteurs de normalisation $1/\sqrt{2E_{\vec{p}}V}$ par une quantité scalaire de Lorentz et indépendante du volume de normalisation, dite amplitude réduite et notée τ_{fi} .

Ce processus se représente par le diagramme de Feynman de la figure 2.1. La ligne ondulée désigne le champ électromagnétique. La croix signale qu'il s'agit d'un champ extérieur donné. La particule scalaire est symbolisée par des tirets, avec une flèche donnant le sens de propagation de la charge électrique. L'intersection entre les deux lignes, dite "vertex", représente l'interaction entre la particule et le champ.

Les règles de Feynman permettent, à partir d'un diagramme, de calculer l'amplitude réduite correspondante, qui s'écrit comme le produit de poids associés aux diverses parties du diagramme (vertex, lignes externes, lignes internes quand il y en a). De ce processus, nous pouvons déduire nos premières règles de Feynman : le poids associé au vertex d'interaction électromagnétique d'une particule scalaire est $-ie(p_i^\mu + p_f^\mu)$. Le poids associé au champ extérieur est $\tilde{A}_\mu(p_f - p_i)$. C'est lui qui apporte la différence d'impulsion $p_f - p_i$. L'énergie et l'impulsion sont ainsi conservés aux vertex, comme le courant électrique aux nœuds d'un circuit. Enfin, le poids des lignes externes des particules scalaires est simplement 1.

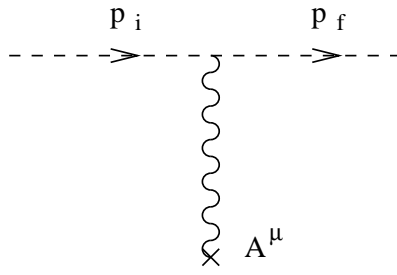


FIG. 2.1 – Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne.

2.5 Section efficace de diffusion

Nous allons calculer la section efficace de diffusion par une charge ponctuelle fixe située en $\vec{x} = \vec{0}$. Rappelons que la section efficace est le nombre de diffusions par unité de temps, divisé par le flux de particules incident. Pour calculer le nombre de diffusions par unité de temps, il faut calculer la probabilité de transition par unité de temps vers un état final donné, puis multiplier par le nombre d'états finals possibles.

2.5.1 Amplitude de transition

Pour un champ indépendant du temps $A^\mu(\vec{x})$, la transformée de Fourier (2.61) se réduit à

$$\tilde{A}^\mu(\omega, \vec{k}) = 2\pi\delta(\omega) \tilde{A}^\mu(\vec{k}) \quad (2.65)$$

où $\tilde{A}^\mu(\vec{k})$ désigne la transformée de Fourier spatiale du champ :

$$\tilde{A}^\mu(\vec{k}) = \int d^3\vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} A^\mu(\vec{x}). \quad (2.66)$$

En remplaçant (2.65) dans l'équation (2.64), on en déduit qu'il y a conservation de l'énergie lorsque le champ est indépendant du temps. On retrouve ainsi un résultat familier de la théorie des perturbations en mécanique quantique.

Si le champ est purement électrostatique, l'amplitude de transition devient

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{ie}{V} \tilde{A}^0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) 2\pi\delta(E_{\vec{p}_f} - E_{\vec{p}_i}). \quad (2.67)$$

Dans le cas particulier d'un champ créé par une charge ponctuelle fixe $-e$ située à l'origine, $\vec{A}(\vec{x}) = \vec{0}$ et $A^0(\vec{x})$ est déterminé par l'équation de Poisson

$$\Delta A^0(\vec{x}) = -j^0(\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}). \quad (2.68)$$

On connaît bien sûr la solution, qui est

$$A^0(\vec{x}) = -\frac{e}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (2.69)$$

Mais ce qui nous intéresse ici est plutôt la transformée de Fourier, qui se déduit immédiatement de (2.68) :

$$\tilde{A}^0(\vec{k}) = -\frac{e}{|\vec{k}|^2}. \quad (2.70)$$

2.5.2 Probabilité de transition

La probabilité de transition est $|\mathcal{A}_{fi}|^2$. Mais on ne peut pas élever au carré $\delta(E_{\vec{p}_f} - E_{\vec{p}_i})$. L'origine physique de ce problème est qu'une onde plane correspond à un flux incident continu de particules. La bonne quantité à calculer n'est donc pas la probabilité totale de transition, mais la probabilité de transition par unité de temps. Il faut donc raisonner sur un laps de temps fini T , et remplacer dans l'équation (2.67) la distribution de Dirac par son expression intégrale :

$$2\pi\delta(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} dt. \quad (2.71)$$

On peut alors calculer le module au carré

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} dt \right|^2 &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} dt \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} dt \\ &= 2\pi\delta(\omega) T. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Nous avons écrit le premier facteur sous la forme $2\pi\delta(\omega)$, et le deuxième facteur vaut simplement T si $\omega = 0$. On en déduit donc la probabilité de transition par unité de temps vers l'état f :

$$\frac{dp_{fi}}{dt} = \frac{|A_{fi}|^2}{T} = \frac{e^2}{V^2} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 2\pi\delta(E_{\vec{p}_f} - E_{\vec{p}_i}) \quad (2.73)$$

2.5.3 Nombre de transitions

Pour obtenir le nombre de transitions par unité de temps, il faut multiplier (2.73) par le nombre d'états finals possibles. Dans l'élément d'espace des impulsions $d^3\vec{p}_f$, ce nombre vaut $V d^3\vec{p}_f / (2\pi)^3$. Le module de l'impulsion est fixé par la condition de conservation de l'énergie. On choisit donc pour variable l'énergie en écrivant $d^3\vec{p}_f = p_f^2 dp_f d\Omega = p_f E_f dE_f d\Omega$ (on a utilisé la relation $E_f^2 = p_f^2 + m^2$). Ce choix de variable est souvent utile pour simplifier les calculs. En intégrant sur E_f , on obtient l'expression suivante pour le nombre de diffusions dans l'angle solide $d\Omega$ par unité de temps :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 V} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 p_i E_{\vec{p}_i} d\Omega. \quad (2.74)$$

2.5.4 Formule de Rutherford relativiste

Pour obtenir la section efficace, il reste à diviser par le flux incident, qui est le nombre de particules traversant une unité de surface perpendiculaire à la direction incidente par unité de temps. Ici, nous avons une seule particule incidente, de vitesse \vec{v}_i , dans une boîte de volume V . On vérifie (en prenant une boîte rectangulaire) que le flux vaut $|\vec{v}_i|/V$. On en déduit la section efficace

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{e^2}{(2\pi)^2 v_i} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 p_i E_{\vec{p}_i} \\ &= \frac{e^2 E^2}{(2\pi)^2} \left| \tilde{A}_0(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \right|^2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

où l'on a posé $E \equiv E_{\vec{p}_i} = E_{\vec{p}_f}$ et utilisé la relation $p = Ev$. Le résultat, comme il se doit, est indépendant du volume V arbitraire choisi pour effectuer le calcul.

Pour la diffusion par une charge ponctuelle, le champ diffuseur est donné par l'équation (2.70). Le transfert d'impulsion s'exprime en fonction de l'angle de diffusion θ entre \vec{p}_i et \vec{p}_f suivant $|\vec{p}_f - \vec{p}_i| = 2p \sin \theta/2$. On en déduit le résultat final

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}. \quad (2.76)$$

Il n'est pas inutile de récrire cette formule dans le système d'unités usuel. Il suffit pour cela de multiplier par des puissances de ϵ_0 , c et \hbar de telle sorte que la formule soit homogène. L'unité de charge électrique n'intervient que dans e et dans ϵ_0 . De la formule de l'énergie coulombienne on déduit que e^2/ϵ_0 est homogène au produit d'une énergie par une longueur. Par conséquent, $e^4/\epsilon_0^2 E^2$ est le carré d'une longueur, et est donc homogène à une section efficace. Pour que la formule soit homogène, il suffit alors de rendre sans dimension le terme de vitesse en $1/v^4$, en multipliant par c^4 ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{c^4}{4E^2 v^4 \sin^4(\theta/2)}. \quad (2.77)$$

Cette formule généralise au cas relativiste la formule de Rutherford. Notons que \hbar n'intervient pas dans le résultat, ce qui est relié au fait que le calcul classique donne, pour la déviation Rutherford, le même résultat que le calcul quantique. La limite non relativiste s'obtient en remplaçant l'énergie E par l'énergie de masse mc^2 . On retrouve alors le résultat classique de Rutherford, et c disparaît de l'équation, comme il se doit à la limite non relativiste.

2.6 Antiparticules

2.6.1 Interprétation de Feynman

Stueckelberg (1941) et Feynman (1949) ont proposé l'interprétation suivante des états d'énergie négative dans les processus de diffusion (c'est à dire les processus où l'interaction ne s'exerce que pendant un temps fini) :

Une particule d'énergie négative $-E_{\vec{p}}$ et d'impulsion $-\vec{p}$ dans l'état initial (resp. final) est en fait une antiparticule d'énergie $E_{\vec{p}}$ et d'impulsion \vec{p} dans l'état final (resp. initial).

Cette interprétation est compatible avec la conservation de l'énergie et de l'impulsion. Elle est aussi compatible avec la conservation de la charge si on associe à l'antiparticule une charge $-e$. Ceci permet de réinterpréter le courant (2.23) comme le courant électrique divisé par e : il correspond bien au courant de probabilité pour un état d'énergie positive, mais à l'opposé pour un état d'énergie négative.

2.6.2 Création de paires

Pour illustrer ce qui précède par un exemple, reprenons le calcul de l'amplitude de transition dans un champ électromagnétique (2.64), mais en remplaçant l'état initial $\phi_{\vec{p}_i}(x)$ par $\phi_{\vec{p}_i}^*(x)$, d'énergie négative (dont on notera qu'il est normalisé à -1). On l'interprétera comme l'amplitude de création d'une paire, d'une particule d'impulsion p_f^μ et d'une antiparticule d'impulsion p_i^μ . Elle est donnée par l'équation (2.64), dans laquelle il suffit de changer p_i^μ en son opposé :

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \left(p_f^\mu - p_i^\mu \right) \tilde{A}_\mu(p_f + p_i) \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_i}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_f}}} \quad (2.78)$$

Ce processus est représenté par le même diagramme de Feynman que la diffusion coulombienne, Figure 2.1.

Quelques remarques : 1) tout d'abord, la pulsation du champ, qui vaut $E_{\vec{p}_i} + E_{\vec{p}_f}$, doit être supérieure à $2m$ pour qu'il y ait création de paires, soit dans le système d'unités usuel $\omega > 2mc^2/\hbar \sim 10^{21} s^{-1}$, des ordres de grandeur au dessus des fréquences que l'on sait réaliser en laboratoire. Cependant, le calcul n'est pas totalement académique : la même amplitude apparaît quand on étudie la désintégration d'une particule de spin 1 massive (par exemple le boson Z^0) en deux scalaires plus légers. 2) On remarquera que dans le référentiel du centre de masse de la paire créée, où $\vec{p}_i + \vec{p}_f = \vec{0}$, $E_{\vec{p}_i} = E_{\vec{p}_f}$, la direction de \vec{p}_i est corrélée à la direction de polarisation du champ électromagnétique puisque $(p_i^\mu - p_f^\mu) \tilde{A}_\mu = -2\vec{p}_i \cdot \vec{A}$. On émet plus facilement des paires parallèlement à la polarisation.

Dans l'équation (2.78), $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ représente la probabilité de créer une paire de particules d'impulsions \vec{p}_i et \vec{p}_f . Cette probabilité est supposée petite devant 1, puisque nous avons traité l'interaction comme une petite perturbation. Par conséquent, la probabilité de créer plus d'une paire est négligeable, et la probabilité que nous avons calculée correspond aussi au nombre moyen de paires créées dans l'état quantique (\vec{p}_i, \vec{p}_f) considéré. Calculons maintenant le nombre moyen de paires créées en sommant sur tous les états quantiques possibles :

$$\mathcal{N} = \int \frac{V d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3} \frac{V d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3} |\mathcal{A}_{fi}|^2. \quad (2.79)$$

En remplaçant l'amplitude par son expression, on aboutit au résultat final

$$\mathcal{N} = \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_i}} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_f}} \left| e \left(p_f^\mu - p_i^\mu \right) \tilde{A}_\mu(p_f + p_i) \right|^2. \quad (2.80)$$

Le résultat est bien indépendant du volume V choisi pour effectuer le calcul. D'autre part, cette expression est invariante de Lorentz. Pour le montrer, il suffit de vérifier que $d^3\vec{p}/E$ est invariant de Lorentz. Nous utilisons pour cela le résultat général

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_0} \frac{\delta(x - x_0)}{|f'(x_0)|}. \quad (2.81)$$

où la somme porte sur les racines de $f(x_0) = 0$. Ceci permet d'écrire l'élément d'espace des phases sous la forme

$$\frac{d^3\vec{p}}{2E} = d^3\vec{p} \int dp_0 \delta(p^\mu p_\mu - m^2) \theta(p^0). \quad (2.82)$$

Le membre de droite est manifestement invariant de Lorentz. La probabilité de création de paires est donc bien indépendante du référentiel choisi pour la calculer. Le calcul de l'intégrale sur \vec{p}_i et \vec{p}_f est l'objet de l'exercice 2.7.7.

Soulignons, enfin, que le processus de création de paires est un processus quantique, et que \mathcal{N} dans l'équation (2.80) ne représente que la valeur moyenne du nombre n de paires créées, qui est une variable aléatoire.

2.7 Exercices et problèmes

L'exercice 2.7.1 servira d'introduction à la mécanique quantique relativiste proprement dite. L'exercice 2.7.2 présente une formulation hamiltonienne de l'équation de Klein–Gordon. Les exercices 2.7.3 et 2.7.4 présentent des exemples de solutions exactes de l'équation de Klein–Gordon, qui généralisent au cas relativiste des résultats familiers de la mécanique quantique. L'exercice 2.7.6 complète le calcul de diffusion coulombienne de la section 2.4 et l'exercice 2.7.7 le calcul de création de paires de la section 2.6. Les derniers exercices étudient des interactions autres que l'interaction électromagnétique : l'exercice 2.7.8 reprend l'étude des sections 2.4 et 2.5 en remplaçant l'interaction électromagnétique par une interaction scalaire. L'exercice 2.7.9, qui étudie l'interaction avec un terme de source, servira d'introduction à l'étude du rayonnement de photons dans le chapitre 4. Enfin, l'exercice 2.7.10 étudie la configuration créée par une source statique, et montrera qu'une particule massive véhicule une interaction de portée finie, contrairement à une particule de masse nulle telle que le photon.

2.7.1 Masse et dispersion

1. Une particule de masse strictement nulle va à la vitesse de la lumière c , quelle que soit sa quantité de mouvement p . Calculer la vitesse d'une particule ultrarelativiste, dont la masse est non nulle mais $m \ll p$. Exprimer le résultat en fonction de la longueur d'onde.

2. Des mesures de propagation d'ondes radio au-dessus de l'océan montrent que leur vitesse de groupe varie de moins de 10^{-3} , en valeur relative, lorsque la longueur d'onde varie de 300 à 450 m. En déduire une borne supérieure à la masse du photon. On exprimera le résultat en électron-Volt.

2.7.2 Hamiltonien de Klein–Gordon

Il est possible de récrire l'équation de Klein Gordon sous forme hamiltonienne (Feschbach et Villars, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 24). Partant d'une solution $\phi(x)$ de l'équation de Klein–Gordon libre, on définit la fonction d'onde à deux composantes

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \theta \equiv \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\phi + \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \\ \chi \equiv \sqrt{\frac{m}{2}} \left(\phi - \frac{i}{m} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

1. Montrer que ψ satisfait à une équation de Schrödinger de hamiltonien

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{-\Delta}{2m} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} m. \quad (2.84)$$

On remarquera que ce hamiltonien n'est pas hermitique, ce qui entraîne que la probabilité $\int d^3\vec{x} \psi^\dagger \psi = \int d^3\vec{x} (|\theta|^2 + |\chi|^2)$ n'est pas conservée au cours du temps.

2. Comment s'exprime la densité de probabilité en fonction de θ et χ ?

3. Que deviennent θ et χ pour une solution d'énergie positive dans la limite non relativiste ?

2.7.3 Marche de potentiel

On considère l'équation de Klein–Gordon à une dimension d'espace avec une énergie potentielle électrostatique $V(x) = eA^0(x)$, définie par $V(x) = 0$ si $x < 0$ et $V(x) = V > 0$ si $x > 0$. Par analogie avec l'équation de Schrödinger, on s'attend à ce qu'une particule d'énergie positive E venant de la gauche soit totalement réfléchi si son énergie cinétique est inférieure à la marche de potentiel V , soit si $V > E - m$. Nous allons voir que ce n'est pas toujours le cas.

La fonction d'onde pour $x < 0$ est la somme de l'onde incidente et d'une onde réfléchie :

$$\phi(t, x) = e^{i(px-Et)} + r e^{i(-px-Et)}, \quad (2.85)$$

tandis que pour $x > 0$, on a une onde transmise de la forme

$$\phi(t, x) = t e^{i(p'x-Et)}, \quad (2.86)$$

où r et t sont des coefficients complexes constants.

1. Calculer p et p' en fonction de E . A quelle condition sur V a-t-on p' imaginaire pur ? Que se passe-t-il alors physiquement ?
2. Expliquer pourquoi ϕ et $\partial\phi/\partial x$ doivent être continues pour $x = 0$. En déduire que

$$r = \frac{p - p'}{p + p'}. \quad (2.87)$$

On notera que l'équation de Schrödinger conduit au même résultat. Nous admettrons que la fraction d'énergie réfléchie est $|r|^2$. A quelle condition sur V y a-t-il réflexion totale ? Commenter le résultat.

2.7.4 Niveaux de Landau

On se propose de calculer les niveaux d'énergie d'une particule scalaire de charge e placée dans un champ magnétique uniforme et constant.

1. On choisit $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. Calculer le champ magnétique \vec{B} .
2. Ecrire l'équation de Klein-Gordon en présence de ce champ. On cherche une solution de la forme

$$\phi(t, x, y, z) = e^{i(p_y y + p_z z - Et)} f(x). \quad (2.88)$$

Etablir l'équation vérifiée par $f(x)$.

3. Montrer qu'on peut se ramener, par un changement d'origine, à une équation du type

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \omega^2 x^2 \right) f_1(x) = \varepsilon f_1(x), \quad (2.89)$$

qui est l'équation de Schrödinger pour un oscillateur harmonique à une dimension. On sait alors que les valeurs possibles de ε sont non dégénérées, égales à $(n + 1/2)\omega$ avec n entier positif ou nul. En déduire les niveaux d'énergie (niveaux de Landau). Pour quelle valeur de n les effets relativistes deviennent-ils importants avec un champ magnétique de laboratoire ?

4. Que représentent physiquement p_y et p_z ?

2.7.5 Atome d'hydrogène

On sait que l'équation de Klein-Gordon est l'équation d'onde d'une particule scalaire (sans spin) et ne peut donc décrire correctement l'électron. Cependant, le calcul du spectre de l'atome d'hydrogène dans le cadre de l'équation de Klein-Gordon est simple et instructif. Dans tout ce problème sauf dans la dernière question, on se place dans la limite où le proton est infiniment lourd, et peut être considéré comme une charge fixe et ponctuelle, choisie pour origine des coordonnées.

1. Pour un état stationnaire d'énergie E de l'atome d'hydrogène, montrer que l'équation de Klein-Gordon s'écrit

$$\left(\left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 + \Delta - m^2 \right) \phi(r, \theta, \varphi) = 0,$$

avec $\alpha = e^2/4\pi$.

2. On cherche une solution de la forme

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{u(r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \varphi).$$

On rappelle que le laplacien est alors donné par

$$\Delta\phi = \frac{Y_{l,m}(\theta, \varphi)}{r} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} u \right).$$

Ecrire l'équation différentielle pour $u(r)$.

3. Chercher un équivalent à l'origine de la forme $u(r) \sim r^{\lambda+1}$. Montrer que $\lambda = l - \delta_l$, où δ_l est une petite correction dont on donnera l'expression.

4. On s'intéresse à un état lié d'énergie mécanique négative, c'est à dire $E < m$. Montrer que $u(r)$ décroît alors exponentiellement à l'infini, sous la forme e^{-kr} , et déterminer k .

5. Une meilleure approximation est donnée par $u(r) \sim r^\beta e^{-kr}$. Calculer alors l'énergie en fonction de β .

6. On admet que les solutions exactes de l'équation s'écrivent sous la forme $u(r) = r^{\lambda+1} e^{-kr} P(r)$, où $P(r)$ est un polynôme. En déduire que $\beta = n - \delta_l$, où n est un entier strictement supérieur à l , et δ_l a été déterminé à la question 3.

7. Développer E en puissances de α jusqu'à l'ordre α^4 inclus. Remettre le résultat dans le système d'unités international. Commenter l'ordre de grandeur des corrections relativistes, leur dépendance en n et l . On remarquera que les effets relativistes lèvent la dégénérescence entre les niveaux de même n et de l différents.

8. Dans le cas non relativiste, comment prend-on en compte le mouvement du proton? Est-il légitime de procéder de la même manière dans le cas relativiste?

2.7.6 Facteur de forme

1. En utilisant les résultats de la section 2.5.1, calculer l'amplitude de diffusion d'une particule de Klein-Gordon par une distribution de charges fixe quelconque $\rho(\vec{x})$ et la comparer à l'amplitude de diffusion par une charge ponctuelle $Q = \int \rho(\vec{x}) d^3\vec{x}$. Le rapport des deux est dit *facteur de forme* de la distribution $\rho(\vec{x})$ et noté $F(\vec{p}_f - \vec{p}_i)$.

2. Calculer le facteur de forme $F(\vec{q})$ d'un noyau atomique, dont on supposera la distribution uniforme à l'intérieur d'une sphère de rayon R . Que vaut-il pour $\vec{q} \rightarrow 0$? Commenter le résultat. A quelle condition est-il légitime de négliger, comme on l'a fait ici, le recul du noyau au cours de la diffusion?

3. L'expression (2.64) de l'amplitude de diffusion par un champ électromagnétique est valable pour une particule ponctuelle. Pour une particule possédant une structure interne, l'amplitude est différente. La forme la plus générale au premier ordre en A^μ qui soit compatible avec l'invariance de Lorentz est obtenue en remplaçant $p_i^\mu + p_f^\mu$ par $F_1(q^2)p_i^\mu + F_2(q^2)p_f^\mu$ avec $q = p_f - p_i$. Montrer que l'invariance de jauge de l'amplitude impose $F_1 = F_2 \equiv F(q^2)$. C'est le facteur de forme du projectile (et non plus celui de la cible, comme dans les questions précédentes). Dans la limite non relativiste, en échangeant cible et projectile, vérifier que F coïncide bien avec le facteur de forme défini dans la question 1. Il en constitue la généralisation relativiste.

2.7.7 Création de paires

1. Pour calculer le nombre moyen de paires créées (2.80), il est naturel de prendre pour variable $q = p_i + p_f$ car c'est le champ électromagnétique extérieur qui est donné. Récrire l'équation (2.80) sous la forme

$$\mathcal{N} = e^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{A}_\mu(q) \tilde{A}_\nu^*(q) J^{\mu\nu}(q) \quad (2.90)$$

où

$$J^{\mu\nu}(q) = \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_i - p_f) (p_f^\mu - p_i^\mu)(p_f^\nu - p_i^\nu). \quad (2.91)$$

2. Vérifier que

$$q_\mu J^{\mu\nu}(q) = 0. \quad (2.92)$$

Montrer que c'est une conséquence de l'invariance de jauge de l'amplitude de transition.

3. En utilisant des arguments de covariance, expliquer pourquoi $J^{\mu\nu}(q)$ est nécessairement de la forme $J^{\mu\nu}(q) = A(q)q^\mu q^\nu + B(q)g^{\mu\nu}$ où A et B sont des fonctions scalaires. Déduire alors de (2.92) que $J^{\mu\nu}(q)$ est de la forme

$$J^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) C(q) \quad (2.93)$$

où $C(q)$ est une fonction scalaire qui reste à déterminer.

4. Exprimer en fonction de $\tilde{A}^\mu(q)$ la transformée de Fourier $\tilde{F}^{\mu\nu}(q)$ du champ électromagnétique $F^{\mu\nu}(x)$. Récrire le nombre moyen de paires créées en faisant apparaître $\tilde{F}^{\mu\nu}(q) \tilde{F}_{\mu\nu}^*(q)$.

5. On définit

$$I(q) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_i - p_f). \quad (2.94)$$

Expliquer pourquoi $I(q)$ est un scalaire de Lorentz. On peut donc le calculer dans un référentiel où $\vec{q} = 0$ (pourquoi un tel référentiel existe-t-il?). Intégrer alors sur \vec{p}_f puis sur \vec{p}_i (on prendra comme variable d'intégration E_i plutôt que p_i , comme dans la section 2.5.3). Vérifier que

$$I(q) = \frac{1}{8\pi} \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2}} \theta(q^2 - 4m^2) \theta(q^0). \quad (2.95)$$

6. En utilisant (2.91), montrer que

$$g_{\mu\nu} J^{\mu\nu}(q) = (4m^2 - q^2)I(q). \quad (2.96)$$

En utilisant (2.93), en déduire la valeur de $C(q)$ puis le nombre moyen de paires créées.

2.7.8 Couplage à un potentiel scalaire

Soit un potentiel scalaire $U(x)$ et l'équation

$$\square\phi + (m + U(x))^2\phi = 0. \quad (2.97)$$

1. On suppose U uniforme et constant. Quelle est alors la relation entre E et p pour une onde plane? Dans la limite non relativiste où $|p| \ll m$ et $|U| \ll m$, que vaut l'énergie mécanique pour une particule? pour une antiparticule? Comparer avec un potentiel électrostatique constant.

2. Reprendre l'exercice 2.7.3 en remplaçant l'énergie potentielle électrostatique V par le potentiel scalaire U . Montrer que cette fois, il y a toujours réflexion totale si $U > E - m$.

3. Reprendre le calcul de diffusion de la section 2.4 avec cette interaction, au premier ordre en $U(x)$. Que vaut l'amplitude de transition? Par comparaison avec l'équation (2.76), en déduire la section efficace de diffusion par un potentiel central $U(\vec{x}) = -e^2/(4\pi|\vec{x}|)$. Vérifier que le résultat coïncide avec (2.76) à la limite non relativiste. Expliquer pourquoi (on se référera à la question 1).

4. Calculer de même la probabilité de création de paires par le champ scalaire $U(x)$. Vérifier qu'elle s'écrit sous la forme

$$P = 4m^2 \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{U}(q) \tilde{U}^*(q) I(q) \quad (2.98)$$

où $I(q)$ est défini par l'équation (2.94).

2.7.9 Couplage à une source

Soit une équation de Klein–Gordon avec second membre :

$$(\square + m^2)\phi(x) = j(x), \quad (2.99)$$

où $j(x)$ est une fonction donnée des coordonnées d'espace temps, dite *terme de source*, dont on supposera qu'elle s'annule pour $|\vec{x}|$ ou $|t|$ infini. L'équation (2.99) est analogue aux équations de Maxwell en jauge de Lorenz, $\square A^\mu = j^\mu$, $j(x)$ jouant ici le rôle du courant extérieur. Par exemple, l'équation d'onde des pions en présence de nucléons est de la forme (2.99), la source $j(x)$ étant proportionnelle à la densité de nucléons : les nucléons créent un champ de pions, de même qu'une charge crée un champ électrique. Le champ statique créé par une charge ponctuelle, responsable de l'interaction attractive entre les nucléons du noyau, sera étudié dans l'exercice 2.7.10.

1. Vérifier que le courant de probabilité (2.23) n'est pas conservé. D'un point de vue quantique, ce résultat signifie que le nombre de particules n'est pas conservé. On ne peut donc pas interpréter (2.99) comme l'équation d'onde d'une et d'une seule particule. Cependant, on admettra que l'amplitude de transition (2.49) correspond bien à l'amplitude de probabilité de trouver pour $t \rightarrow +\infty$ une particule de fonction d'onde ϕ_f . Ce résultat sera justifié dans le cadre de la théorie quantique des champs.

2. On suppose qu'il n'y a pas de particule $t \rightarrow -\infty$. En suivant la démarche de la section 2.4.2, vérifier que l'amplitude de probabilité d'émission d'un pion d'énergie–impulsion q est égale à

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{i}{\sqrt{2q^0V}} \tilde{j}(q) \quad (2.100)$$

où V désigne le volume et $\tilde{j}(q)$ la transformée de Fourier de $j(x)$. On notera qu'il s'agit d'un résultat exact, et pas d'un calcul de perturbation. Quelle est la fréquence minimale à laquelle doit osciller la source pour qu'il puisse y avoir création d'une particule ?

3. En déduire que le nombre moyen de particules créées est donné par (on pourra s'inspirer de la démarche suivie dans la section 2.6.2) :

$$\mathcal{N} = \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2q^0} |\tilde{j}(q)|^2. \quad (2.101)$$

Vérifier l'homogénéité et l'invariance de Lorentz de cette formule.

2.7.10 Potentiel de Yukawa

1. Déterminer la forme générale des solutions statiques de l'équation de Klein–Gordon (2.4) à symétrie sphérique $\phi(r)$. On pourra pour cela remarquer que

$$\Delta\phi(r) = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \right]^2 \phi(r). \quad (2.102)$$

2. On cherche la solution de l'équation (2.99) dans le cas particulier d'une source statique et concentrée à l'origine des coordonnées : $j(x) = q\delta^3(\vec{x})$. Par analogie avec le problème électrostatique, que doit valoir la solution pour r petit (et plus précisément, pour r petit devant quoi) ? En utilisant le résultat de la première question, en déduire la solution du problème pour tout r .

3. On peut retrouver le résultat de la question précédente d'une autre manière. Vérifier que la transformée de Fourier spatiale de $\phi(\vec{x})$ est

$$\tilde{\phi}(\vec{k}) = \frac{q}{|\vec{k}|^2 + m^2}. \quad (2.103)$$

Calculer la transformée de Fourier inverse en passant en coordonnées sphériques d'axe \vec{x} et en intégrant sur $|\vec{k}|$ au moyen du théorème des résidus.

4. Les résultats obtenus montrent que si la masse est non nulle, la décroissance du champ pour r grand est exponentielle à l'infini : on dit que l'interaction véhiculée par ce champ est de portée finie. Quel est l'ordre de grandeur de cette portée pour le champ de pions, sachant que $m \simeq 140$ MeV ?

Chapitre 3

Particule de spin $\frac{1}{2}$

En 1928, Dirac est parvenu à écrire une équation d'onde pour des particules relativistes de spin $\frac{1}{2}$. Cette équation, appliquée à l'électron, donnait une explication dans le cadre de la théorie quantique moderne (et non plus de l'ancienne théorie des quanta) de la structure fine du spectre de l'atome d'hydrogène. D'autre part, elle a permis à Dirac de postuler l'existence des positons, antiparticules associées aux électrons, découverts dans l'étude du rayonnement cosmique dès 1933.

L'équation de Dirac, sous la forme deux fois quantifiée, décrit toutes les particules élémentaires de spin $\frac{1}{2}$, les leptons et les quarks. En tant qu'équation d'onde pour une particule, cependant, elle ne s'applique qu'aux leptons chargés (l'électron et ses analogues lourds, le muon et le tau) et neutres (les trois neutrinos associés aux précédents). Les quarks, eux, ne sont pas observables individuellement, et ne peuvent être décrits par une simple équation d'onde que dans le cadre de modèles simplifiés. Notons néanmoins qu'un premier succès du modèle des quarks, introduit par Gell-Mann en 1964, fut de reproduire (à environ 30% près) les moments magnétiques du proton et du neutron, en prenant pour moment magnétique des quarks la valeur donnée par l'équation de Dirac.

3.1 Particule libre

3.1.1 Construction de l'équation

L'équation de Klein–Gordon est une équation à une composante du second ordre en temps. On peut la récrire sous la forme d'une équation du premier ordre à deux composantes, qui correspondent aux deux signes de l'énergie (voir exercice 2.7.2). L'équation de Dirac, quant à elle, est une équation du premier ordre, mais à quatre composantes : nous verrons qu'elle décrit une particule qui a deux degrés de liberté de spin.

Pour la construire, nous suivons l'approche historique, qui est la plus rapide. On cherche une équation analogue à l'équation de Schrödinger :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (3.1)$$

où $\psi(x)$ est un “spineur” à quatre composantes complexes, qu'on écrit sous forme d'une matrice colonne :

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

et le hamiltonien H est de la forme

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m, \quad (3.3)$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β désignant des matrices 4×4 complexes, indépendantes de t et \vec{x} , et $\vec{P} = -i\vec{\nabla}$.

On veut que les solutions satisfassent à l'équation $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, ce qui impose

$$H^2 = \left(\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m \right)^2 = \vec{P}^2 + m^2. \quad (3.4)$$

En développant, on en déduit que les matrices $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et β

- anticommulent deux à deux.
- sont de carré 1 (la matrice identité).

On impose en outre que le hamiltonien H soit hermitique, ce qui implique que les matrices α_i et β soient hermitiques. Toutes ces propriétés sont également vérifiées par les matrices de Pauli dont nous rappelons l'expression :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

La seule différence est que les matrices de Pauli ne sont que trois, alors qu'il en faut quatre pour l'équation de Dirac.

Nous allons maintenant étudier quelques conséquences des conditions imposées aux matrices de Dirac. Tout d'abord, il est facile de montrer que l'équation de Dirac ne résout pas le problème des états d'énergie négative rencontré dans l'équation de Klein–Gordon. En effet, on vérifie facilement que l'opérateur $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$ est unitaire et anticommute avec le hamiltonien H . Par conséquent, à toute solution d'énergie positive il associe une solution d'énergie négative et de même impulsion.

3.1.2 Propriétés des matrices de Dirac

Nous allons montrer que pour avoir 4 matrices vérifiant les propriétés ci-dessus, il faut qu'elles soient au moins de taille 4×4 . Ceci nous permettra d'introduire des propriétés utiles pour la suite.

Considérons les matrices obtenues en multipliant les matrices de Dirac entre elles de toutes les façons possibles. Comme elles anticommulent entre elles, l'ordre dans lequel on les multiplie n'a d'incidence que sur le signe global. D'autre part, comme elles sont de carré 1, elles apparaissent au plus une fois dans le produit. Il y a donc 16 matrices possibles :

- 1
- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$
- $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\beta, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\beta, \alpha_3\beta$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_1\alpha_2\beta, \alpha_1\alpha_3\beta, \alpha_2\alpha_3\beta$
- $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta$.

Notons Γ_i une quelconque de ces matrices. Elles ont les propriétés suivantes.

- $\Gamma_i^2 = \pm 1$ puisque les matrices de Dirac anticommulent deux à deux et sont de carré 1.
- Pour une matrice donnée $\Gamma_i \neq 1$, il existe toujours une autre matrice Γ_j qui anticommute avec elle. Si $\Gamma_i = \alpha_1$, on prend par exemple $\Gamma_j = \alpha_2$. Si $\Gamma_i = \alpha_1\alpha_2$, on prend $\Gamma_j = \alpha_2$. La généralisation est immédiate.
- La propriété précédente implique que toutes les matrices Γ_i , sauf 1, sont de trace nulle. En effet, soit Γ_j anticommute avec Γ_i . Alors $\text{tr} \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = -\text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2$. Mais d'autre part $\text{tr} \Gamma_j \Gamma_i \Gamma_j = \text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2$ en utilisant l'invariance circulaire de la trace. Donc $\text{tr} \Gamma_i \Gamma_j^2 = 0$. Donc $\text{tr} \Gamma_i = 0$ puisque $\Gamma_j^2 = \pm 1$.
- On en déduit que les matrices sont linéairement indépendantes sur le corps des complexes. Soit en effet une combinaison linéaire nulle $\sum_i \lambda_i \Gamma_i = 0$. En multipliant par une matrice quelconque Γ_j et en prenant la trace, on obtient $\sum_i \lambda_i \text{tr} \Gamma_j \Gamma_i = 0$. Or $\Gamma_j \Gamma_i$ est, au signe près, une autre matrice Γ_k , différente de l'identité si $j \neq i$, et donc de trace nulle. On obtient donc $\lambda_j = 0$ quel que soit j , ce qu'il fallait démontrer.

On a donc 16 matrices linéairement indépendantes, ce qui impose qu'elles soient au moins de taille 4×4 .

Si l'on choisit des matrices 4×4 , alors toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrices Γ_i . On en déduit que toute matrice commutant avec les α_i et β est proportionnelle à l'identité. Cette propriété nous sera utile dans la section 3.2.

Une méthode systématique de construction des matrices de Dirac est exposée dans l'exercice 3.6.1. Un choix possible est fourni par la représentation dite de Dirac :

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où σ_i désignent les matrices de Pauli (3.5). C'est le choix le plus naturel si on s'intéresse à la limite non relativiste, comme nous le verrons plus tard dans la section 3.3.3.

3.1.3 Interprétation probabiliste

L'équation de Dirac étant formellement analogue à l'équation de Schrödinger, on définit le recouvrement entre deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 de façon analogue. On introduit pour cela le spineur hermitique conjugué ψ_2^\dagger , écrit sous la forme d'une matrice ligne. $\psi_2^\dagger \psi_1$ est donc un nombre, dépendant de la position, et le recouvrement s'obtient par intégration sur tout l'espace :

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d^3 \vec{x} \psi_1^\dagger(\vec{x}) \psi_2(\vec{x}). \quad (3.7)$$

Le hamiltonien étant hermitique, le recouvrement ainsi défini est indépendant du temps. De plus, comme H est diagonalisable dans une base orthonormée, le recouvrement entre deux états propres d'énergie différente (en particulier entre E et $-E$) est bien nul avec cette définition. Notons que la dimension du spineur de Dirac est la même que celle de la fonction d'onde de Schrödinger : $[\psi] \equiv E^{3/2}$.

Comme pour l'équation de Klein–Gordon dans la section 2.2.1, nous allons montrer que le recouvrement (3.7) est la charge associée à un courant conservé $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. La densité est naturellement définie par

$$\rho(t, \vec{x}) = \psi_1^\dagger \psi_2. \quad (3.8)$$

Pour calculer $\partial\rho/\partial t$, nous avons besoin de l'équation de Dirac qui s'écrit, d'après (3.1) et (3.3) :

$$i \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \psi = \beta m \psi. \quad (3.9)$$

On en déduit l'équation pour le spineur hermitique conjugué ψ^\dagger :

$$i\psi^\dagger \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) = -\psi^\dagger \beta m. \quad (3.10)$$

où la dérivée temporelle $\partial/\partial t$ et le gradient $\vec{\nabla}$ agissent à gauche. On en déduit aisément l'équation de conservation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} \quad (3.11)$$

où l'on a introduit le courant de transition

$$\vec{j}(t, \vec{x}) = \psi_1^\dagger \vec{\alpha} \psi_2. \quad (3.12)$$

Nous montrerons dans la section 3.2.4 que $j^\mu = (\rho, \vec{j})$ se transforme comme un quadrivecteur par transformation de Lorentz. D'après la discussion de la section 1.2.6, ceci a pour conséquence importante que la charge associée (3.7), et donc notre interprétation probabiliste, sont indépendantes du référentiel choisi.

La densité et le courant de probabilité associés à une fonction d'onde $\psi(x)$ s'obtiennent naturellement en posant $\psi_1 = \psi_2 = \psi$ dans les équations (3.8) et (3.12) :

$$\begin{aligned} \rho(t, \vec{x}) &= \psi^\dagger \psi \\ \vec{j}(t, \vec{x}) &= \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Notons que la densité de probabilité ρ est toujours positive, ce qui n'était pas le cas pour l'équation de Klein–Gordon.

3.1.4 Ondes planes monochromatiques

Cherchons des solutions de l'équation (3.9) de la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = u e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \quad (3.14)$$

où \vec{p} et E sont des constantes et u est un spineur à 4 composantes indépendant de t et \vec{x} , qui est l'équivalent du vecteur de polarisation pour une onde électromagnétique plane.

L'équation (3.9) se réécrit pour l'onde plane

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) u = E u. \quad (3.15)$$

Les matrices de Dirac ont été définies de telle sorte que $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, donc u est vecteur propre de $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ avec la valeur propre $E = \pm E_{\vec{p}} = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Nous avons montré plus haut qu'il existe une bijection entre solutions d'énergie négative et d'énergie positive. On peut retrouver ce résultat d'une autre manière, en utilisant la propriété de trace nulle des matrices de Dirac, qui donne $\text{tr}(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) = 0$. Ceci implique que les valeurs propres $E_{\vec{p}}$ et $-E_{\vec{p}}$ ont même dégénérescence, donc 2 pour chaque valeur de l'énergie. Nous verrons que ceci correspond aux deux états de spin.

On choisit pour le spineur u de l'équation (3.14) la convention de normalisation

$$u^\dagger u = 2E_{\vec{p}}. \quad (3.16)$$

Avec la densité de probabilité (3.13), l'onde plane normalisée dans un volume V s'écrit alors

$$\psi(t, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2|E|V}} u e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} = \frac{1}{\sqrt{2|E|V}} u e^{-ip^\mu x_\mu}. \quad (3.17)$$

On remarquera que grâce à notre convention de normalisation de u , le facteur de normalisation est le même que pour l'onde plane de Klein–Gordon, Eq.(2.14).

Calculons le courant de probabilité de cette onde plane, défini par (3.13). De l'expression du hamiltonien (3.3), on déduit l'anticommutateur

$$\{\vec{\alpha}, H\} = 2\vec{P}. \quad (3.18)$$

En prenant la valeur moyenne de cette équation dans l'onde plane (3.17), état propre de H et \vec{P} , on en déduit

$$2E u^\dagger \vec{\alpha} u = 2\vec{p} u^\dagger u. \quad (3.19)$$

La densité et le courant (3.13) sont donc reliés par $\vec{j} = \rho \vec{p}/E = \rho \vec{v}$, comme pour l'équation de Klein–Gordon. Cependant, le signe de la “probabilité” pour les solutions d'énergie négative est négatif avec l'équation de Klein–Gordon, positif avec l'équation de Dirac.

Enfin, montrons comment on peut construire simplement les spineurs u correspondant à une énergie donnée, positive ou négative. Pour cela, nous définissons l'opérateur

$$s = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}}. \quad (3.20)$$

D'après l'équation (3.4), s correspond au signe de l'énergie : les ondes planes d'énergie positive (resp. négative) sont vecteurs propres de s avec la valeur propre 1 (resp. -1). Les projecteurs sur les états d'énergie positive et négative, Λ_+ et Λ_- , sont donc donnés par

$$\Lambda_\pm = \frac{1 \pm s}{2}. \quad (3.21)$$

Ils vérifient les relations $\Lambda_\pm^2 = \Lambda_\pm$ et $\Lambda_\pm^\dagger = \Lambda_\pm$, qui définissent un projecteur orthogonal. Pour obtenir une solution d'énergie positive, il suffit donc d'appliquer Λ_+ à n'importe quel spineur.

D'autre part, ces projecteurs sont simplement reliés aux spineurs u définis plus haut. Commençons par définir le projecteur orthogonal sur la direction de u , noté Λ_u :

$$\Lambda_u = \frac{uu^\dagger}{2E_{\vec{p}}}. \quad (3.22)$$

C'est bien une matrice 4×4 qui vérifie les conditions $\Lambda_u^2 = \Lambda_u$ (en utilisant la normalisation (3.16)). C'est donc un projecteur orthogonal. L'image de n'importe quel spineur par ce projecteur est un spineur colinéaire à u . Il s'agit donc du projecteur sur la direction de u . D'autre part, si u_1 et u_2 sont deux spineurs d'énergie positive orthogonaux entre eux, alors ils forment une base de l'espace des états d'énergie positive, donc $\Lambda_{u_1} + \Lambda_{u_2} = \Lambda_+$. On en déduit

$$\sum_{i=1,2} u_i u_i^\dagger = 2E_{\vec{p}} \Lambda_+ = E_{\vec{p}} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (3.23)$$

De même, si u_3 et u_4 sont deux spineurs d'énergie $-E_{\vec{p}}$ négative orthogonaux entre eux,

$$\sum_{i=3,4} u_i u_i^\dagger = 2E_{\vec{p}} \Lambda_- = E_{\vec{p}} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m. \quad (3.24)$$

Ces résultats nous seront utiles par la suite.

3.1.5 Changement de représentation

Nous admettrons ici le théorème de Pauli, qui montre que tous les choix possibles de matrices 4×4 sont équivalents, à une transformation unitaire près. C'est à dire que si on a deux ensembles $(\vec{\alpha}, \beta)$ et $(\vec{\alpha}', \beta')$ qui conviennent, il existe une matrice 4×4 , que nous notons U , telle que

$$\begin{aligned} \vec{\alpha}' &= U \vec{\alpha} U^{-1} \\ \beta' &= U \beta U^{-1}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Nous ne montrerons pas l'existence de la matrice U , mais nous allons vérifier qu'elle est unique à une constante multiplicative près. Supposons, en effet, qu'il existe une autre matrice U' vérifiant les équations (3.25), c'est à dire

$$U' T U^{-1} = \Gamma' = U' T U'^{-1} \quad (3.26)$$

où Γ désigne une quelconque des quatre matrices de Dirac α_i et β , et Γ' la matrice correspondante dans la nouvelle représentation. On en déduit

$$\Gamma U^{-1} U' = U^{-1} U' \Gamma, \quad (3.27)$$

c'est à dire que $U^{-1} U'$ commute avec les quatre matrices de Dirac. Ainsi qu'on l'a vu dans la section 3.1.2, ceci implique que $U^{-1} U'$ est proportionnel à l'identité, c'est à dire que U et U' coïncident à une constante multiplicative près.

Vérifions également qu'on peut choisir U unitaire. Les matrices de Dirac devant être hermitiques, l'équation (3.25) donne

$$U \Gamma U^{-1} = \Gamma' = \Gamma'^{\dagger} = U^{-1 \dagger} \Gamma U^{\dagger}. \quad (3.28)$$

En comparant avec l'équation (3.26) et en répétant le raisonnement ci-dessus, on voit que $U^{\dagger} U = \lambda$ où λ est un nombre complexe. En prenant la valeur moyenne de cette équation dans un vecteur ψ quelconque tel que $\psi^{\dagger} \psi = 1$, on obtient en outre $\lambda = |U \psi|^2$ ce qui prouve que λ est un réel positif, qu'on peut ramener à l'unité en divisant U par $\sqrt{\lambda}$. On a bien alors $U^{\dagger} U = 1$.

Finalement, changer de représentation des matrices de Dirac revient à effectuer dans l'espace des états la transformation unitaire $\psi \rightarrow U \psi$. Cette transformation n'affecte pas les observables physiques, qui sont toujours des éléments de matrice des Γ_i .

3.2 Covariance de l'équation de Dirac

Nous allons maintenant montrer que l'équation de Dirac et les amplitudes de probabilités associées sont invariantes par transformation de Lorentz. En particulier, la transformation par rotation nous donnera l'expression de l'opérateur de spin, et nous montrerons que la particule décrite est de spin $\frac{1}{2}$.

3.2.1 Forme covariante de l'équation de Dirac

La forme (3.9) de l'équation de Dirac n'est pas adaptée à l'étude des propriétés de covariance, car le temps y joue un rôle particulier. Pour la formulation covariante, on introduit quatre matrices notées sous forme d'un vecteur contravariant γ^{μ} , définies par $\gamma^0 = \beta$, $\gamma^i = \beta \alpha_i$. On notera également $\gamma_{\mu} = g_{\mu\nu} \gamma^{\nu}$. Les propriétés des matrices $\vec{\alpha}$ et β (hermiticité, anticommutation, carré 1) deviennent pour les γ^{μ}

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} \equiv \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} + \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} = 2 g^{\mu\nu} \quad (3.29)$$

et

$$\gamma^{\mu \dagger} = \gamma^0 \gamma^{\mu} \gamma^0. \quad (3.30)$$

En multipliant l'équation (3.9) à gauche par β , on obtient la forme dite covariante de l'équation de Dirac :

$$(i \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \psi(x) = 0. \quad (3.31)$$

Pour une onde plane (3.14), en particulier, on obtient la forme covariante de l'équation (3.15) :

$$(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m) u = 0. \quad (3.32)$$

3.2.2 Transformation du spineur

Dans une transformation de Lorentz Λ , la transformation du spineur s'écrit

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (3.33)$$

où $S(\Lambda)$ est une matrice 4×4 , qui réalise la transformation dans l'espace des spineurs

Nous allons choisir $S(\Lambda)$ de telle sorte que l'équation de Dirac (3.31) soit invariante par transformation de Lorentz, c'est à dire que l'on ait

$$(i \gamma^{\nu} \partial'_{\nu} - m) \psi'(x') = 0. \quad (3.34)$$

Pour ceci, nous partons de l'équation (3.31). Nous la multiplions à gauche par $S(\Lambda)$, et nous changeons de système de coordonnées par $\partial_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial'_{\nu}$:

$$(i S \gamma^{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial'_{\nu} S^{-1} - m) \psi'(x') = 0. \quad (3.35)$$

Cette équation coïncide avec (3.34) si la matrice S vérifie les quatre équations suivantes :

$$S^{-1} \gamma^{\nu} S = \Lambda^{\nu}_{\mu} \gamma^{\mu}. \quad (3.36)$$

Ces équations expriment simplement que l'opérateur γ^μ se transforme comme un vecteur contravariant dans la transformation (3.33). Par contraction avec ∂_μ , ils donnent un opérateur scalaire, qui laisse l'équation inchangée.

En suivant la démarche de la section 3.1.5, nous savons déjà que si S existe, elle est unique à une constante multiplicative près. Nous résoudrons l'équation (3.36) plus bas, dans la section 3.2.5. Auparavant, nous allons explorer quelques conséquences de l'équation (3.36).

Cherchons tout d'abord à déterminer S^\dagger . En prenant l'hermitique conjugué de (3.36) et en utilisant (3.30), on obtient

$$(\gamma^0 S^\dagger \gamma^0) \gamma^\nu (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1} = \Lambda^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \quad (3.37)$$

Cette équation est de la forme (3.36) en remplaçant S par $S' \equiv (\gamma^0 S^\dagger \gamma^0)^{-1}$. On en déduit que SS'^{-1} est proportionnel à l'identité, soit $S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \lambda$ où λ est un nombre complexe.

Montrons que λ est réel. L'hermitique conjugué de l'équation précédente donne $\gamma^0 S \gamma^0 S^\dagger = \lambda^*$, donc $S\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \lambda^*$ (en utilisant le fait que si $AB = 1$, alors A et B commutent), donc $\lambda = \lambda^*$.

Nous verrons en outre que $\lambda > 0$ pour les transformations du groupe orthochrone, ce qui permet de se ramener à $\lambda = 1$ en multipliant S par une constante. On aboutit au résultat important suivant :

$$S^\dagger = \gamma^0 S^{-1} \gamma^0. \quad (3.38)$$

Il est intéressant de comparer cette équation à l'équation définissant les transformations de Lorentz, qui se réécrit sous une forme analogue :

$${}^t\Lambda = G\Lambda^{-1}G. \quad (3.39)$$

Ces deux équations montrent que ni Λ ni S ne sont unitaires, ce qui est relié au fait que les transformations de Lorentz ne conservent pas la norme, ni d'un vecteur, ni d'un spineur.

Remarquons que si S satisfait aux équations (3.36) et (3.38), $S e^{i\theta}$ convient aussi, θ désignant un réel arbitraire. La transformation des spineurs est donc définie à une phase près.

3.2.3 Spineur conjugué

On définit le spineur conjugué par

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \gamma^0. \quad (3.40)$$

Les équations (3.33) et (3.38) permettent de déterminer sa transformation

$$\bar{\psi}'(x') = \psi^\dagger(x) S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = \bar{\psi}(x) S^{-1}. \quad (3.41)$$

L'intérêt du spineur conjugué est justement qu'il se transforme simplement. Il apparaît naturellement lorsqu'on écrit les quantités physiques sous forme covariante, comme nous allons maintenant le voir.

Comment s'écrit l'équation de Dirac pour $\bar{\psi}$? En prenant l'hermitique conjuguée de l'équation (3.31), en utilisant (3.30) et en multipliant à droite par γ^0 , on obtient

$$\bar{\psi}(x) (i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0, \quad (3.42)$$

où l'opérateur de gradient ∂_μ agit à gauche. Pour l'onde plane (3.14), cette équation se réécrit

$$\bar{u} (\gamma^\mu p_\mu - m) = 0. \quad (3.43)$$

3.2.4 Invariants bilinéaires

De même que la fonction d'onde de Schrödinger, la fonction d'onde de Dirac n'est pas une observable. Seuls sont observables des éléments de matrice du type $\psi_1^\dagger O \psi_2$, où O est un opérateur hermitique, ψ_1 et ψ_2 sont deux spineurs de Dirac. Il est donc important d'étudier la transformation de Lorentz des diverses formes bilinéaires formées en multipliant des composantes de ψ_1^\dagger et de ψ_2 . Les spineurs ayant 4 composantes, il y a 16 formes bilinéaires linéairement indépendantes. Il est commode de choisir pour cela les 16 formes $\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_2$, où Γ_i désigne un produit de matrices de Dirac toutes différentes, comme dans la section (3.1.2). Cependant, on prendra ici des produits de matrices γ^μ plutôt que des produits de α_i et β : on vérifie aisément que les propriétés énoncées dans la section (3.1.2) restent vraies, et en particulier qu'on obtient bien 16 matrices Γ_i linéairement indépendantes, donc 16 formes bilinéaires indépendantes pour les $\bar{\psi}_1 \Gamma_i \psi_2$.

Scalaire

Des équations (3.33) et (3.41) on déduit immédiatement

$$\bar{\psi}'_1(x')\psi'_2(x') = \bar{\psi}_1(x)\psi_2(x). \quad (3.44)$$

C'est à dire que $\bar{\psi}_1\psi_2$ est un scalaire de Lorentz. On voit que le spineur conjugué $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ joue, vis-à-vis du spineur ψ , un peu le même rôle qu'un vecteur covariant $V_\mu = g_{\mu\nu}V^\nu$ vis-à-vis d'un vecteur contravariant V^μ . Dans les deux cas, on obtient en effet un scalaire de Lorentz par contraction, avec γ^0 à la place de $g_{\mu\nu}$, comme on l'a déjà souligné à la fin de la section 3.2.2.

Calculons par exemple le scalaire $\bar{u}u$, où u est l'onde plane normalisée suivant (3.16). De l'expression du hamiltonien (3.3), on déduit l'anticommutateur

$$\{\beta, H\} = 2m. \quad (3.45)$$

En prenant la valeur moyenne de cette équation entre u et u^\dagger , états propres de H , on en déduit $2E\bar{u}u = 2m u^\dagger u$. D'après la convention de normalisation (3.16), on obtient

$$\bar{u}u = \pm 2m. \quad (3.46)$$

suivant le signe de l'énergie. C'est une condition équivalente à (3.16). Les deux membres de cette équation sont des scalaires de Lorentz, ce qui montre que notre condition de normalisation est invariante de Lorentz.

Vecteur

En utilisant l'équation (3.36), on voit que $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ se transforme comme un vecteur contravariant. Par exemple, le courant de transition $j^\mu = (\rho, \vec{j})$, défini par les équations (3.8) et (3.12), s'écrit justement sous la forme

$$j^\mu = \bar{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2. \quad (3.47)$$

Il se transforme comme un vecteur, ainsi qu'on l'attendait. Par conséquent, l'amplitude de probabilité (3.7), qui est la charge associée au courant de transition, est un scalaire de Lorentz. Ceci complète la preuve de l'invariance de Lorentz de la théorie.

Tenseurs ; la cinquième matrice

Reste à étudier la transformation des formes bilinéaires $\bar{\psi}_1\Gamma_i\psi_2$ où Γ_i est le produit de plusieurs matrices γ^μ toutes différentes. En utilisant l'équation (3.36) on voit que $\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^\nu\psi_2$ se transforme comme un tenseur contravariant, et ainsi de suite. D'autre part, ne considérer que des produits de γ^μ toutes différentes revient à considérer les tenseurs totalement antisymétriques (dont les seules composantes non nulles correspondent à des indices tous différents) formés à partir des produits de γ^μ . Ainsi, pour les produits de deux matrices γ^μ , on introduit le tenseur antisymétrique $\bar{\psi}_1\sigma^{\mu\nu}\psi_2$, où

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.48)$$

On obtient ainsi six quantités linéairement indépendantes. Le facteur 1/2 assure que $\sigma^{\mu\nu}$ a pour déterminant ± 1 et le facteur i que $\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0$.

Reste à considérer les produits de 3 ou 4 matrices γ^μ différentes. Pour cela, nous introduisons la matrice γ^5 définie par

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

la dernière égalité étant valable dans la représentation de Dirac. Cette matrice vérifie $(\gamma^5)^\dagger = (\gamma^5)^{-1} = \gamma^5$. Puisque les matrices γ^μ anticommulent deux à deux, on peut récrire γ^5 sous la forme

$$\gamma^5 = -\frac{i}{24}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \quad (3.50)$$

Sous cette forme, il est manifeste que $\bar{\psi}_1\gamma^5\psi_2$, contraction du pseudotenseur $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ avec un tenseur, est un pseudoscalaire. Enfin, $i\bar{\psi}_1\gamma^\mu\gamma^5\psi_2$, correspondant au produit antisymétrisé de trois matrices γ^μ , est un pseudovecteur.

3.2.5 Construction des transformations infinitésimales

Résolvons maintenant l'équation (3.36) d'inconnue S pour une transformation infinitésimale

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu. \quad (3.51)$$

où les $\omega^\nu{}_\mu$ sont très petits devant 1. On a vu dans un chapitre précédent (Section 1.2.4) que ceci est une transformation de Lorentz si et seulement si $\omega_{\mu\nu}$ est antisymétrique (Eq. (1.25)). La variation du spineur est proportionnelle à la variation des coordonnées, ce qui permet d'écrire S sous la forme

$$S = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\rho\mu} \Sigma^{\rho\mu}, \quad (3.52)$$

où les $\Sigma^{\rho\mu}$ désignent les générateurs des transformations infinitésimales que nous allons construire. Ils sont également antisymétriques en ρ et μ . L'équation (3.36) devient, au premier ordre en ω ,

$$-\frac{i}{2} \omega_{\rho\mu} [\gamma^\nu, \Sigma^{\rho\mu}] = \omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu. \quad (3.53)$$

On peut récrire le second membre sous la forme

$$\omega^\nu{}_\mu \gamma^\mu = \omega_{\rho\mu} g^{\nu\rho} \gamma^\mu. \quad (3.54)$$

On obtient une équation de la forme $\omega_{\rho\mu} T^{\rho\mu} = 0$ devant être vérifiée quel que soit $\omega_{\rho\mu}$ antisymétrique. Ceci implique que $T^{\rho\mu}$ soit symétrique, soit $T^{\rho\mu} - T^{\mu\rho} = 0$. On obtient ainsi

$$-i [\gamma^\nu, \Sigma^{\rho\mu}] = g^{\nu\rho} \gamma^\mu - g^{\nu\mu} \gamma^\rho. \quad (3.55)$$

En utilisant l'identité

$$[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B \quad (3.56)$$

ainsi que (3.29), on montre facilement que l'équation (3.55) est vérifiée si l'on choisit

$$\Sigma^{\rho\mu} = \frac{1}{2} \sigma^{\rho\mu} = \frac{i}{4} [\gamma^\rho, \gamma^\mu] \quad (3.57)$$

où $\sigma^{\mu\nu}$ est défini par l'équation (3.48). De l'équation (3.30), on déduit

$$\Sigma^{\rho\mu \dagger} = \gamma^0 \Sigma^{\rho\mu} \gamma^0, \quad (3.58)$$

et par conséquent la matrice de transformation (3.52) vérifie bien l'équation (3.38). Toute transformation de Lorentz propre et orthochrone pouvant s'écrire comme produit de transformations infinitésimales, ceci prouve que l'équation de Dirac garde bien la même forme dans tout référentiel.

3.2.6 Opérateur de spin

Un cas particulier important de transformation de Lorentz est la transformation par rotation, qui va nous permettre de définir le spin de la particule. Dans une rotation infinitésimale d'axe j et d'angle θ , Eq. (2.7), le moment cinétique total J_j est défini par une équation analogue à (2.8) :

$$\psi'(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) = -i\theta J_j \psi(\vec{x}). \quad (3.59)$$

On peut décomposer la transformation de ψ en deux termes :

$$\psi'(\vec{x}) - \psi(\vec{x}) = [\psi'(\vec{x}) - \psi'(\vec{x}')] + [\psi'(\vec{x}') - \psi(\vec{x})]. \quad (3.60)$$

Le premier terme du membre de droite correspond à la variation de ψ' résultant du déplacement de \vec{x} à \vec{x}' . En reprenant les équations (2.9) à (2.12), on voit que ce terme correspond à la partie orbitale du moment cinétique. Le deuxième terme est donc le terme de spin. Il correspond à la "vraie" variation de $\psi(x)$. On définira donc le spin par

$$\psi'(\vec{x}') - \psi(\vec{x}) = -i\theta S_j \psi(\vec{x}). \quad (3.61)$$

Il nous reste à exprimer les composantes du spin en fonction des générateurs des transformations de Lorentz infinitésimales, $\Sigma^{\mu\nu}$. Considérons par exemple une rotation infinitésimale d'axe z et d'angle $\theta \ll 1$. On a alors, d'après l'équation (2.7) avec $j = 3$, $\delta x = -\theta y$ et $\delta y = \theta x$. Avec les notations utilisées pour les transformations de Lorentz infinitésimales, Eq. (3.51), on en déduit $\omega^1{}_2 = -1$, $\omega^2{}_1 = 1$, et tous les autres

coefficients nuls. En abaissant les indices, $\omega_{12} = 1$, $\omega_{21} = -1$. En utilisant l'équation (3.52), on en déduit $S = 1 - i\theta\Sigma^{12}$. La transformation du spineur est alors définie par l'équation (3.33), qui donne

$$\psi'(\vec{x}') - \psi(\vec{x}) = -i\theta\Sigma^{12}\psi(\vec{x}). \quad (3.62)$$

Par identification avec l'équation (3.61), on en déduit $S_3 = \Sigma^{12}$. En utilisant l'équation (3.57), on en déduit

$$S_3 = \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2 = -\frac{i}{2}\alpha_1\alpha_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

où la dernière égalité est valable dans la représentation de Dirac, ainsi que dans la plupart des représentations usuelles. Les autres composantes du spin s'obtiennent par permutations circulaires :

$$S_i = -\frac{i}{4}\epsilon_{ijk}\alpha_j\alpha_k. \quad (3.64)$$

On vérifie aisément que $(S_1)^2 = (S_2)^2 = (S_3)^2 = 1/4$. On a par conséquent $(\vec{S})^2 = 3/4 = s(s+1)$ avec $s = \frac{1}{2}$: la particule de Dirac est de spin $\frac{1}{2}$.

Signalons une autre forme utile de l'opérateur de spin

$$\vec{S} = \frac{\gamma^5\vec{\alpha}}{2}, \quad (3.65)$$

qui s'obtient aisément à partir des équations (3.49) et (3.63).

Il est important de signaler que le spin ne commute pas avec le hamiltonien, c'est à dire qu'il n'est pas une constante du mouvement dans l'équation de Dirac, même pour une particule libre. Il en va de même du moment orbital \vec{L} . Seul le moment cinétique total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ est conservé. On peut montrer (voir exercice 3.6.5) que la non-conservation du moment orbital est un effet des états d'énergie négative.

Pour une onde plane d'impulsion nulle, le spin commute avec le hamiltonien βm , et on peut donc définir les états de polarisation comme en mécanique quantique non relativiste. Mais ce n'est plus le cas pour un électron en mouvement. Cependant, la projection du spin sur la quantité de mouvement, dite *hélicité*, reste une constante du mouvement :

$$h \equiv \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}. \quad (3.66)$$

Ses valeurs propres sont $\pm 1/2$. Pour vérifier qu'il s'agit d'une constante du mouvement, le plus simple est d'orienter les axes de coordonnées de telle sorte que \vec{p} soit suivant l'axe z , auquel cas l'hélicité se réduit à S_3 et le hamiltonien à $\alpha_3 p_z + \beta m$ qui, d'après l'équation (3.63), commute bien avec S_3 .

L'impulsion, le hamiltonien (qui a deux valeurs possibles pour \vec{p} donné) et l'hélicité (qui a deux valeurs possibles pour \vec{p} et E donnés) forment un ensemble complet d'observables qui commutent pour la particule de Dirac libre.

3.2.7 Parité

Pour la transformation de parité $\vec{x}' = -\vec{x}$, les équations (3.36) et (3.38) sont vérifiées par $S = \gamma^0$. On définit donc la transformation de parité sur les spineurs par

$$\psi'(t, \vec{x}) = \gamma^0\psi(t, -\vec{x}). \quad (3.67)$$

3.3 Couplage au champ électromagnétique

Ce qu'il y a de nouveau par rapport à l'équation de Klein–Gordon, c'est le spin. Comment se couple-t-il au champ électromagnétique? Commençons par quelques rappels de physique non relativiste.

3.3.1 Précession d'un spin dans un champ magnétique

A un spin est généralement associé un moment magnétique qui lui est proportionnel : $\vec{M} = \mu\vec{S}$, où μ est le facteur gyromagnétique. Le hamiltonien d'interaction de ce spin avec un champ magnétique extérieur devient donc

$$H = -\vec{M} \cdot \vec{B} = -\mu\vec{S} \cdot \vec{B} \quad (3.68)$$

L'équation du mouvement de l'opérateur de spin est donnée par l'équation de Ehrenfest

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = i[H, \vec{S}]. \quad (3.69)$$

Ce commutateur se calcule en utilisant l'identité

$$[AB, C] = [A, C]B + A[B, C] \quad (3.70)$$

et les relations de commutation du moment cinétique

$$[S_k, S_j] = i\epsilon_{kjl}S_l. \quad (3.71)$$

On obtient ainsi

$$\frac{dS_j}{dt} = -i\mu[S_k, S_j]B_k = \mu\epsilon_{kjl}S_lB_k \quad (3.72)$$

soit sous forme vectorielle

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu\vec{S} \times \vec{B}. \quad (3.73)$$

Ceci traduit simplement que le moment des forces s'exerçant sur un moment magnétique est $\vec{M} \times \vec{B} = \mu\vec{S} \times \vec{B}$. Le spin a donc un mouvement de précession autour de \vec{B} , à la vitesse angulaire $\omega = \mu B$.

D'autre part, on sait qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique tourne autour de \vec{B} à la vitesse angulaire $\omega = eB/m$. Si cette charge est en outre pourvue d'un spin, les vitesses angulaires de rotation et de précession diffèrent en général. Elles ne coïncident que si le rapport gyromagnétique vaut $\mu = e/m$. Dans ce cas particulier, le spin garde un angle constant avec la quantité de mouvement. Deux particules de spin $\frac{1}{2}$ vérifient très précisément cette propriété : l'électron, dont le facteur gyromagnétique vaut $\mu = (1,001159652187 \pm 0,000000000004) e/m_e$, et le muon μ^- , de masse $m_\mu c^2 = 106$ MeV, donc environ 200 fois plus lourd que l'électron, qui se désintègre par interaction faible en un temps moyen de $\tau = 2,19 \times 10^{-6}$ s, pour lequel $\mu = (1,0011659160 \pm 0,0000000006) e/m_\mu$. Il en va probablement de même pour le troisième lepton chargé, le τ^- , de masse $m_\tau = 1777$ MeV, dont la durée de vie, $\tau = 2,9 \times 10^{-13}$ s, est trop courte pour permettre une mesure directe du moment magnétique.

Il se trouve que l'équation de Dirac, sous sa forme la plus simple, prédit justement un facteur gyromagnétique égal à e/m , comme nous allons le voir. Ceci montre qu'elle décrit correctement les interactions électromagnétiques des leptons chargés, avec une précision de l'ordre de 10^{-3} . Les déviations de μ par rapport à e/m ne sont calculables que dans le cadre de la théorie quantique des champs, qui donne la valeur de μ sous forme d'un développement en puissances de la constante de structure fine $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137,036$. Au premier ordre, $\mu = (1 + \alpha/2\pi)e/m \simeq 1,001161 e/m$.

3.3.2 Couplage minimal

Les substitutions

$$\begin{aligned} E &\rightarrow E - eV(x) \\ \vec{P} &\rightarrow \vec{P} - e\vec{A}(x) \end{aligned} \quad (3.74)$$

transforment le hamiltonien libre (3.3) en

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}(x)) + \beta m + eV(x). \quad (3.75)$$

La forme covariante (3.31) de l'équation de Dirac devient ainsi

$$(\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m)\psi(x) = 0. \quad (3.76)$$

L'introduction du champ électromagnétique ne modifie pas les propriétés de covariance énoncées plus haut. Les expressions du courant de transition (3.47) et du courant de probabilité ne sont pas modifiées, contrairement à ce qui avait lieu pour l'équation de Klein-Gordon.

En remplaçant ϕ par ψ dans les équations (2.39) et (2.40), on voit que l'équation (3.76) respecte l'invariance de jauge, puisqu'elle est obtenue en remplaçant la dérivée ∂_μ par la dérivée covariante $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

Montrons que dans un champ purement magnétique, le spin garde un angle constant avec la quantité de mouvement $\vec{P} - e\vec{A}$. La quantité de mouvement gardant un module constant (le champ magnétique n'accélère

pas les particules) ainsi que le spin, il suffit pour cela de montrer que l'opérateur défini par $\mathcal{P} \equiv \vec{S} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})$ est une constante du mouvement, c'est à dire qu'il commute avec le hamiltonien $H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + \beta m$.

Ecrivons l'opérateur de spin sous la forme $\vec{S} = \gamma^5 \vec{\alpha} / 2$. Puisque γ^5 commute avec $\vec{\alpha}$, \mathcal{P} commute avec $\vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})$. Puisque \vec{S} commute avec β , \mathcal{P} commute aussi avec β . Donc \mathcal{P} commute avec H . D'après la discussion de la section 3.3.1, on en déduit que la particule décrite par l'équation de Dirac porte un moment magnétique $e\hbar/(2m)$. Dans la section 3.3.3, nous allons le vérifier d'une autre manière, en prenant la limite non relativiste de l'équation de Dirac.

Notons que le couplage minimal n'est pas la seule façon d'introduire le champ électromagnétique dans l'équation de Dirac : d'autres valeurs du moment magnétique sont possibles. Une généralisation est présentée dans l'exercice 3.6.4. Cette généralisation permet d'étendre l'utilisation de l'équation de Dirac à d'autres particules que les leptons chargés, par exemple le proton et le neutron, dont le moment magnétique est très différent de celui donné par le couplage minimal : celui-ci donnerait par exemple 0 pour le neutron, électriquement neutre, mais qui possède un moment magnétique, car les quarks qui le composent sont chargés.

3.3.3 Limite non relativiste

Pour prendre la limite non relativiste d'une solution d'énergie positive de l'équation de Dirac, il est naturel de séparer l'énergie de masse en écrivant le spineur de Dirac sous la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{-imt} \psi'(t, \vec{x}). \quad (3.77)$$

L'énergie se sépare alors en deux composantes correspondant à l'énergie cinétique et à l'énergie de masse :

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = e^{-imt} \left(i \frac{\partial}{\partial t} + m \right) \psi'. \quad (3.78)$$

L'équation d'évolution de ψ' se déduit de (3.75) et (3.78) :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV \right) \psi' = \left[\vec{\alpha} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) + (\beta - 1) m \right] \psi'. \quad (3.79)$$

La représentation standard de Dirac (3.6) est bien adaptée à la limite non relativiste. On décompose le spineur de Dirac en deux spineurs à deux composantes :

$$\psi' = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

L'équation (3.79) se réécrit alors

$$\begin{aligned} \left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV \right) \phi &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) \chi \\ \left(i \frac{\partial}{\partial t} - eV \right) \chi &= \vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) \phi - 2m\chi \end{aligned} \quad (3.81)$$

Dans la limite non relativiste, les termes d'énergie cinétique $i\partial/\partial t$ et d'énergie potentielle eV sont négligeables devant l'énergie de masse, et la deuxième équation se réduit à

$$\chi = \frac{\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})}{2m} \phi. \quad (3.82)$$

Cette équation montre que χ est beaucoup plus faible que ϕ à la limite non relativiste. On appelle respectivement ϕ et χ les grandes et les petites composantes. L'équation (3.82) permet d'éliminer χ dans (3.81) :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi = \left(\frac{[\vec{\sigma} \cdot (\vec{P} - e\vec{A})]^2}{2m} + eV \right) \phi, \quad (3.83)$$

équation de Pauli. Le deuxième membre joue le rôle d'un hamiltonien non relativiste pour le spineur ϕ .

On peut simplifier cette équation en développant $[\sigma_i (P_i - eA_i)]^2$. Les matrices de Pauli étant de carré 1, les termes carrés du développement donnent simplement $(\vec{P} - e\vec{A})^2$. Les termes croisés se calculent en utilisant la relation $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z = -\sigma_y \sigma_x$. Il apparaît alors des commutateurs de la forme

$$[P_x - eA_x(\vec{x}), P_y - eA_y(\vec{x})] = -ie \frac{\partial A_x}{\partial y} + ie \frac{\partial A_y}{\partial x} = ie B_z. \quad (3.84)$$

L'équation de Pauli (3.83) devient alors

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi = \left(\frac{(\vec{P} - e\vec{A})^2}{2m} + eV - \frac{e}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \phi. \quad (3.85)$$

On reconnaît bien l'équation de Schrödinger pour une particule chargée dans un champ électromagnétique, avec en plus un terme de couplage entre le spin et le champ magnétique, correspondant à un moment magnétique $e\hbar/2m$ aligné avec le spin, comme prévu.

3.4 Diffusion de Mott

Nous allons maintenant examiner, dans le cadre de la théorie de Dirac, la diffusion par un champ électromagnétique déjà étudiée pour une particule scalaire dans les sections 2.4 et 2.5.

3.4.1 Amplitude de transition

L'équation de Dirac étant du premier ordre en temps, comme l'équation de Schrödinger, on peut appliquer les résultats rappelés dans la section 2.4.1. En présence d'un champ électromagnétique, l'équation de Dirac est de la forme (2.41), où H_0 est le hamiltonien libre (3.3) et $W(x)$ la perturbation

$$W(x) = e \left(V(x) - \vec{\alpha} \cdot \vec{A}(x) \right) = e\gamma^0\gamma^\mu A_\mu(x). \quad (3.86)$$

On suppose que pour $t \rightarrow -\infty$, le spineur $\psi(x)$ est une solution de l'équation de Dirac libre, notée $\psi_i(x)$, et on va calculer la probabilité d'être dans un autre état libre, noté $\psi_f(x)$, à $t \rightarrow +\infty$.

L'amplitude de transition au premier ordre en W est donnée par l'équation (2.47), où la fonction d'onde est remplacée par un spineur à 4 composantes :

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \psi_f^\dagger(x) W(x) \psi_i(x). \quad (3.87)$$

En remplaçant $W(x)$ par son expression (3.86) et en introduisant le spineur conjugué (3.40), l'amplitude se met sous la forme (2.56), avec un courant de transition donné par (3.47), à un facteur e près (puisqu'il s'agit d'un courant électrique) :

$$j^\mu(x) = e \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \psi_i(x). \quad (3.88)$$

On a vu dans la section 2.4.4 que l'invariance de jauge de l'amplitude de transition équivaut à la conservation du courant de transition. Celle-ci a été prouvée dans la section 3.1.3. Elle se retrouve aisément sous la forme covariante (3.88) en utilisant l'équation de Dirac pour ψ_i , sous la forme (3.31), et l'équation de Dirac pour $\bar{\psi}_f$, sous la forme (3.42).

Si l'on choisit pour ψ_i et ψ_f des ondes planes normalisées de la forme (3.17)

$$\begin{aligned} \psi_i(x) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_i}V}} u_i e^{-ip_i^\mu x_\mu} \\ \psi_f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_f}V}} u_f e^{-ip_f^\mu x_\mu}, \end{aligned} \quad (3.89)$$

l'amplitude de transition devient

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \bar{u}_f \gamma^\mu u_i \tilde{A}_\mu(p_f - p_i) \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_i}} \sqrt{2V E_{\vec{p}_f}}}. \quad (3.90)$$

Le résultat est analogue à celui obtenu pour une particule scalaire (équation (2.64)), en effectuant la substitution

$$p_f^\mu + p_i^\mu \rightarrow \bar{u}_f \gamma^\mu u_i. \quad (3.91)$$

Les spineurs u_i et u_f contiennent ici la dépendance en spin de l'amplitude de transition.

Le diagramme de Feynman correspondant est représenté sur la figure 3.1. Il est identique à celui de la figure 2.1, si ce n'est que la particule de spin $\frac{1}{2}$ est représentée par un trait plein, au lieu de tirets pour une particule scalaire.

Nous pouvons donc énoncer quelques règles de Feynman supplémentaires : on associe un facteur u_i à une particule de spin $\frac{1}{2}$ entrante, et un facteur \bar{u}_f à une particule sortante. L'interaction électromagnétique d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ se traduit par le facteur $-ie\gamma^\mu$ associé au vertex.

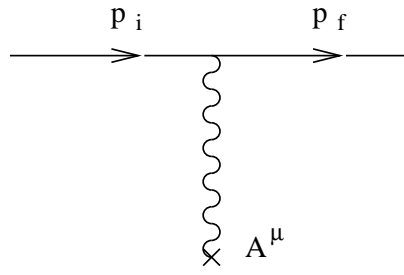


FIG. 3.1 – Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne.

3.4.2 Section efficace non polarisée

Considérons le cas particulier d'un champ purement électrostatique. Alors seul le terme $\mu = 0$ contribue dans l'équation (3.90). La seule différence avec le calcul effectué pour une particule scalaire est donc, en utilisant l'équation (3.91) avec $\mu = 0$, que l'on remplace un facteur $E_{\vec{p}_i} + E_{\vec{p}_f}$ par un facteur $\bar{u}_f \gamma^0 u_i = u_f^\dagger u_i$ dans l'amplitude de transition. La probabilité de transition s'obtient donc en remplaçant $(E_{\vec{p}_i} + E_{\vec{p}_f})^2$ par $|u_f^\dagger u_i|^2$.

Nous allons tout d'abord récrire cette quantité sous une forme qui s'avérera plus commode pour les calculs. En explicitant les composantes des spineurs, représentées par des indices α et β variant de 1 à 4, on obtient

$$|u_f^\dagger u_i|^2 = (u_{f\alpha}^* u_{i\alpha})(u_{f\beta} u_{i\beta}^*) \quad (3.92)$$

En changeant l'ordre des termes, cette équation fait apparaître la trace d'un produit de matrices :

$$\begin{aligned} |u_f^\dagger u_i|^2 &= (u_{i\alpha} u_{i\beta}^*)(u_{f\beta} u_{f\alpha}^*) \\ &= \text{tr} [(u_i u_i^\dagger)(u_f u_f^\dagger)]. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Attention ! N'oublions pas que $u^\dagger u$ est un nombre, mais $u u^\dagger$ une matrice 4×4 , déjà rencontrée dans la section 3.1.4 (voir l'équation (3.22)).

Nous poursuivrons le calcul dans le cas où les spins des particules entrante et sortante ne sont pas mesurés. Ceci nous permettra de comparer le résultat avec celui obtenu pour une particule scalaire. On va donc sommer la probabilité sur les états de spin de la particule sortante, qu'on suppose détectée indépendamment de son spin, et moyenner sur les états de spin de la particule entrante, dont le spin n'est pas connu. Puisqu'il y a deux états de spin, on va donc calculer

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |u_f^\dagger u_i|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} \text{tr} [(u_i u_i^\dagger)(u_f u_f^\dagger)]. \quad (3.94)$$

Les sommes sur les spins sont données par l'équation (3.23). On obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |u_f^\dagger u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{tr} [(E_{\vec{p}_f} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_f + \beta m)(E_{\vec{p}_i} + \vec{\alpha} \cdot \vec{p}_i + \beta m)]. \quad (3.95)$$

Nous avons vu à la section 3.1.2 que le produit de deux matrices de Dirac α_i ou β différentes est de trace nulle. Par conséquent, seuls restent les termes carrés, qui valent 1. En se souvenant que $\text{tr}(1) = 4$ puisqu'on a des matrices 4×4 , on aboutit au résultat

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |u_f^\dagger u_i|^2 = 2(E_{\vec{p}_i} E_{\vec{p}_f} + \vec{p}_i \cdot \vec{p}_f + m^2), \quad (3.96)$$

à comparer à $(E_{\vec{p}_i} + E_{\vec{p}_f})^2$ pour une particule sans spin.

Dans le cas particulier d'un champ indépendant du temps, l'énergie est conservée : $E_{\vec{p}_i} = E_{\vec{p}_f} = E$. Exprimons le résultat en fonction de l'angle de diffusion θ : $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f = p^2 \cos \theta$. En remplaçant m^2 par $E^2 - p^2$, on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |u_f^\dagger u_i|^2 = 4E^2 (1 - v^2 \sin^2 \theta/2) \quad (3.97)$$

où $v = p/E$ est la vitesse de la particule.

On obtient finalement la section efficace dite de Mott

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Klein-Gordon}} (1 - v^2 \sin^2 \theta/2). \quad (3.98)$$

Il apparaît une correction relativiste en v^2 provenant du spin.

3.5 Antiparticules

3.5.1 Points de vue de Feynman et de Dirac

L'interprétation de Feynman des états d'énergie négative (voir section 2.6) s'applique également à l'équation de Dirac : on interprète une particule d'énergie $-E$, d'impulsion $-\vec{p}$ et de spin $-\vec{\sigma}$ dans l'état initial (resp. final) comme une antiparticule d'énergie E , d'impulsion \vec{p} et de spin $\vec{\sigma}$ dans l'état final (resp. initial), interprétation compatible avec les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie et du moment cinétique. L'antiparticule a une charge électrique opposée à la particule.

Dirac, lorsqu'il écrivit l'équation qui porte son nom, proposa une autre interprétation des états d'énergie négative qui, par contre, ne se généralise pas à l'équation de Klein-Gordon. Une particule de spin $\frac{1}{2}$ étant un fermion, chaque état quantique est occupé au plus une fois. Le vide, défini comme l'état d'énergie la plus basse, est l'état où tous les niveaux d'énergie positive sont libres et tous les niveaux d'énergie négative sont occupés : c'est ce qu'on appelle la "mer de Dirac". Les états à une particule sont alors de deux sortes : soit on remplit un niveau d'énergie positive, c'est à dire un électron, soit on enlève une particule de la mer de Dirac, ce qu'on appelle un état de "trou" : enlever une particule de charge e , d'impulsion p^μ et de spin $\vec{\sigma}$ revient à ajouter une particule de charge $-e$ (donc une antiparticule), d'impulsion $-p^\mu$ et de spin $-\vec{\sigma}$. Par conséquent, les points de vue de Dirac et de Feynman conduisent au même résultat.

On note v (au lieu de u) une solution à ondes planes d'énergie négative.

3.5.2 Création de paires

Comme pour l'équation de Klein-Gordon, l'amplitude de transition dans un champ électromagnétique (3.90) sera interprétée, si $E_i < 0$ comme l'amplitude de création d'une paire par le champ électromagnétique, d'une particule d'impulsion $p_1^\mu = p_f^\mu$ et d'une antiparticule d'impulsion $p_2^\mu = -p_i^\mu$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu(p_1 + p_2) \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2V E_{\vec{p}_2}}}. \quad (3.99)$$

Notons une règle de Feynman supplémentaire : on associe un facteur v à une antiparticule sortante, et un facteur \bar{v} à une antiparticule entrante.

Le nombre moyen de paires créées s'écrit

$$P = \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_1}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_2}} \sum_{\text{spins}} \left| e \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu(p_1 + p_2) \right|^2. \quad (3.100)$$

Calculons la somme sur les états de polarisation. Nous écrivons tout d'abord

$$\sum_{\text{spins}} \left| \bar{u}_1 \gamma^\mu v_2 \tilde{A}_\mu \right|^2 = \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu^* L^{\mu\nu} \quad (3.101)$$

où

$$L^{\mu\nu} \equiv \sum_{\text{spins}} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{u}_1 \gamma^\nu v_2)^*. \quad (3.102)$$

Nous allons calculer $L^{\mu\nu}$. En utilisant (3.30) et (3.40), on obtient

$$(\bar{u}_1 \gamma^\nu v_2)^* = \bar{v}_2 \gamma^\nu u_1 \quad (3.103)$$

En remplaçant dans l'équation (3.102), on voit apparaître la trace d'un produit de matrices, comme dans l'équation (3.94) :

$$L^{\mu\nu} = \sum_{\text{spins}} (\bar{u}_1 \gamma^\mu v_2) (\bar{v}_2 \gamma^\nu u_1)$$

$$= \sum_{\text{spins}} \text{tr} [\gamma^\mu (v_2 \bar{v}_2) \gamma^\nu (u_1 \bar{u}_1)]. \quad (3.104)$$

Des équations (3.23) et (3.40), on déduit

$$\sum_{\text{spins}} u_1 \bar{u}_1 = \gamma_\mu p_1^\mu + m. \quad (3.105)$$

Pour les solutions d'énergie négative v_2 , on utilise l'équation (3.24), en veillant à remplacer \vec{p} par $-\vec{p}_2$ (puisque \vec{p}_2 désigne l'impulsion de l'antiparticule) :

$$\sum_{\text{spins}} v_2 \bar{v}_2 = \gamma_\mu p_2^\mu - m. \quad (3.106)$$

La somme sur les spins se ramène donc à un calcul de trace :

$$L^{\mu\nu} = \text{tr} [\gamma^\mu (\gamma^\rho p_{2\rho} - m) \gamma^\nu (\gamma^\sigma p_{1\sigma} + m)]. \quad (3.107)$$

Les traces se calculent au moyen des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4g^{\mu\nu} \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho) &= 0 \\ \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Après calcul,

$$L^{\mu\nu} = 4(p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (m^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}), \quad (3.109)$$

où nous avons utilisé la notation $p_1 \cdot p_2 = p_{1\alpha} p_2^\alpha$. On peut comparer ce résultat avec celui obtenu pour une particule scalaire (2.80) :

$$L^{\mu\nu} = (p_1^\mu - p_2^\mu)(p_1^\nu - p_2^\nu). \quad (3.110)$$

Pour obtenir la probabilité de création de paires, il reste à effectuer l'intégrale sur l'espace des phases de l'équation (3.100). Ce calcul est l'objet de l'exercice 3.6.9.

3.6 Exercices et problèmes

Les exercices 3.6.1 à 3.6.4 permettent de se familiariser avec les matrices de spin de l'équation de Dirac. L'exercice 3.6.6 calcule les premières corrections relativistes à l'équation de Pauli, responsables de la structure fine de l'atome d'hydrogène. Les exercices 3.6.7 à 3.6.10 complètent les exercices 2.7.4 à 2.7.8 du chapitre précédent, en y incluant les modifications liées au spin. Enfin, les exercices 3.6.5 et 3.6.11 traitent de problèmes qui ne sont pas spécifiques aux particules de spin $\frac{1}{2}$ (et qui auraient donc pu être étudiés au chapitre précédent) mais se traitent mieux au moyen d'un formalisme hamiltonien.

3.6.1 Construction des matrices de Dirac

On se propose de construire pour tout N un ensemble de N matrices $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ hermitiques, de même taille, telles que pour $i, j = 0, \dots, N-1$, on ait $\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}$.

1. Supposons qu'on ait N matrices $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$ de taille $p \times p$ vérifiant les conditions ci-dessus, avec N pair. Montrer qu'on peut en obtenir $N+1$ en prenant les mêmes, plus la matrice $\alpha_N = \lambda \alpha_0 \dots \alpha_{N-1}$ où λ est un nombre complexe dont on précisera la valeur suivant N .

2. Montrer qu'on peut ensuite passer à $N+2$ (pair) en prenant les matrices de taille $2p \times 2p$ suivantes :

$$\alpha'_{N+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \alpha'_j = \begin{pmatrix} 0 & i\alpha_j \\ -i\alpha_j & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } j = 0, \dots, N \quad (3.111)$$

3. Pour $N=1$, on peut choisir la matrice de taille 1×1 $\alpha_0 = (1)$. La méthode ci-dessus permet alors de construire par récurrence un ensemble de matrices pour tout N . Quelle est la taille des matrices en fonction de N ? Expliciter les matrices obtenues pour $N=2, 3, 4, 5$. Quelles matrices reconnaît-on ?

4. En généralisant à N pair quelconque les propriétés démontrées dans la section 3.1.2, montrer que les matrices construites ci-dessus sont de taille minimale.

3.6.2 Ondes planes dans la représentation de Dirac

1. Ecrire la fonction d'onde de Dirac correspondant à une onde plane d'énergie positive, d'impulsion p suivant l'axe z , et d'hélicité $+1/2$. On choisira la représentation de Dirac (3.6), dans laquelle on exprimera le hamiltonien (3.3) et l'hélicité (3.66). On posera $p = m \sinh \phi$, et on vérifiera que le spineur de polarisation est

$$u \propto \begin{pmatrix} \cosh(\phi/2) \\ 0 \\ \sinh(\phi/2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

2. On va maintenant retrouver cette expression en appliquant une transformation spéciale de Lorentz sur une solution au repos. Nous allons d'abord déterminer la transformation du spineur dans une transformation de Lorentz infinitésimale d'axe z et de vitesse $\phi \ll 1$, définie par $x' = x + \phi t$, $t' = t + \phi x$. En suivant la même démarche que pour les rotations infinitésimales (section 3.2.6), montrer que la matrice de transformation correspondante est

$$S = 1 - i\phi \Sigma^{01} = 1 + \frac{\phi}{2} \alpha_1. \quad (3.113)$$

3. Une transformation de vitesse finie s'obtient en formant le produit d'un grand nombre de transformations infinitésimales : on effectue le produit de N transformations de vitesse ϕ/N où N est très grand. Vérifier qu'on obtient ainsi

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \phi & \sinh \phi & 0 & 0 \\ \sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

et

$$S = \exp\left(\frac{\phi}{2} \alpha_j\right) = \cosh(\phi/2) + \alpha_j \sinh(\phi/2). \quad (3.115)$$

4. En appliquant la transformation précédente à une solution au repos de l'équation de Dirac, vérifier qu'on retrouve bien l'équation (3.112).

3.6.3 Quadri-vecteur de Pauli–Lubanski

On définit l'opérateur $W^\mu = \frac{1}{4m} \epsilon^{\mu\nu\rho\alpha} \sigma_{\nu\rho} p_\alpha$, où $\sigma_{\nu\rho}$ est défini par l'équation (3.48).

1. Vérifier qu'il se réduit, dans l'espace des états de $\vec{p} = \vec{0}$, à $(0, \vec{S})$, où \vec{S} est l'opérateur de spin défini dans la section 3.2.6.

2. Etudier la transformation du quadri-vecteur $(0, \vec{S})$ dans une transformation spéciale de Lorentz d'axe z et de vitesse v , en séparant les composantes parallèle et perpendiculaires à z . Vérifier que la composante spatiale de W^μ tend à s'aligner suivant z lorsque $v \rightarrow c$.

C'est une propriété des particules de masse nulle, qui vont à la vitesse de la lumière, d'avoir leur spin toujours porté par la direction de leur impulsion, soit dans le même sens, soit dans le sens contraire. Et cette propriété est indépendante de leur spin : elle est vraie, par exemple, pour les photons, qui sont de spin 1.

3.6.4 Couplage non minimal

On considère l'équation de Dirac modifiée par l'adjonction d'un terme de couplage non minimal au champ électromagnétique

$$\left[i\gamma^\mu (\partial_\mu - eA_\mu) - m - \frac{k}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0 \quad (3.116)$$

où $\sigma^{\mu\nu}$ est donné par l'équation (3.48) et k est un paramètre réel.

1. L'équation modifiée est-elle encore covariante sous le groupe de Lorentz ? Est-elle invariante de jauge ?

2. Calculer la modification du hamiltonien de Dirac, qu'on exprimera en fonction des champs \vec{E} et \vec{B} . Vérifier que le terme supplémentaire est bien hermitique.

3. Comment le terme supplémentaire modifie-t-il l'équation de Pauli (3.85) dans le cas d'un champ purement magnétique ? Quelle est l'interprétation physique de l'équation de Dirac modifiée ?

3.6.5 Opérateur de vitesse ; Zitterbewegung

L'opérateur de vitesse de l'équation de Dirac a des propriétés curieuses qui défont l'intuition physique. Nous allons énoncer ces propriétés, et montrer qu'elles découlent naturellement de l'existence d'états d'énergie négative.

Dans tout ce problème, on se placera dans la représentation de Heisenberg, où un opérateur \mathcal{O} évolue dans le temps suivant la loi $d\mathcal{O}/dt = -i[\mathcal{O}, H]$ (équation de Ehrenfest).

1. Vitesse de l'électron de Dirac

Vérifier que la vitesse pour un électron de Dirac libre est donnée par

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha}.$$

2. Propriétés de l'opérateur de vitesse

Vérifier les propriétés suivantes, et comparer avec la mécanique quantique non relativiste :

- Les composantes de l'opérateur de position commutent avec les composantes de l'opérateur de vitesse.
- Les seules valeurs possibles de la vitesse suivant un axe sont -1 et $+1$.
- Les composantes de l'opérateur de vitesse ne commutent pas entre elles.

Nous allons voir que ces propriétés curieuses, qui furent remarquées par Breit dès 1928, sont dues à la présence des états d'énergie négative : l'opérateur de vitesse, restreint aux états d'énergie positive, coïncide bien avec la vitesse usuelle \vec{p}/E .

3. Matrice de l'opérateur de vitesse

Pour cela, le plus simple est d'étudier l'élément de matrice de l'opérateur entre deux états propres de H , $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$, de valeurs propres respectives E_1 et E_2 .

a) Montrer que $\langle\psi_1|\vec{P}|\psi_2\rangle = 0$ si $E_1 \neq E_2$.

b) En utilisant l'équation (3.18), montrer que $\langle\psi_1|\vec{\alpha}|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|\vec{P}/H|\psi_2\rangle$ sauf pour $E_2 = -E_1$. Ceci prouve le résultat annoncé.

4. Non-conservation du moment orbital

Vérifier que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{P}.$$

Montrer que \vec{L} est conservé si on se restreint aux états d'énergie positive. On se placera pour cela dans une base propre commune à \vec{P} et à H , et on utilisera le résultat de la question 3.

5. Moment cinétique total

Calculer dS_3/dt , où S_3 est défini par l'équation (3.63). On utilisera pour cela l'identité (3.56). Vérifier que l'opérateur $J_3 = L_3 + S_3$ est une constante du mouvement. C'est le *moment cinétique total*.

6. Résolution des équations de Ehrenfest

Nous allons résoudre l'équation donnant l'évolution de la position dans le cas général où la fonction d'onde est une superposition d'états d'énergie positive et négative. Montrer que

$$\frac{d\vec{\alpha}}{dt} = -2i(\vec{\alpha}H - \vec{P}).$$

Vérifier que la solution de cette équation est

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{\vec{P}}{H} + \left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{P}}{H} \right) e^{-2iHt}.$$

(noter que l'écriture sous forme de fraction est justifiée par le fait que \vec{P} commute avec H , donc qu'on peut diviser indifféremment à droite ou à gauche). Par intégration, en déduire $\vec{r}(t)$. Ce calcul fut effectué par Schrödinger en 1930.

On trouve le résultat classique, plus un deuxième terme représentant un mouvement d'oscillation rapide (la fréquence est supérieure à $2m$), provenant des éléments de matrice de $\vec{\alpha}$ entre états d'énergie opposée. Ce mouvement supplémentaire a reçu le nom de "Zitterbewegung".

3.6.6 Couplage spin-orbite

Nous allons étudier les corrections relativistes à l'équation de Pauli (3.85), dans le cas particulier d'un champ purement électrostatique, soit $\vec{A}(\vec{x}) = 0$ et $V(\vec{x})$ indépendant du temps.

1. On considère un état stationnaire d'énergie totale $m + E$ avec $|E| \ll m$. Comme dans la section 3.3.3, on utilise la représentation standard de Dirac. Ecrire les équations vérifiées par χ et ϕ . Eliminer χ et montrer que ϕ vérifie l'équation

$$(E - eV)\phi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \frac{1}{2m + E - eV} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})\phi. \quad (3.117)$$

2. En développant la fraction, montrer qu'on reconnaît le hamiltonien non relativiste, d'ordre v^2 (v désignant la vitesse) plus une correction relativiste qui vaut à l'ordre v^4

$$\Delta H = -\frac{1}{4m^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(E - eV(\vec{x}))(\vec{\sigma} \cdot \vec{P}) \quad (3.118)$$

3. Calculer le commutateur $[E - eV(\vec{x}), \vec{\sigma} \cdot \vec{P}]$. En utilisant le fait que $(E - eV(\vec{x}))\phi \simeq \vec{P}^2/(2m)\phi$ à l'ordre v^2 , mettre la correction d'ordre v^4 sous la forme

$$\Delta H\phi = \left[-\frac{\vec{P}^4}{8m^3} + \frac{ie}{4m^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}V) \right] \phi. \quad (3.119)$$

Quelle est l'interprétation physique du premier terme ?

4. Reste à interpréter le dernier terme de l'équation (3.119), qui est lié au spin de l'électron. En utilisant l'identité

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (3.120)$$

Vérifier que

$$\frac{ie}{4m^2} (\vec{\sigma} \cdot \vec{P})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}V) = \frac{ie}{4m^2} \vec{P} \cdot \vec{\nabla}V - \frac{e}{2m^2} \vec{S} \cdot (\vec{P} \times \vec{\nabla}V), \quad (3.121)$$

où \vec{S} désigne l'opérateur de spin.

5. Le premier terme de l'équation (3.121) est dit *terme de Darwin*. Nous le noterons ΔH_D . On remarquera que ce terme n'est pas hermitique. La raison est un peu subtile. Le hamiltonien de Dirac est hermitique, donc deux états stationnaires ψ_1 et ψ_2 d'énergies différentes sont orthogonaux : $\psi_1^\dagger \psi_2 = \phi_1^\dagger \phi_2 + \chi_1^\dagger \chi_2 = 0$. Par contre, on n'a pas en général $\phi_1^\dagger \phi_2 = 0$, donc le hamiltonien pour ϕ n'est pas hermitique. Néanmoins, la valeur moyenne de ΔH_D dans l'état ϕ est réelle, puisque c'est la correction à l'énergie. On peut donc écrire

$$\langle \phi | \Delta H_D | \phi \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi | \Delta H_D + \Delta H_D^\dagger | \phi \rangle. \quad (3.122)$$

Vérifier qu'on obtient ainsi

$$\langle \phi | \Delta H_D | \phi \rangle = \frac{e}{8m^2} \langle \phi | \Delta V | \phi \rangle. \quad (3.123)$$

C'est la forme usuelle du terme de Darwin. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, quelles seront les orbitales affectées par ce terme ?

6. Il ne nous reste qu'à interpréter le dernier terme de l'équation (3.121), dit *interaction spin-orbite*. Nous le noterons ΔH_{so} . Dans le cas d'un potentiel central $V(r)$ où $r = |\vec{x}|$, vérifier que

$$\Delta H_{so} = \frac{e}{2m^2} \vec{S} \cdot \vec{L} \frac{1}{r} \frac{dV}{dr}, \quad (3.124)$$

où $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$ désigne le moment cinétique orbital. Quelle est l'interprétation physique de ce terme ?

3.6.7 Niveaux de Landau

On se propose de calculer les niveaux d'énergie d'un électron de Dirac placé dans un champ magnétique uniforme et constant \vec{B} . Cet exercice fait suite à l'exercice 2.7.4,

1. On considère tout d'abord le cas plus général d'un électron situé dans un champ magnétique constant quelconque, de potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{x})$ donné. On utilise la représentation de Dirac (3.6). Soit un état stationnaire d'énergie E , de spineur

$$\psi(t, x, y, z) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(x, y, z) \\ \chi(x, y, z) \end{pmatrix}. \quad (3.125)$$

où φ et χ sont des spineurs à deux composantes. Ecrire les équations couplées satisfaites par φ et χ . En déduire l'équation du second ordre satisfait par φ . La comparer à l'équation obtenue dans l'exercice 2.7.4.

2. On choisit $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. En utilisant les résultats de l'exercice 2.7.4, calculer les niveaux d'énergie. Examiner leur dégénérescence pour p_y et p_z fixés.

3. On se propose de montrer que la dégénérescence d'ordre 2 qui apparaît dans les niveaux de Landau est reliée à une symétrie du hamiltonien. Pour cela, on revient au hamiltonien de Dirac et on introduit les opérateurs Σ_1 et Σ_2 définis par

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= i\beta\alpha_z(\alpha_x p_x + \alpha_y(p_y - eBx)) \\ \Sigma_2 &= i\alpha_x\alpha_y(\alpha_z p_z + \beta m)\end{aligned}\quad (3.126)$$

Vérifier que Σ_1 et Σ_2 :

- sont hermitiques ;
- commutent avec H , p_y et p_z ;
- anticommulent entre eux.

Calculer Σ_2^2 et vérifier que $\Sigma_1^2 = H^2 - \Sigma_2^2$.

4. On peut se placer dans le sous-espace propre commun à H , p_y et p_z . Dédire de ce qui précède que les matrices σ_1 , σ_2 et σ_3 définies par $\sigma_1 \equiv \Sigma_1/\sqrt{\Sigma_1^2}$, $\sigma_2 \equiv \Sigma_2/\sqrt{\Sigma_2^2}$ et $\sigma_3 \equiv -i\sigma_1\sigma_2$ sont des constantes du mouvement qui vérifient l'algèbre des matrices de Pauli. Quel est le groupe de symétrie correspondant, et dans quelle représentation est-on ? Quelle dégénérescence des niveaux résulte de cette symétrie ?

3.6.8 Atome d'hydrogène

Cet exercice fait suite à l'exercice 2.7.5, qu'il complète en incluant les effets du spin de l'électron. Ecrire l'équation de Dirac pour l'électron de l'atome d'hydrogène, en traitant le proton comme une charge fixe et ponctuelle à l'origine des coordonnées. On notera $V(\vec{x})$ le potentiel du champ électrostatique.

Pour se ramener à une équation du second ordre similaire à l'équation de Klein-Gordon, on multiplie l'équation de Dirac par $\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m$ ($\vec{\alpha}$ sont les matrices de Dirac, à ne pas confondre avec $\alpha = e^2/4\pi$ dans ce problème). Calculer le commutateur $[\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m, E - eV(\vec{x})]$ et en déduire que l'équation d'onde s'écrit

$$\left[\vec{P}^2 + m^2 - \left(E + \frac{\alpha}{r} \right)^2 - i \frac{\alpha}{r^2} \vec{\alpha} \cdot \hat{r} \right] \psi(x) = 0 \quad (3.127)$$

où $\hat{r} = \vec{r}/r$. Montrer que pour se ramener au cas déjà étudié dans l'exercice 2.7.5, il suffit de diagonaliser l'opérateur $K = L^2 - \alpha^2 - i\alpha\vec{\alpha} \cdot \hat{r}$.

L'opérateur K n'agit pas sur la partie radiale de la fonction d'onde : pour le diagonaliser, on se place donc dans l'espace des variables angulaires et de spin. Dans cet espace, un ensemble complet d'observables qui commutent est constitué par J^2 , J_z et L^2 . Montrer (avec ou sans calcul) que K commute avec les composantes du moment cinétique \vec{J} .

Il suffit donc de diagonaliser K dans le sous-espace propre de J^2 et J_z correspondant à des valeurs propres données $j(j+1)$ et j_z . Montrer que dans ce sous-espace, noté \mathcal{E}_{j,j_z} , L^2 a deux valeurs propres possibles. Lesquelles ? Elles sont non dégénérées puisque J^2 , J_z et L^2 forment un ensemble complet d'observables qui commutent, et \mathcal{E}_{j,j_z} est donc de dimension 2.

On va écrire la matrice de K dans la base propre de L^2 . Montrer d'abord que l'élément de matrice de \hat{r} entre deux états de même l est nul, puis que $(\vec{\alpha} \cdot \hat{r})^2 = 1$. En déduire la forme de la matrice de $\vec{\alpha} \cdot \hat{r}$ puis celle de K sous la forme

$$K = (j+1/2)^2 - \alpha^2 + \begin{pmatrix} -(j+1/2) & -i\alpha e^{-i\varphi} \\ -i\alpha e^{i\varphi} & j+1/2 \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

où φ est un réel. Calculer les valeurs propres de K . En déduire les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène. Déterminer (soigneusement !) les valeurs prises par j pour n donné, et la dégénérescence du niveau $E_{n,j}$.

La parité est un bon nombre quantique pour ce problème. Que vaut-elle, à votre avis, pour les divers niveaux (sans calcul) ?

3.6.9 Création de paires

Vérifier que la probabilité de création de paires pour l'équation de Dirac se met sous la forme (2.90), avec

$$\begin{aligned}J^{\mu\nu}(q) &= \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2) \\ &\times 4 (p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (m^2 + p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}).\end{aligned}\quad (3.129)$$

1. Vérifier que l'équation (2.92) est toujours satisfaite avec cette définition de $J^{\mu\nu}$.

2. Vérifier que

$$g_{\mu\nu}J^{\mu\nu}(q) = -4(2m^2 + q^2)I(q). \quad (3.130)$$

où $I(q)$ est donné par l'équation (2.94). En déduire la probabilité totale de création de paires.

3.6.10 Couplage à un potentiel scalaire

On considère une particule de Dirac couplée à un champ scalaire $U(x)$, suivant le hamiltonien

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta(m + U(x)). \quad (3.131)$$

1. Vérifier que l'équation de Dirac se met sous la forme

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - (m + U(x))] \psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (3.132)$$

Comment faut-il transformer $U(x)$ dans une transformation de Lorentz pour que l'équation (3.132) soit covariante ?

2. Reprendre le calcul de diffusion de la section 3.4 avec cette interaction, au premier ordre en $U(x)$. Vérifier qu'on obtient la même amplitude de diffusion que par un champ électrostatique, en remplaçant $u_f^\dagger u_i$ par $\bar{u}_f u_i$.

3. Vérifier que

$$\frac{1}{2} \sum_{\text{spins}} |\bar{u}_f u_i|^2 = \frac{1}{2} \text{tr} \left((p_f^\mu \gamma_\mu + m)(p_i^\nu \gamma_\nu + m) \right). \quad (3.133)$$

Effectuer le calcul de trace. En déduire la section efficace de diffusion par un champ central $U(\vec{x}) = -e/(4\pi|\vec{x}|)$ et vérifier qu'on retrouve bien la section efficace de Rutherford à la limite non relativiste, comme pour l'équation de Klein–Gordon dans un potentiel scalaire (voir exercice 2.7.8).

4. Montrer que la probabilité de création de paires par le champ scalaire $U(x)$ s'écrit sous la forme

$$P = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{U}(q) \tilde{U}^*(q) J(q) \quad (3.134)$$

où

$$J(q) = \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3\vec{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(q - p_1 - p_2) \sum_{\text{spins}} |\bar{u}_1 v_2|^2. \quad (3.135)$$

Effectuer la somme sur les spins, le calcul de trace, et vérifier que

$$J(q) = 2(q^2 - 4m^2)I(q) \quad (3.136)$$

où $I(q)$ est défini par l'équation (2.94).

3.6.11 Puits de potentiel infini ; modèle du sac

Nous allons étudier quelques solutions exactes simples de l'équation de Dirac dans un potentiel scalaire (3.132).

1. Marche de potentiel : conditions aux limites

On considère d'abord le cas où $U(\vec{x})$ est une "marche" de potentiel : $U(\vec{x}) = 0$ pour $x < 0$ et $U(\vec{x}) = U_0 > 0$ pour $x > 0$. On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E de cette équation.

a) Montrer que pour $x > 0$, les solutions sont des combinaisons linéaires d'ondes planes de la forme

$$\psi(t, \vec{x}) = e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - Et)} u \quad (3.137)$$

où u est un spineur à quatre composantes, indépendant de \vec{x} et t , et où E et $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ sont reliés par $E^2 = \vec{p}^2 + (m + U_0)^2$.

b) On fixe E , p_y et p_z et on fait varier U_0 . Montrer que lorsque U_0 est suffisamment grand, la fonction d'onde décroît exponentiellement en x . Montrer que dans la limite où U_0 devient infini, on a $\psi(t, \vec{x}) = 0$ pour $x > 0$, et que l'équation de Dirac impose en $x = 0^-$ la condition

$$(i\gamma^1 + 1) \psi(t, \vec{x}) = 0. \quad (3.138)$$

La fonction d'onde est donc en général discontinue en $x = 0$, alors qu'elle est continue dans le cas de l'équation de Schrödinger. D'où vient cette différence ?

2. Modèle du sac

Le modèle du sac est un modèle simple de structure des hadrons (particules subissant l'interaction forte) tels que le proton ou le neutron, qui reproduit approximativement certaines de leur propriétés, en particulier leur spectre de masse. Dans ce modèle, un proton est décrit comme un assemblage de trois quarks (particules de Dirac) placés dans un potentiel scalaire $U(\vec{x})$. Ce potentiel est nul à l'intérieur d'un domaine \mathcal{D} , dit sac, et infini à l'extérieur de \mathcal{D} .

Par analogie avec l'équation (3.138), on suppose que le potentiel impose en tout point de la surface du sac la condition

$$(i\vec{n} \cdot \vec{\gamma} + 1) \psi(t, \vec{x}) = 0, \quad (3.139)$$

où \vec{n} désigne le vecteur unitaire normal à la surface au point considéré, orientée vers l'extérieur, et $\vec{\gamma} = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$.

a) Montrer que $\bar{\psi}\psi = 0$ et $\bar{\psi}\vec{n} \cdot \vec{\gamma}\psi = 0$ en tout point de la surface du sac.

b) Dédire de cette dernière propriété que la charge électrique contenue dans \mathcal{D} est conservée au cours du temps.

c) Montrer que le courant axial

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma^5\psi \quad (3.140)$$

est conservé à l'intérieur du sac si $m = 0$. La charge axiale correspondante est-elle en général conservée ?

3. Puits rectangulaire infini : calcul des niveaux d'énergie

Nous allons calculer explicitement les niveaux d'énergie dans le cas particulier où le sac \mathcal{D} est le puits rectangulaire compris entre les abscisses $x = 0$ et $x = a > 0$. On cherche la solution dans l'intervalle $0 \leq x \leq a$ sous la forme d'une superposition linéaire de deux ondes planes (ondes "incidente" et "réfléchie") :

$$\psi(t, \vec{x}) = (u_+ e^{ip_x x} + u_- e^{-ip_x x}) e^{i(p_y y + p_z z - Et)} \quad (3.141)$$

a) Montrer qu'on peut toujours décomposer ψ_i sous la forme

$$\psi_i = \psi_+ + \psi_-, \quad (3.142)$$

où ψ_+ et ψ_- sont états propres de $i\gamma^1$ avec les valeurs propres respectives $+1$ et -1 .

b) Ecrire les conditions aux limites imposées par l'équation (3.139) en $x = 0$ et $x = a$, et montrer qu'elles équivalent à

$$\psi_r = -e^{-2ipa} \psi_+ - \psi_-. \quad (3.143)$$

c) On définit l'opérateur \mathcal{O} , agissant sur ψ_i et ψ_r , par

$$\mathcal{O} = \frac{-1}{p} (\gamma^0 \partial_0 + \gamma^2 \partial_2 + \gamma^3 \partial_3). \quad (3.144)$$

Dédire alors de l'équation de Dirac que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\psi_i &= \left(\frac{im}{p} + i\gamma^1 \right) \psi_i \\ \mathcal{O}\psi_r &= \left(\frac{im}{p} - i\gamma^1 \right) \psi_r. \end{aligned} \quad (3.145)$$

d) Soit u un état propre de $i\gamma^1$ avec la valeur propre $+1$ (resp. -1). Montrer que $\mathcal{O}u$ est alors état propre de $i\gamma^1$ avec la valeur propre -1 (resp. $+1$). Dédire alors de la question précédente que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\psi_+ &= \left(\frac{im}{p} - 1 \right) \psi_- \\ \mathcal{O}\psi_- &= \left(\frac{im}{p} + 1 \right) \psi_+. \end{aligned} \quad (3.146)$$

e) En utilisant le résultat de la question b, et l'équation de Dirac pour ψ_r donnée à la question c, en déduire la condition de quantification

$$\tan(pa) = -\frac{p}{m} \quad (3.147)$$

Qu'obtient-on dans les limites non relativiste et ultrarelativiste ?

Chapitre 4

Photons

Le photon est la seule particule dont on ait découvert la nature ondulatoire (par les équations de Maxwell) avant la nature corpusculaire (par la loi de quantification de l'énergie de Planck en 1900, et surtout par l'interprétation de cette loi en termes de corpuscules par Einstein en 1905). Dans ce chapitre, nous allons donc partir des équations d'onde, et en donner une interprétation en termes de fonctions d'onde.

Les équations de Maxwell en jauge de Lorenz,

$$\square A^\mu = j^\mu \quad (4.1)$$

ressemblent à l'équation de Klein–Gordon, avec quelques particularités que nous allons étudier en détail dans ce chapitre :

- $m = 0$: le photon est de masse nulle.
- La fonction d'onde a quatre composantes et se transforme comme un vecteur : le photon est de spin 1.
- $A^\mu(x)$ est réel : le photon est sa propre antiparticule.
- Enfin, le terme d'interaction est très différent de celui qui apparaît dans l'équation de Klein–Gordon (2.48). Comme A^μ n'apparaît pas dans le second membre, le courant suffit à créer un champ même s'il n'y en a pas au départ : on appelle une telle interaction une *source* de champ (voir exercice 2.7.9). Il n'y a donc pas de courant de probabilité conservé, comme pour l'équation de Klein–Gordon en champ extérieur. Dans le point de vue quantique, ceci se traduit par le fait que le nombre de photons n'est pas conservé : ceci constitue en principe une limite à notre approche de mécanique quantique relativiste, où nous avons jusqu'ici considéré une et une seule particule.
- D'un point de vue plus technique, le fait que A^μ n'apparaisse pas dans le second membre de l'équation de Maxwell permet de la résoudre exactement. Par conséquent, nous n'aurons pas besoin de recourir à la théorie des perturbations dans ce chapitre.

4.1 Photon libre

Nous allons tout d'abord montrer qu'en l'absence de courant, le potentiel vecteur $A^\mu(x)$ d'une onde électromagnétique de pulsation ω et d'énergie $\hbar\omega$ peut être interprété comme la fonction d'onde d'une particule de masse nulle et de spin 1, le photon.

4.1.1 Onde plane monochromatique

Par rapport à l'équation de Klein–Gordon, la difficulté essentielle vient (comme pour l'équation de Dirac) du spin, c'est à dire ici du vecteur de polarisation, et également des questions liées à l'invariance de jauge. Comme les processus élémentaires sont d'ordinaire calculés avec des ondes planes monochromatiques dans l'état initial et dans l'état final, il n'est pas inutile de commencer par quelques rappels sur ces dernières. Nous écrivons une onde plane monochromatique sous la forme

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{-ik^\nu x_\nu}, \quad (4.2)$$

où ϵ^μ est un quadrivecteur constant dont les composantes peuvent être complexes, et k^μ un quadrivecteur constant réel. Notons qu'un champ $A^\mu(x)$ physique doit être réel : il faut alors superposer à la solution précédente une solution d'énergie k^0 opposée, et on n'a plus une onde plane monochromatique.

Pour l'onde plane monochromatique, la transformation de jauge la plus générale est de la forme $A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \Lambda(x)$, avec

$$\Lambda(x) = \lambda e^{-ik^\nu x_\nu}. \quad (4.3)$$

Effectuer cette transformation de jauge revient à remplacer dans (4.2) ϵ^μ par $\epsilon^\mu - i\lambda k^\mu$, et cette transformation ne change pas les quantités physiques : en effet, on vérifie immédiatement que le tenseur de champ électromagnétique,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -i(k^\mu \epsilon^\nu - k^\nu \epsilon^\mu) e^{-ik^\rho x_\rho}, \quad (4.4)$$

est invariant dans cette transformation. Notons qu'une transformation de jauge ne modifie que A^0 et la composante de \vec{A} parallèle à \vec{k} . Les composantes de \vec{A} perpendiculaires à \vec{k} , elles, sont invariantes de jauge.

Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -k_\mu (k^\mu \epsilon^\nu - k^\nu \epsilon^\mu) e^{-ik^\rho x_\rho} = 0 \quad (4.5)$$

d'où

$$(k_\mu k^\mu) \epsilon^\nu - (k_\mu \epsilon^\mu) k^\nu = 0. \quad (4.6)$$

Deux possibilités s'offrent alors. Soit $k_\mu k^\mu \neq 0$, auquel cas ϵ^ν est proportionnel à k^ν d'après l'équation précédente. Mais alors, d'après la remarque ci-dessus, A^μ peut être ramené à 0 par simple transformation de jauge, et un tel champ n'a aucun intérêt physique. On en déduit que $k_\mu k^\mu = 0$ est la seule possibilité intéressante, ce qui correspond à la relation de dispersion attendue $|k^0| = |\vec{k}|$ pour l'onde plane électromagnétique dans le vide. Mais on déduit alors des équations de Maxwell ci-dessus que $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ (sauf pour le cas d'un champ uniforme et constant $k^\nu = 0$), ce qui est la condition dite de jauge de Lorenz (bien que nous n'ayons pas fixé la jauge).

Retenons les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} k_\mu k^\mu &= 0 \\ k_\mu \epsilon^\mu &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

et le fait que la transformation de jauge $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda k^\mu$ n'a aucune incidence sur les quantités physiques.

On choisit traditionnellement de normaliser le vecteur de polarisation suivant

$$\epsilon_\mu^* \epsilon^\mu = -1. \quad (4.8)$$

On peut, enfin, effectuer une transformation de jauge de telle sorte que $\epsilon^0 = 0$, auquel cas on obtient la forme classique

$$\begin{aligned} A^0(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{A}(t, \vec{x}) &= \vec{\epsilon} e^{-i(k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec $k_0 = \pm |\vec{k}|$, $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ et $|\vec{\epsilon}| = 1$, qui vérifie la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(t, \vec{x}) = 0$.

4.1.2 Calcul semi-classique du nombre de photons

Nous savons qu'en électrodynamique classique, l'énergie contenue dans le champ électromagnétique vaut

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[\left(-\vec{\nabla} A^0 - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 + \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^2 \right]. \quad (4.10)$$

Ainsi, pour une onde plane de la forme

$$\begin{aligned} A^0 &= 0 \\ \vec{A} &= \lambda \vec{\epsilon} \left(e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt)} \right) = 2\lambda \vec{\epsilon} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - kt) \end{aligned} \quad (4.11)$$

(n'oublions pas que le champ A^μ doit être réel) avec $\vec{\epsilon}$ réel (le calcul peut se faire également pour $\vec{\epsilon}$ complexe), perpendiculaire à \vec{k} , de norme 1, on trouve

$$\mathcal{E} = 2\lambda^2 k^2 V. \quad (4.12)$$

Suivant Planck, les valeurs de l'énergie sont quantifiées en multiples de $\hbar k$, énergie d'un photon. Le nombre de photons dans l'exemple précédent est alors

$$\mathcal{N} = \frac{2\lambda^2 k V}{\hbar}. \quad (4.13)$$

Contrairement à l'énergie, le nombre de photons est une quantité essentiellement quantique.

S'il y a un seul photon, on trouve dans un système d'unités où $\hbar = 1$ la normalisation $\lambda = 1/\sqrt{2kV}$, c'est à dire la même que pour l'onde plane de Klein–Gordon ou de Dirac. Ceci suggère que le champ $A^\mu(x)$ est l'analogue, pour le photon, de la fonction d'onde de Klein–Gordon $\phi(x)$ pour une particule scalaire.

4.1.3 Interprétation probabiliste

Nous allons maintenant calculer le nombre de photons d'une autre façon, qui nous permettra de faire le lien avec l'équation de Klein–Gordon.

Ecrivons une onde plane monochromatique $A_f^\mu(x)$ dans la jauge de Coulomb, que nous normalisons comme l'onde plane de Klein–Gordon,

$$\begin{aligned} A_f^0(t, \vec{x}) &= 0 \\ \vec{A}_f(t, \vec{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2kV}} \vec{\epsilon} e^{-i(kt - \vec{k} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec $k = |\vec{k}|$, $|\vec{\epsilon}| = 1$, $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ où ϵ^μ vérifie la condition de normalisation (4.8), et calculons le recouvrement de cette onde avec le champ $A^\mu(x)$ en utilisant une formule analogue à celle de Klein–Gordon (2.20) :

$$\langle A_f | A \rangle = i \int d^3 \vec{x} \left(\vec{A}_f^* \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}_f^*}{\partial t} \cdot \vec{A} \right). \quad (4.15)$$

Nous avons choisi la jauge de Coulomb pour A_f^μ , mais le recouvrement ainsi défini est indépendant de la jauge choisie pour A^μ . Effectuons, en effet, la transformation $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, avec $\Lambda(x)$ une fonction arbitraire. Alors $\vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \Lambda$, et la variation du recouvrement est

$$\begin{aligned} \delta \langle A_f | A \rangle &= i \int d^3 \vec{x} \left(-\vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}_f^*}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \Lambda \right) \\ &= i \int d^3 \vec{x} \left((\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*) \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \frac{\partial (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*)}{\partial t} \Lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

où nous avons intégré par parties, supposé que \vec{A} s'annule à l'infini, et utilisé le fait que A_f vérifie la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f = 0$.

Si on prend pour A^μ l'onde plane (4.11), seul le premier terme (énergie positive) contribue au recouvrement et on trouve

$$\langle A_f | A \rangle = \lambda \sqrt{2kV}. \quad (4.17)$$

Le carré de cette quantité correspond au nombre de photons (4.13) dans un système d'unités où $\hbar = 1$. Ceci suggère que l'on interprète l'intégrale (4.15) comme l'amplitude de probabilité de trouver un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon}$ dans le champ $A^\mu(x)$. Le champ $A^\mu(x)$ est donc bien ici l'analogue de la fonction d'onde de Klein–Gordon $\phi(x)$ pour une particule scalaire.

Notons que pour calculer le nombre de photons d'impulsion \vec{k} , nous avons utilisé le recouvrement avec une onde plane monochromatique, qui ne correspond pas à un champ physique, puisqu'elle est complexe alors que A^μ doit être réel.

4.1.4 Spin du photon

Comme dans les chapitres précédents, l'opérateur de spin est défini à partir de la transformation dans une rotation infinitésimale. Nous savons que $\vec{A}(t, \vec{x})$ se transforme par rotation comme un vecteur, c'est à dire comme le vecteur de coordonnées \vec{x} . Pour une rotation infinitésimale d'angle $\theta \ll 1$ et d'axe j , cette transformation est donnée par l'équation (2.7)

$$A'_k(\vec{x}') - A_k(\vec{x}) = \theta \epsilon_{kjl} A_l. \quad (4.18)$$

L'opérateur de spin S_j est défini par l'équation (3.61), où nous remplaçons ψ par \vec{A} :

$$\vec{A}'(\vec{x}') - \vec{A}(\vec{x}) = -i\theta S_j \vec{A}(\vec{x}). \quad (4.19)$$

Des deux équations précédentes, on déduit les éléments de matrice de S_j :

$$(S_j)_{kl} = i\epsilon_{kjl}. \quad (4.20)$$

Explicitement, les matrices s'écrivent

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

On vérifie que $\vec{S}^2 = s(s+1) = 2$ d'où $s = 1$: le photon est de spin 1.

Comme pour l'équation de Dirac, on peut montrer que l'hélicité, c'est à dire la projection du spin sur la direction du mouvement, est un bon nombre quantique. Pour une onde allant dans la direction z , l'hélicité est simplement S_3 . Les deux vecteurs propres de S_3 associés aux valeurs propres ± 1 sont $\vec{\epsilon}_\pm = (1/\sqrt{2}, \pm i/\sqrt{2}, 0)$, tandis que le vecteur propre associé à la valeur propre 0 est $(0, 0, 1)$. Or, les seules valeurs physiques de $\vec{\epsilon}$ sont perpendiculaires à la direction du mouvement, ce qui exclut la valeur 0 : comme on sait, l'onde électromagnétique n'a que deux états indépendants de polarisation. Ils correspondent aux valeurs de l'hélicité ± 1 . La valeur 0, qu'on s'attendrait à trouver, est éliminée par l'invariance de jauge. C'est une propriété générale des particules de masse nulle, quel que soit leur spin, de n'avoir que deux états de polarisation.

Notons en passant que les matrices de spin ci-dessus sont imaginaires pures. Par conséquent, si $\vec{\epsilon}$ est vecteur propre de S_z avec la valeur propre λ , $\vec{\epsilon}^*$ est vecteur propre avec la valeur propre opposée.

4.2 Création et destruction de photons

Nous allons maintenant considérer l'interaction du champ électromagnétique avec un courant donné $j^\mu(x)$, dont on supposera qu'il s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$. Le champ électromagnétique en présence de ce courant est donné par les équations de Maxwell

$$\partial_\nu F^{\nu\mu}(x) = \square A^\mu(x) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(x)) = j^\mu(x). \quad (4.22)$$

Ainsi que nous l'avons noté dans l'introduction, le nombre de photons n'est pas conservé par cette interaction : il y a *rayonnement*. Il est donc naturel de s'intéresser au processus de création d'un photon.

4.2.1 Amplitude de transition

On suppose qu'il n'y a pas de photon présent pour $t \rightarrow -\infty$, soit $A^\mu(x) = 0$, et on va calculer la probabilité d'avoir un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon} \perp \vec{k}$ pour $t \rightarrow \infty$. Pour cela, nous allons calculer l'amplitude de transition en procédant comme dans la section 2.4.2.

L'amplitude de transition est donnée par (4.15), où l'on fait tendre t vers $+\infty$, et les champs A^μ et A_f^μ sont solutions de

$$\begin{aligned} \square \vec{A} + \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu) &= \vec{j} \\ \square \vec{A}_f &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Nous avons utilisé, pour la deuxième équation, le fait que l'onde plane dans le vide vérifie automatiquement la condition de jauge de Lorenz

$$\partial_\mu A_f^\mu = 0. \quad (4.24)$$

Comme pour l'équation de Klein-Gordon, nous définissons maintenant le courant de transition

$$J^\mu = i \left(\vec{A}_f^* \cdot \partial^\mu \vec{A} - (\partial^\mu \vec{A}_f^*) \cdot \vec{A} \right). \quad (4.25)$$

L'amplitude de transition est la charge associée à ce courant pour $t \rightarrow +\infty$. Des équations (4.23), on déduit

$$\partial_\mu J^\mu = i \vec{A}_f^* \cdot \vec{j} - i \vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu). \quad (4.26)$$

L'amplitude de transition s'obtient au moyen de l'équation (1.31) où l'on fait tendre t_1 vers $-\infty$ et t_2 vers $+\infty$. Par rapport à l'équation de Klein-Gordon, il y a un terme supplémentaire, mais qui donne une contribution nulle :

$$\int d^3\vec{x} \vec{A}_f^* \cdot \vec{\nabla}(\partial_\nu A^\nu) = - \int d^3\vec{x} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f^*)(\partial_\nu A^\nu) = 0 \quad (4.27)$$

où nous avons intégré par parties, utilisé le fait que A^ν s'annule pour $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ puis la condition de jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_f = 0$.

On obtient finalement l'amplitude de transition sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = i \int d^4x \vec{A}_f^* \cdot \vec{j}. \quad (4.28)$$

C'est une formule de réduction analogue à celles obtenues dans les chapitres précédents pour l'amplitude de diffusion d'une particule en présence d'une perturbation, Eqs. (2.54) et (3.87), à ceci près qu'il s'agit d'un processus de création, et qu'il n'y a donc pas de fonction d'onde associée à l'état initial. De même que

dans les chapitres précédents, nous obtenons directement l'amplitude de transition, sans avoir eu à résoudre l'équation d'onde en présence de la perturbation (ici, les équations de Maxwell en présence du courant $j^\mu(x)$).

En utilisant le fait que $A_f^0 = 0$, on peut également écrire l'amplitude de création (4.28) sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x A_f^{\mu*} j_\mu, \quad (4.29)$$

dont on notera la similitude formelle avec l'équation (2.56) donnant l'amplitude de diffusion d'une particule chargée (de spin 0 ou 1/2) par un champ électromagnétique extérieur. Cette similitude formelle se comprend dans le cadre de la formulation lagrangienne de l'électrodynamique, qui sera étudiée plus tard : dans cette formulation, c'est le même terme d'interaction qui produit l'accélération d'une charge par un champ électromagnétique, et le rayonnement de champ électromagnétique par une charge en mouvement. De là découle la symétrie entre les expressions des amplitudes de transition.

Bien que nous ayons effectué le calcul dans la jauge de Coulomb pour A_f^μ , le résultat sous la forme (4.29) est invariant dans la transformation de jauge $A_f^\mu \rightarrow A_f^\mu + \partial^\mu \Lambda$ si le courant j^μ vérifie l'équation de conservation $\partial_\mu j^\mu = 0$, en raisonnant comme dans la section 2.4.4.

En remplaçant $A_f^{\mu*}$ par son expression (4.14), on voit apparaître la transformée de Fourier du courant j^μ , évaluée en $k^0 = |\vec{k}|$:

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{i}{\sqrt{2kV}} \epsilon^{\mu*} \tilde{j}_\mu(k, \vec{k}). \quad (4.30)$$

Soulignons qu'il s'agit ici d'une expression exacte, et non d'un calcul de perturbation. Ce processus se représente par le diagramme de Feynman de la figure 4.1.

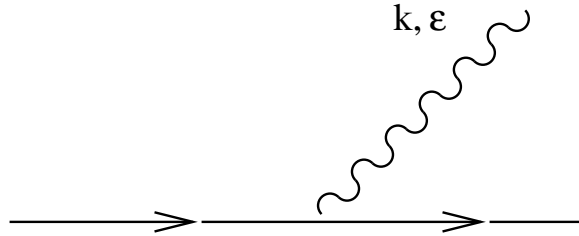


FIG. 4.1 – Diagramme de Feynman du rayonnement d'un photon. On a représenté ici le courant extérieur par une ligne pleine.

Nous en déduisons une nouvelle règle de Feynman : à un photon sortant est associé un facteur $\epsilon^{\mu*}$. Notons comment se manifeste l'invariance de jauge de l'amplitude sous la forme (4.30). Nous avons vu dans la section 4.1.1 qu'effectuer une transformation de jauge revient à changer ϵ^μ en $\epsilon^\mu + \lambda k^\mu$. On ajoute donc à l'amplitude (4.30) un terme proportionnel à $k^\mu \tilde{j}_\mu(k)$. Or l'équation de conservation du courant, $\partial_\mu j^\mu = 0$, s'écrit en transformée de Fourier, en utilisant l'équation (2.63) :

$$k^\mu \tilde{j}_\mu(k) = 0. \quad (4.31)$$

Retenons qu'une amplitude est invariante de jauge si et seulement si on obtient 0 en remplaçant le vecteur de polarisation ϵ^μ par k^μ . Ce résultat est général, et d'une importance capitale dans les théories de jauge.

4.2.2 Nombre de photons rayonnés

Le nombre moyen de photons rayonnés s'obtient en sommant les probabilités sur tous les états de photon possible (en suivant le même raisonnement que pour la création de paires, Sec.2.6.2) :

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \int \frac{V d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\text{polarisations}} |\mathcal{A}_{fi}|^2 \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\text{polarisations}} |\epsilon_\mu^* \tilde{j}^\mu(k, \vec{k})|^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Une fois de plus, on voit apparaître l'élément invariant d'espace des phases, et les facteurs de volume disparaissent. Il s'agit d'un nombre moyen : le calcul de la probabilité de rayonner un nombre n de photons est l'objet de l'exercice 4.5.5.

Reste à effectuer la somme sur les polarisations. Plaçons-nous dans la jauge de Coulomb où $\epsilon^0 = 0$ et $\vec{\epsilon} \cdot \vec{k} = 0$ (voir section 4.1.1), et choisissons un axe de coordonnées, par exemple z , suivant \vec{k} . Dans ce cas, une base orthonormée des états de polarisation est donnée par les deux autres vecteurs de base \vec{e}_x et \vec{e}_y , et

$$\sum_{\text{polarisations}} |\epsilon_\mu^* \tilde{j}^\mu(k, \vec{k})|^2 = |\tilde{j}^1(k, \vec{k})|^2 + |\tilde{j}^2(k, \vec{k})|^2. \quad (4.33)$$

Mais par ailleurs, la conservation du courant (4.31) s'écrit dans ce repère $\tilde{j}^0(k, \vec{k}) = \tilde{j}^3(k, \vec{k})$, donc on peut aussi écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\text{polarisations}} |\epsilon_\mu^* \tilde{j}^\mu(k, \vec{k})|^2 &= -|\tilde{j}^0(k, \vec{k})|^2 + |\tilde{j}^1(k, \vec{k})|^2 + |\tilde{j}^2(k, \vec{k})|^2 + |\tilde{j}^3(k, \vec{k})|^2 \\ &= -\tilde{j}_\mu^*(k, \vec{k}) \tilde{j}^\mu(k, \vec{k}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

ce qui donne une expression explicitement covariante du nombre de photons rayonnés.

On peut généraliser l'équation (4.33) à un système de coordonnées quelconque. Pour cela, nous écrivons

$$\sum_{\text{polarisations}} |\epsilon_\mu^* \tilde{j}^\mu(k, \vec{k})|^2 = \left(\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* \right) \tilde{j}^{\mu*}(k, \vec{k}) \tilde{j}^\nu(k, \vec{k}) \quad (4.35)$$

Dans la jauge de Coulomb où $\epsilon^0 = 0$, seules restent les composantes spatiales. Or $\epsilon_i \epsilon_j^*$ représente la matrice du projecteur sur la direction de $\vec{\epsilon}$, puisque $\vec{\epsilon}$ est un vecteur unitaire : comme pour l'équation de Dirac dans la section 3.4.2, la somme sur les polarisations fait apparaître le projecteur sur l'état de polarisation. En sommant sur les deux vecteurs $\vec{\epsilon}$ perpendiculaires à \vec{k} , on obtient donc le projecteur sur le plan orthogonal à \vec{k} , dont la matrice s'écrit

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_i \epsilon_j^* = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (4.36)$$

L'équation (4.34) montre qu'on peut également écrire, dans l'équation (4.35)

$$\sum_{\text{polarisations}} \epsilon_\mu \epsilon_\nu^* = -g_{\mu\nu}, \quad (4.37)$$

qui donne le même résultat compte tenu de la conservation du courant. Récrivons l'expression obtenue du nombre total de photons rayonnés :

$$\mathcal{N} = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k} \tilde{j}_\mu^*(k, \vec{k}) \tilde{j}^\mu(k, \vec{k}). \quad (4.38)$$

Dans les deux sections suivantes, nous allons calculer explicitement le nombre de photons rayonnés par une particule chargée en mouvement dans deux cas particuliers importants : tout d'abord pour un mouvement d'oscillation sinusoïdal (Sec. 4.3), puis pour un changement brutal de direction lors d'un choc (Sec. 4.4). Un troisième cas important, le rayonnement synchrotron émis par une particule chargée en mouvement circulaire, est traité dans l'exercice 4.5.6. Ces trois exemples sont fréquemment traités dans les cours d'électrodynamique classique : on calcule alors l'énergie rayonnée, qui est simplement reliée au nombre de photons. En comparant le calcul classique au calcul quantique, on sera surpris de constater que ce dernier est beaucoup plus simple. En effet, contrairement au calcul classique, nous n'avons pas eu besoin de résoudre les équations de Maxwell pour calculer le nombre de photons rayonnés. L'équivalence entre les deux approches, classique et quantique, est l'objet de l'exercice 5.6.6 dans le chapitre suivant.

4.2.3 Destruction d'un photon ; états d'énergie négative

Nous admettons que l'amplitude de probabilité de destruction d'un photon de fonction d'onde $A_i^\mu(x)$ par le champ électromagnétique est donnée par une équation analogue à (4.29), en remplaçant $A_f^{\mu*}(x)$ par $A_i^\mu(x)$: la conjugaison complexe s'applique à l'état final, et non à l'état initial, comme dans les chapitres précédents. On obtient

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4 x A_i^\mu j_\mu = -\frac{i}{\sqrt{2kV}} \epsilon^\mu \tilde{j}_\mu(-k, -\vec{k}). \quad (4.39)$$

Retenons, car c'est un résultat général, qu'à un photon entrant est associé un facteur ϵ^μ dans l'amplitude de transition.

L'interprétation des états d'énergie négative se fait comme dans les chapitres précédents : une particule d'énergie négative dans l'état initial correspond à une particule d'énergie, d'impulsion et de spins opposés dans l'état final. Par conséquent, l'amplitude de création d'un "antiphoton" de polarisation ϵ^μ , d'impulsion \vec{k} est d'énergie k , s'obtient en remplaçant k et \vec{k} par leurs opposés, et ϵ^μ par $\epsilon^{\mu*}$ (qui correspond à un spin opposé comme on l'a vu) dans l'équation (4.39) :

$$\mathcal{A}_{fi} = -\frac{i}{\sqrt{2kV}} \epsilon^{\mu*} \tilde{j}_\mu(k, \vec{k}). \quad (4.40)$$

Cette amplitude est rigoureusement identique à l'émission d'un photon, Eq. (4.30). Les probabilités d'émettre ou d'absorber sont les mêmes pour le photon et son antiparticule, c'est à dire qu'il n'y a pas lieu de les distinguer : le photon est sa propre antiparticule. Nous verrons plus clairement dans le cours de théorie quantique des champs que c'est une conséquence du fait que le champ $A^\mu(x)$ est réel : de même, une fonction d'onde de Klein-Gordon $\phi(x)$ réelle correspond à une particule de spin nul qui est sa propre antiparticule, telle que le pion neutre π^0 .

4.3 Rayonnement dipolaire

On sait d'après l'électrodynamique classique qu'une charge oscillant à la pulsation ω émet un rayonnement de même pulsation. En particulier, si la charge oscille sous l'influence d'une onde électromagnétique incidente, cette dernière sera diffusée dans toutes les directions : c'est l'effet Thomson, dont nous allons calculer la section efficace par un calcul quantique.

4.3.1 Calcul du courant

Pour une particule de charge e en mouvement sur une trajectoire $X^\mu(T)$, où T est un paramètre quelconque, le courant est donné par l'équation

$$j^\mu(x) = e \int dT \frac{dX^\mu}{dT} \delta^4(x - X(T)) \quad (4.41)$$

et sa transformée de Fourier par (2.62), soit

$$\begin{aligned} \tilde{j}^\mu(k) &= \int d^4x e^{ik_\nu x^\nu} j^\mu(x) \\ &= e \int_{-\infty}^{+\infty} dT \frac{dX^\mu}{dT} e^{ik_\nu X^\nu(T)}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Pour une particule oscillant à la pulsation ω , nous écrivons

$$\vec{X}(t) = \vec{a} \cos \omega t = \frac{\vec{a}}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \quad (4.43)$$

où \vec{a} est l'amplitude du mouvement, indépendante de t . On supposera que cette amplitude est suffisamment faible pour que le mouvement soit non relativiste, c'est à dire $|\vec{a}|\omega \ll c$. Ceci revient à dire que $|\vec{a}|$ est très petit devant la longueur d'onde du rayonnement émis. On pourra alors traiter $\vec{k} \cdot \vec{X}(t)$ comme un infiniment petit dans l'exponentielle de l'équation (4.42).

Les composantes spatiales de $\tilde{j}^\mu(k)$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \tilde{j}^i(k) &= e \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{i\omega a^i}{2} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) e^{ik^0 t} \\ &= \frac{i\omega a^i}{2} (2\pi\delta(k^0 + \omega) - 2\pi\delta(k^0 - \omega)). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Seul le second terme, de fréquence positive, va contribuer à l'émission de photons. Le calcul de la composante temporelle $\tilde{j}^0(k)$, qui ne nous servira pas ici, est l'objet de l'exercice 4.5.2.

4.3.2 Nombre de photons

Le nombre moyen de photons rayonnés est donné par l'équation (4.32). Comme dans la section 2.5.2, nous sommes amenés à calculer le carré de la distribution $\delta(k^0 - \omega)$, qui n'a pas de sens. La raison est similaire à celle invoquée alors : la charge oscille indéfiniment, et seul le nombre de photons rayonné par unité de temps

a un sens. En intégrant sur un temps fini T , et en utilisant l'équation (2.72), nous remplaçons $(2\pi\delta(k^0 - \omega))^2$ par $T 2\pi\delta(k^0 - \omega)$. Le nombre de photons rayonnés par unité de temps vaut alors, dans la jauge de Coulomb où $\epsilon^0 = 0$,

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt} = \int \frac{k^2 dk d\Omega_{\vec{k}}}{(2\pi)^3 2k} \sum_{\text{polarisations}} \delta(k - \omega) \left| \frac{e\omega}{2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{a} \right|^2, \quad (4.45)$$

où $d\Omega_{\vec{k}}$ est l'angle solide de la direction du photon émis. En intégrant sur k , on obtient finalement

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{e^2 \omega^3}{32\pi^2} \sum_{\text{polarisations}} |\vec{\epsilon} \cdot \vec{a}|^2. \quad (4.46)$$

La somme sur les polarisations s'effectue au moyen de l'équation (4.36), qui donne

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{e^2 \omega^3 a^2}{32\pi^2} \sin^2 \theta \quad (4.47)$$

où θ est l'angle entre la direction d'oscillation \vec{a} et la direction d'émission \vec{k} .

L'énergie rayonnée par unité d'angle solide s'obtient en multipliant cette expression par ω , et on retrouve alors le résultat classique : pour une amplitude a donnée, l'énergie rayonnée est proportionnelle à ω^4 . Ce résultat est notamment utilisé dans la diffusion Rayleigh.

4.3.3 Effet Thomson

Le calcul ci-dessus va nous permettre de calculer la section efficace de l'effet Compton à basse énergie. Lorsqu'un photon d'impulsion \vec{k}' et de polarisation $\vec{\epsilon}'$ rencontre une particule de charge e et de masse m , celle-ci oscille sous l'effet du champ électrique. Celui-ci se déduit de (4.11) avec $\lambda = 1/\sqrt{2k'V}$:

$$\vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\sqrt{\frac{2k'}{V}} \vec{\epsilon}' \sin(\vec{k}' \cdot \vec{x} - k't). \quad (4.48)$$

L'équation de mouvement de la particule chargée est

$$m \frac{d^2 \vec{X}}{dt^2} = e \vec{E}(t, \vec{X}(t)). \quad (4.49)$$

En négligeant, comme précédemment, l'amplitude du déplacement devant la longueur d'onde, on peut poser $E(t, \vec{X}(t)) \simeq E(t, \vec{0})$ si la particule oscille autour de l'origine, ce qui donne pour solution de l'équation précédente $\vec{X}(t) = \vec{a} \sin(k't)$ avec

$$\vec{a} = -\frac{e}{mk'^2} \sqrt{\frac{2k'}{V}} \vec{\epsilon}'. \quad (4.50)$$

On voit que l'amplitude du déplacement est de toute façon petite dans la limite $V \rightarrow \infty$. En remplaçant dans l'équation (4.46), on obtient le nombre de photons rayonnés par unité de temps :

$$\frac{d\mathcal{N}}{dt d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{e^4}{16\pi^2 m^2 V} |\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}'|^2. \quad (4.51)$$

En divisant par le flux de photons incidents, qui vaut $1/V$ puisque la vitesse est 1 (voir section 2.5.4), on en déduit la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{\alpha^2}{m^2} |\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}'|^2. \quad (4.52)$$

En électrodynamique classique, on obtient ce résultat en divisant la puissance émise dans l'angle solide $d\Omega_{\vec{k}}$ par l'intensité du rayonnement incident. Ici, nous avons remplacé l'énergie par le nombre de photons au numérateur et au dénominateur, ce qui ne change rien au résultat puisque chaque photon (incident ou émis) a la même énergie $\hbar\omega$.

Le calcul de la somme sur les polarisations est l'objet de l'exercice 4.5.1.

4.4 Bremsstrahlung

Nous allons maintenant calculer le rayonnement émis par une particule chargée au cours d'un choc. Nous considérons pour cela le cas particulier où $j^\mu(x)$ est le courant créé par une particule de charge e , en mouvement rectiligne uniforme pour $t < 0$, brusquement déviée à $t=0$, et de nouveau en mouvement rectiligne à une vitesse différente pour $t > 0$.

4.4.1 Calcul du courant

Nous prenons comme paramètre de la trajectoire le temps propre τ , ce qui nous permettra d'obtenir des expressions covariantes :

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau) &= u_i^\mu \tau \quad \tau < 0 \\ &= u_f^\mu \tau \quad \tau > 0 \end{aligned} \quad (4.53)$$

où $u^\mu = dX^\mu/d\tau$ désigne la quadrivitesse. La transformée de Fourier du courant est donnée par l'équation (4.42), où T remplacé par τ :

$$\tilde{j}^\mu(k) = eu_i^\mu \int_{-\infty}^0 d\tau e^{ik_\nu u_i^\nu \tau} + eu_f^\mu \int_0^{+\infty} d\tau e^{ik_\nu u_f^\nu \tau}. \quad (4.54)$$

Les intégrales oscillent pour $\tau \rightarrow \pm\infty$. Mais on a supposé que \vec{j} s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$, ce qui nous autorise à ajouter un facteur de convergence $-\varepsilon|\tau|$ dans l'exponentielle, où ε est un réel positif qu'on fait tendre vers 0 à la fin du calcul. On obtient alors par un calcul élémentaire

$$\tilde{j}^\mu(k) = -ie \left(\frac{u_i^\mu}{k \cdot u_i} - \frac{u_f^\mu}{k \cdot u_f} \right), \quad (4.55)$$

où nous avons noté $k \cdot u_i = k_\mu u_i^\mu$. Dans le cas plus réaliste où le changement de direction n'est pas instantané mais s'opère en un temps t_{coll} , le calcul précédent est valable pour des temps grands devant t_{coll} , soit pour $k^0 \ll 1/t_{\text{coll}}$.

4.4.2 Catastrophe infrarouge

Le nombre moyen de photons rayonnés par la particule accélérée est donné par les équations (4.38) et (4.55). Du fait que le photon est de masse nulle, on peut écrire $k^\mu = |\vec{k}|\hat{k}^\mu$, où $\hat{k}^\mu = (1, \vec{k}/|\vec{k}|)$ ne dépend que de la direction de \vec{k} . Les intégrales sur le module k et sur l'angle solide $\Omega_{\vec{k}}$ de \vec{k} se factorisent alors :

$$\mathcal{N} = -\frac{\alpha}{\pi} \int \frac{dk}{k} \int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \left(\frac{u_i}{\hat{k} \cdot u_i} - \frac{u_f}{\hat{k} \cdot u_f} \right)^2. \quad (4.56)$$

avec $\alpha = e^2/4\pi$.

L'intégrale sur k diverge pour $k \rightarrow 0$ et pour $k \rightarrow \infty$. La divergence pour $k \rightarrow \infty$, dite ultraviolette, n'est pas gênante car nous savons que notre calcul ne se justifie pour $k \ll 1/\tau$, où τ est la durée de la collision. En revanche, la divergence pour $k \rightarrow 0$, dite infrarouge, subsisterait dans un calcul plus réaliste : le nombre de photons diverge logarithmiquement, ce qu'on appelle catastrophe infrarouge. En revanche, l'énergie rayonnée converge en $k = 0$: la divergence du nombre de photons vient de la possibilité d'émettre des photons d'énergie arbitrairement petite, ce qui est dû au fait qu'il a une masse nulle.

Le calcul de l'intégrale angulaire est l'objet de l'exercice 4.5.7.

4.5 Exercices et problèmes

4.5.1 Section efficace de l'effet Thomson

Calculer la section efficace non polarisée en sommant (4.52) sur \vec{e}' (polarisation du photon sortant) et en moyennant sur \vec{e} (polarisation du photon entrant). On pourra utiliser la formule (4.36). Montrer que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\vec{k}}} = \frac{\alpha^2}{m^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2}, \quad (4.57)$$

où θ désigne l'angle entre \vec{k} et \vec{k}' , et en déduire par intégration la section efficace totale. Exprimer le résultat dans le système d'unités international, et vérifier que \hbar n'intervient pas dans le résultat. Quel est l'ordre de grandeur de $\sqrt{\sigma}$?

4.5.2 Courant de la charge oscillante

Au moyen des équations (4.42) et (4.43), calculer la composante temporelle $\tilde{j}^0(k)$ du courant. On développera l'exponentielle au premier ordre en \vec{a} . Vérifier que

$$\tilde{j}^0(k^0, \vec{k}) = 2\pi e \delta(k^0) - \frac{ie\vec{k} \cdot \vec{a}}{2} (2\pi \delta(k^0 + \omega) + 2\pi \delta(k^0 - \omega)). \quad (4.58)$$

Vérifier que le courant défini par les équations (4.44) et (4.58) satisfait l'équation de conservation (4.31) au premier ordre en \vec{a} .

4.5.3 Particule de spin 1 massive

On considère un champ vectoriel A^μ dont l'équation du mouvement est

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = j^\nu, \quad (4.59)$$

où $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, m est une constante et $j^\mu(x)$ un courant extérieur donné. C'est l'équation de Proca (1936).

1. Montrer que si le courant j^μ est conservé, alors $\partial_\mu A^\mu = 0$. Que devient alors l'équation (4.59)?
2. Quelles sont les solutions à ondes planes monochromatiques dans le vide? Quelle est donc l'interprétation physique de cette équation d'onde?

4.5.4 Limite expérimentale sur la masse du photon

Nous allons maintenant montrer comment on peut vérifier expérimentalement la présence d'un terme de masse tel que celui de l'équation (4.59) au moyen de l'expérience de Cavendish.

1. Comment est modifiée l'équation de Gauss $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\rho$ en présence du terme supplémentaire?
2. Déterminer la forme générale des solutions statiques de cette équation à symétrie sphérique $A^0(r)$ dans une région vide de charges. On pourra pour cela remarquer que

$$\Delta A^0(r) = \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \right]^2 A^0(r).$$

En déduire la forme du potentiel créé par une charge ponctuelle.

3. Nous allons maintenant voir comment on peut mettre en évidence cette modification du potentiel coulombien au moyen d'une expérience d'électrostatique. Vous avez appris dans vos cours d'électromagnétisme que la loi de Gauss entraîne que le champ électrique est nul à l'intérieur d'un conducteur fermé. Par conséquent, si une sphère parfaitement conductrice de rayon a est chargée sous une tension V , le potentiel électrostatique est partout égal à V à l'intérieur de la sphère. Supposons maintenant que m est non nul mais petit. En intégrant l'équation de Gauss sur le volume compris dans une sphère de rayon $r < a$, calculer le champ électrique puis le potentiel à l'intérieur de la sphère, à l'ordre dominant en m .

4. On place à l'intérieur de la sphère précédente une sphère conductrice de rayon b et de même centre, non chargée, et on mesure au moyen d'un galvanomètre la différence relative de potentiel $\Delta V/V$ entre les deux sphères. L'expérience (Williams, Faller et Hill, Physical Review Letters, vol.23, page 721, 1971) mesure $\Delta V/V < 4 \cdot 10^{-16}$ pour $a = 1,5$ m et $b = 1$ m. Calculer numériquement la borne supérieure sur la masse du photon qui en résulte.

4.5.5 Probabilité de créer n photons

Nous avons calculé, dans la section 4.2.2, le nombre moyen de photons rayonnés. Pour calculer la loi de probabilité du nombre de photons, il faut une hypothèse supplémentaire qui sera justifiée dans le chapitre 7, lorsque nous aurons quantifié le champ. Cette hypothèse est simplement que les processus d'émission de photons dans des états quantiques différents (chaque état étant caractérisé par son impulsion et sa polarisation) sont des événements *indépendants* au sens des probabilités. On en déduit que la loi de probabilité est une loi de Poisson, comme nous allons le démontrer.

Etant donné la loi de probabilité P_n d'une variable aléatoire entière n , on définit la *fonction génératrice associée* par

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n x^n. \quad (4.60)$$

1. Connaissant la fonction $g(x)$, comment calculer P_n ?
2. Que valent $g(1)$ et $g'(1)$?
3. Soit deux variables aléatoires indépendantes n_1 et n_2 , dont les fonctions génératrices sont $g_1(x)$ et $g_2(x)$. Montrer que la fonction génératrice de la variable $n_1 + n_2$ est $g_1(x)g_2(x)$.
4. Calculer la fonction génératrice $g(x)$ de la somme de N variables aléatoires indépendantes, où la variable i vaut 1 avec la probabilité p_i , et 0 avec la probabilité $1 - p_i$. Vérifier que dans la limite où $N \rightarrow \infty$, la valeur moyenne $\bar{n} = \sum_i^N p_i$ restant constante,

$$g(x) = e^{\bar{n}(x-1)}. \quad (4.61)$$

5. Calculer la loi de probabilité P_n associée à cette fonction génératrice. Il s'agit de la loi de Poisson. Expliquer pourquoi la distribution du nombre de photons créés dans une région quelconque de l'espace des impulsions suit bien une loi de Poisson.

4.5.6 Rayonnement synchrotron

Soit un électron en mouvement à la vitesse v sur une trajectoire circulaire de rayon R dans le plan (x, y) :

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos(vt/R) \\ y(t) &= R \sin(vt/R) \end{aligned} \quad (4.62)$$

Nous allons calculer le rayonnement émis par cet électron dans la limite ultrarelativiste où $1 - v \ll 1$.

1. Soit un photon de pulsation ω , dont l'impulsion est dans le plan (y, z) et fait un angle ψ avec le plan (x, y) . Ecrire le quadrivecteur d'énergie impulsion k^μ , et tracer l'allure en fonction du temps de la quantité $\phi(t) = k^\mu x_\mu(t)$.
2. Calculer l'amplitude de probabilité pour l'électron de rayonner un photon d'impulsion k^μ , pour deux états de polarisation linéaires qu'on choisira respectivement suivant x (polarisation dite *parallèle* par référence au mouvement de l'électron) et dans le plan (y, z) (polarisation dite *perpendiculaire*). On utilisera les équations (4.30) et (4.42).
3. On s'intéresse à la limite où la fréquence du rayonnement émis est grande devant la fréquence de rotation de l'électron, et où celui-ci est ultrarelativiste, $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2} \gg 1$. On étudie d'abord le cas où $\psi = 0$. En utilisant les résultats précédents, expliquer pourquoi les contributions dominantes à l'émission de photon viennent des régions où la vitesse de l'électron est presque colinéaire à celle du photon, et de même sens.
4. On néglige les interférences entre les ondes émises lors de deux tours successifs. Calculer l'amplitude de probabilité de rayonner un photon pendant un tour. On exprimera le résultat en faisant apparaître la fonction de Bessel modifiée $K_{2/3}(\xi)$ définie par

$$K_{2/3}(\xi) = \sqrt{3} \int_0^{+\infty} x \sin \left[\frac{3}{2} \xi \left(x + \frac{1}{3} x^3 \right) \right] dx. \quad (4.63)$$

5. Expliquer pourquoi l'amplitude décroît rapidement lorsque ω excède une valeur ω_c dont on donnera l'ordre de grandeur.

Application numérique : le synchrotron Soleil, qui sera mis en service à Saclay à partir de 2006, utilisera un faisceau d'électrons de 2.75 GeV défléchis par un champ magnétique de 1.71 T. Calculer l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des photons produits et de leur énergie en électron-Volt. A quoi peuvent servir de tels photons ?

6. Calculer l'énergie moyenne rayonnée à chaque tour par unité de ω et d'angle solide (toujours en $\psi = 0$). On exprimera le résultat dans le système d'unités international et on vérifiera qu'il est indépendant de \hbar . Comment interpréter ceci ?
7. Reprendre le calcul de l'amplitude de probabilité pour ψ non nul mais $\psi \ll 1$. On se limitera pour simplifier à une polarisation parallèle. Expliquer pourquoi l'amplitude de probabilité décroît rapidement au-delà d'une certaine valeur de ψ dont on discutera l'ordre de grandeur suivant que $\omega \simeq \omega_c$ ou $\omega \ll \omega_c$.

4.5.7 Bremsstrahlung : calcul du nombre de photons

1. Limite non relativiste : Calculer le courant (4.55) au premier ordre en \vec{v}_i et \vec{v}_f , vitesses initiale et finale de la particule chargée. Vérifier que

$$-\tilde{j}_\mu^*(k)\tilde{j}^\mu(k) = \frac{e^2}{|\vec{k}|^2} \left| \hat{k} \times (\vec{v}_i - \vec{v}_f) \right|^2. \quad (4.64)$$

En déduire que le nombre de photons rayonnés vaut

$$\mathcal{N} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right) \frac{2}{3} |\vec{v}_i - \vec{v}_f|^2. \quad (4.65)$$

2. Limite ultrarelativiste : Développer l'expression générale (4.56) du nombre de photons rayonnés. Vérifier que

$$\int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \frac{1}{(\hat{k} \cdot u_i)^2} = 1. \quad (4.66)$$

Nous allons maintenant calculer le double produit dans la limite où $|\vec{v}_i|$ et $|\vec{v}_f|$ sont très proches de 1, mais où \vec{v}_i et \vec{v}_f ne sont pas trop proches l'un de l'autre. Pour cela, on remarquera que la contribution principale à l'intégrale angulaire vient des valeurs de \hat{k} proches de \vec{v}_i ou \vec{v}_f , et on séparera le domaine d'intégration en deux cônes d'ouverture très petite, centrés respectivement autour de \vec{v}_i et \vec{v}_f . Montrer que

$$\int \frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi} \frac{u_i \cdot u_f}{(\hat{k} \cdot u_i)(\hat{k} \cdot u_f)} = -\frac{1}{2} (\ln(1 - |\vec{v}_i|) + \ln(1 - |\vec{v}_f|)) + C \quad (4.67)$$

où C désigne une constante d'ordre 1, petite devant les deux premiers termes, qu'on ne cherchera pas à expliciter, et qu'on négligera par la suite. Vérifier par ailleurs que sous les mêmes approximations,

$$\ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right) \simeq -\frac{1}{2} (\ln(1 - |\vec{v}_i|) + \ln(1 - |\vec{v}_f|)) \quad (4.68)$$

où $q = p_f - p_i$ est le quadrivecteur de transfert d'impulsion au cours du choc. On en déduit le nombre de photons dans la limite ultrarelativiste :

$$\mathcal{N} = \frac{\alpha}{\pi} \ln \left(\frac{k_{\max}}{k_{\min}} \right) 2 \ln \left(-\frac{q^2}{m^2} \right). \quad (4.69)$$

Chapitre 5

Propagateurs

Les propagateurs sont des fonctions (plus précisément, des distributions) qui permettent de résoudre une équation d'onde en présence d'une interaction. On les utilise en électrodynamique classique pour calculer le champ créé par un courant. Dans le cadre de l'équation de Klein–Gordon ou de l'équation de Dirac en présence d'un champ électromagnétique, les propagateurs nous permettront d'aller au-delà du premier ordre dans les calculs de perturbation. Ils jouent un rôle fondamental en théorie quantique des champs.

5.1 Propagation de l'onde électromagnétique

Nous commençons par un exemple simple de propagateur, dans le cadre de l'électrodynamique classique. Il nous permettra d'introduire des concepts et des outils de calcul qui seront utiles dans la suite de ce chapitre.

5.1.1 Position du problème

Nous allons chercher à résoudre les équations de Maxwell dans la jauge de Lorenz :

$$\square A^\mu = j^\mu, \quad (5.1)$$

pour des sources extérieures $j^\mu(x)$ données. Elles ont la forme d'équations d'onde avec second membre. On sait alors qu'il y a une infinité de solutions, qu'on obtient à partir d'une solution particulière en lui ajoutant une solution quelconque de l'équation sans second membre $\square\phi = 0$. Une solution particulière est fournie par la formule des potentiels retardés. Nous allons ici démontrer cette formule.

Pour résoudre l'équation (5.1), il suffit de trouver une fonction $G(x)$, dite propagateur ou fonction de Green, solution de l'équation

$$\square G(x) = \delta^4(x) \quad (5.2)$$

où $\delta^4(x) = \delta(t)\delta^3(\vec{x})$ est la distribution de Dirac à quatre dimensions. La fonction de Green correspond donc simplement à une onde créée par une source localisée à l'origine des coordonnées. La solution de cette équation n'est pas non plus unique, pour la même raison que précédemment.

Connaissant une solution $G(x)$ de l'équation précédente, on obtient une solution de (1.48) par convolution avec le courant $j^\mu(x)$:

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x-x') j^\mu(x'). \quad (5.3)$$

En effet, on vérifie immédiatement

$$\begin{aligned} \square_x A^\mu(x) &= \int d^4x' \square_x G(x-x') j^\mu(x') \\ &= \int d^4x' \delta^4(x-x') j^\mu(x') \\ &= j^\mu(x). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Reste à déterminer $G(x)$, que nous allons calculer explicitement. Pour cela, nous récrivons l'équation (5.2) en transformée de Fourier. La loi de correspondance $\partial_\mu \rightarrow -ik_\mu$ (voir Eq. (2.63)) donne

$$-k^\mu k_\mu \tilde{G}(k) = (-\omega^2 + \vec{k}^2) \tilde{G}(\omega, \vec{k}) = 1. \quad (5.5)$$

De même que $G(x)$, sa transformée de Fourier $\tilde{G}(k)$ n'est pas unique. Plus précisément, $\tilde{G}(k)$ n'est pas déterminée par l'équation (5.5) aux points où $\omega^2 - \vec{k}^2 = 0$, c'est à dire les valeurs de k^μ correspondant aux ondes libres. Deux fonctions de Green ne peuvent différer que sur le cône de lumière $\omega^2 - \vec{k}^2 = 0$.

5.1.2 Choix du propagateur

Nous allons calculer la fonction de Green retardée, définie par la condition $G(t, \vec{x}) = 0$ si $t < 0$, quel que soit \vec{x} . Avec cette convention, le champ $A^\mu(x)$ défini par l'équation (5.3) est nul tant qu'on n'a pas de courant : il correspond bien au champ *créé* par le courant. C'est la raison pour laquelle on utilise le propagateur retardé dans la plupart des calculs d'électrodynamique classique.

En théorie quantique des champs, cependant, on verra que le propagateur utile sera d'un autre type, dit *propagateur de Feynman*. La différence vient des états d'énergie négative, dont nous n'avons obtenu une interprétation physique satisfaisante qu'en échangeant état initial et état final, c'est à dire en faisant pour ainsi dire machine arrière dans le temps. Le "bon" propagateur en mécanique quantique relativiste sera donc retardé pour les états d'énergie positive, mais avancé pour les états d'énergie négative. Heureusement, pour les calculs de perturbation aux ordres les plus bas, le choix du propagateur n'a aucune importance, comme on le verra dans l'exercice 5.6.8 Nous remettons donc l'étude du propagateur de Feynman à un chapitre ultérieur.

Mais revenons au propagateur retardé. Comment se traduit la condition $\{ G(t, \vec{x}) = 0 \text{ pour } t < 0 \}$ sur la transformée de Fourier $\tilde{G}(\omega, \vec{k})$? On a la propriété générale suivante :

$f(t) = 0$ pour $t < 0$ si $\tilde{f}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan $\text{Im}(\omega) \geq 0$. (si $\tilde{f}(\omega)$ s'annule pour $|\omega|$ infini).

Démonstration : $f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega / 2\pi$. Pour $t < 0$ et $\text{Im}(\omega) > 0$, $|\tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t}|$ tend vers 0 pour $|\omega|$ grand. Par conséquent, l'intégrale sur un demi-cercle de rayon suffisamment grand (voir Figure 5.1) donne une contribution négligeable. En l'additionnant à l'intégrale sur l'axe réel, on obtient un contour d'intégration fermé. Or, on sait que l'intégrale sur un contour fermé est nulle si la fonction est analytique dans le contour, c'est à dire si elle n'a pas de pôles à l'intérieur du contour. Ceci prouve le résultat annoncé. Des illustrations simples en sont données dans les exercices 5.6.1 à 5.6.3.

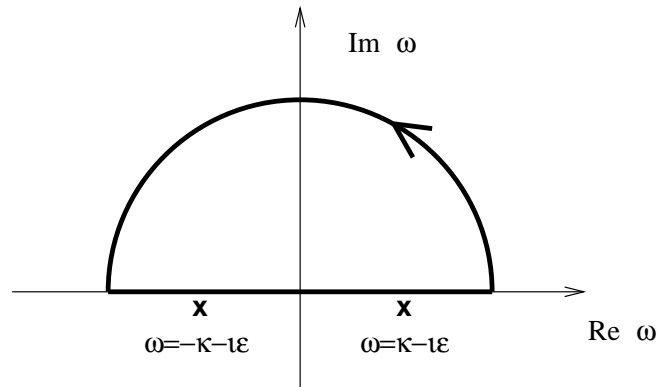


FIG. 5.1 – Pour $t < 0$, l'intégrale peut se calculer en refermant le contour d'intégration par le haut. La flèche indique le sens du contour d'intégration, ici positif.

Dans le cas qui nous intéresse, les pôles sont en $\omega = \pm |\vec{k}|$, soit juste à la limite du demi plan complexe $\text{Im}(\omega) \geq 0$. On lève l'ambiguïté en les déplaçant légèrement au-dessous de l'axe réel, en $\omega = \pm |\vec{k}| - i\epsilon$ avec $\epsilon > 0$ arbitrairement petit. On obtient alors

$$\tilde{G}_{\text{ret}}(\omega, \vec{k}) = \frac{-1}{(\omega + i\epsilon)^2 - \vec{k}^2}. \quad (5.6)$$

Physiquement, ajouter $-i\epsilon$ à ω revient à introduire un terme d'amortissement pour le champ électromagnétique (voir exercice 5.6.2).

5.1.3 Calcul du propagateur retardé

Il faut calculer la transformée de Fourier inverse :

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e^{-i\omega t}}{(\omega + i\epsilon - |\vec{k}|)(\omega + i\epsilon + |\vec{k}|)}. \quad (5.7)$$

Pour $t < 0$, on a vu que l'intégrale est nulle. Pour $t > 0$, on peut la calculer en refermant le contour à l'infini par le bas. La seule contribution vient alors des pôles situés en $\omega = \pm |\vec{k}| - i\epsilon$, et se calcule en utilisant le théorème des résidus.

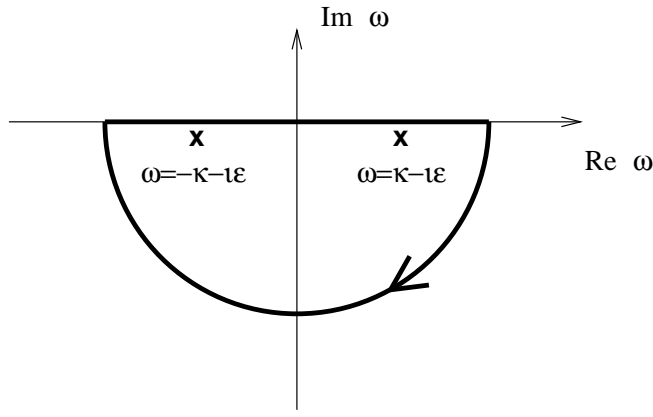


FIG. 5.2 – Pour $t > 0$, l'intégrale peut se calculer en refermant le contour d'intégration par le bas. La flèche indique le sens du contour, ici négatif.

Le théorème des résidus dit que

$$\oint_{\mathcal{C}} d\omega \frac{f(\omega)}{\omega - \omega_0} = 2i\pi f(\omega_0) \quad (5.8)$$

où \mathcal{C} est un contour fermé du plan complexe entourant ω_0 dans le sens positif, et $f(\omega)$ est une fonction analytique dans \mathcal{C} . Pour un contour dans le sens négatif (comme dans (5.7)) le résultat a le signe opposé.

L'application de (5.8) à l'intégrale (5.7) donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{-e^{-i\omega t}}{(\omega + i\epsilon - |\vec{k}|)(\omega + i\epsilon + |\vec{k}|)} = i \left(\frac{e^{-i|\vec{k}|t}}{2|\vec{k}|} + \frac{e^{i|\vec{k}|t}}{-2|\vec{k}|} \right) \quad (5.9)$$

D'où

$$G(t, \vec{x}) = -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \frac{e^{i|\vec{k}|t} - e^{-i|\vec{k}|t}}{2|\vec{k}|}. \quad (5.10)$$

On calcule les intégrales qui restent en choisissant des coordonnées sphériques d'axe \vec{x} . L'élément d'intégration s'écrit $d^3 \vec{k} = k^2 dk d\cos\theta d\phi$.

$$\begin{aligned} G(t, \vec{x}) &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk (e^{ikt} - e^{-ikt}) \int_{-1}^1 d\cos\theta e^{ik|\vec{x}|\cos\theta} \\ &= -\frac{i}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk (e^{ikt} - e^{-ikt}) \frac{e^{ik|\vec{x}|} - e^{-ik|\vec{x}|}}{ik|\vec{x}|} \\ &= -\frac{1}{2(2\pi)^2 |\vec{x}|} \int_{-\infty}^\infty dk \left(e^{ik(t+|\vec{x}|)} - e^{ik(t-|\vec{x}|)} \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi |\vec{x}|} (\delta(t + |\vec{x}|) - \delta(t - |\vec{x}|)) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Puisque $t > 0$, le premier terme s'annule. Il vient finalement

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{4\pi |\vec{x}|}. \quad (5.12)$$

Le propagateur retardé n'est non nul que sur le cône de lumière issu de l'origine : un observateur situé à une distance R de la source ne verra celle-ci qu'à l'instant précis $t = R/c$. Cette propriété porte le nom de *condition de Huyghens*. L'exercice 5.6.4 montre qu'elle n'est pas toujours vraie pour les équations d'onde dans des espaces de dimension différente.

L'équation (5.2) définissant G étant invariante par transformation de Lorentz, on peut donner une expression covariante de G en utilisant l'équation (2.81) :

$$G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \delta(x^\mu x_\mu). \quad (5.13)$$

où $\theta(t)$ désigne la fonction de Heaviside, définie par $\theta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $\theta(t) = 1$ pour $t > 0$. Notons que cette expression n'est invariante que par les transformations orthochrones : la condition retardée n'est pas invariante par renversement du temps.

5.1.4 Formule des potentiels retardés

Calculons le potentiel $A^\mu(x)$ obtenu à partir de la fonction de Green retardée (5.12) :

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{x}' dt' G_{\text{ret}}(t - t', \vec{x} - \vec{x}') j^\mu(t', \vec{x}'). \quad (5.14)$$

Intégrons sur t' . La fonction de Green n'est non nulle que pour $t - t' = |\vec{x} - \vec{x}'|$, et il vient

$$A_{\text{ret}}^\mu(t, \vec{x}) = \int d^3 \vec{x}' \frac{j^\mu(t - |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}')}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (5.15)$$

qui est la formule bien connue des potentiels retardés.

5.2 Propagateur de Klein–Gordon

Récrivons l'équation de Klein–Gordon en présence d'une perturbation (2.48) :

$$(\square + m^2)\phi(x) = -W(x)\phi(x). \quad (5.16)$$

Nous avons obtenu pour l'amplitude de transition vers un état libre $\phi_f(x)$ une formule au premier ordre en $W(x)$, Eq.(2.54). Nous allons maintenant voir comment calculer les ordres supérieurs. Pour cela, nous devons au préalable définir le propagateur de l'équation de Klein–Gordon.

5.2.1 Définition

On définit le propagateur $G(x)$ de l'équation de Klein–Gordon de façon analogue à celui de l'équation de Maxwell, Eq.(5.2). La différence essentielle provient du terme de masse. D'autre part, nous choisissons un signe approprié à la résolution de l'équation (5.16), où la perturbation $W(x)$ apparaît avec un signe négatif dans le second membre :

$$(\square + m^2) G(x) = -\delta^4(x). \quad (5.17)$$

Ceci se récrit en transformée de Fourier

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2} = \frac{1}{p^\mu p_\mu - m^2}, \quad (5.18)$$

avec une ambiguïté dans le choix du propagateur lorsque le dénominateur s'annule, soit lorsque $E = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. En suivant la même démarche que pour l'équation de Maxwell (section 5.1.2), on montre que le propagateur retardé, nul pour $t < 0$ en tout point, s'écrit

$$\tilde{G}_{\text{ret}}(p) = \frac{1}{(E + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}. \quad (5.19)$$

Nous ne ferons pas le calcul explicite de $G_{\text{ret}}(x)$, qui conduit à une expression plus compliquée que pour l'équation de Maxwell, en raison de la masse (la propagation ne se fait plus à la vitesse de la lumière) et présente peu d'intérêt pour les calculs de diagrammes qui font apparaître des transformées de Fourier quand on intègre sur x , puisqu'on choisit des ondes planes pour les particules entrantes et sortantes.

5.2.2 Application aux calculs de perturbation

Voyons maintenant comment on peut utiliser le propagateur pour résoudre

$$(\square + m^2)\phi(x) = -W(x)\phi(x). \quad (5.20)$$

Vérifions tout d'abord que si la perturbation $W(x)$ s'annule pour $t \rightarrow -\infty$, et si $\phi(x)$ tend vers $\phi_i(x)$, onde libre, alors $\phi(x)$ est donné par

$$\phi(x) = \phi_i(x) + \int d^4 x' G_{\text{ret}}(x - x') W(x') \phi(x'). \quad (5.21)$$

On vérifie immédiatement que $\phi(x)$ ainsi défini est bien solution de (5.20) en appliquant l'opérateur $\square_x + m^2$, en utilisant (5.17) et l'équation du mouvement $(\square + m^2)\phi_i = 0$. D'autre part, $\phi(x)$ vérifie bien la condition aux limites $\phi(x) \rightarrow \phi_i(x)$ en $t \rightarrow -\infty$ puisque W s'annule par hypothèse et G_{ret} est nul pour $t < 0$.

On n'a cependant pas résolu l'équation puisque la fonction inconnue ϕ apparaît dans le second membre de (5.21). Cependant, on peut remplacer ϕ dans le second membre en utilisant une fois de plus l'équation :

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \phi_i(x) + \int d^4x' G_{\text{ret}}(x-x')W(x')\phi_i(x') \\ &+ \int d^4x'd^4x''G_{\text{ret}}(x-x')W(x')G_{\text{ret}}(x'-x'')W(x'')\phi(x'')\end{aligned}\quad (5.22)$$

et ainsi de suite. On obtient ainsi un développement en puissances de la perturbation W . L'expression de l'amplitude de transition (2.53) devient ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{fi} &= -i \int d^4x \phi_f^*(x)W(x)\phi_i(x) \\ &-i \int d^4x d^4x' \phi_f^*(x)W(x)G_{\text{ret}}(x-x')W(x')\phi_i(x') + \dots\end{aligned}\quad (5.23)$$

et ainsi de suite. Le deuxième terme se comprend de la façon suivante : la particule incidente interagit en x' avec la perturbation, puis se propage librement depuis x' jusqu'en x (d'où le propagateur), et interagit une seconde fois en x .

Les mêmes formules décrivent la théorie de perturbations dépendant du temps pour l'équation de Schrödinger, si on remplace le propagateur par celui de l'équation de Schrödinger.

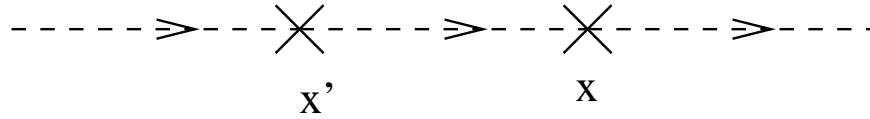


FIG. 5.3 – Diffusion au second ordre.

Cette amplitude se représente par le diagramme de Feynman de la figure 5.3. Les croix représentent les interactions avec la perturbation. Elles contribuent un poids W . La ligne pointillée entre les deux croix représente la propagation de la particule entre les deux interactions, à laquelle est associée le poids $G(x-x')$.

Bien qu'il s'agisse d'un point important pour la théorie, le choix du propagateur n'a aucune importance pour les calculs de perturbation que nous effectuerons dans ce cours, pour lesquels on n'a jamais $p^2 = m^2$ sur les lignes internes portant un propagateur. On se référera, pour plus de détails, à l'exercice 5.6.8.

5.3 Propagateur de Dirac

La seule différence, pour l'équation de Dirac, vient du fait que c'est en réalité un système de quatre équations (comme d'ailleurs les équations de Maxwell dans d'autres jauges). Par définition, le propagateur est la fonction qui permet de résoudre une équation avec second membre (une "source") :

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H\right) \psi(x) = j(x) \quad (5.24)$$

où $j(x)$ désigne un spineur à quatre composantes donné.

L'équation étant linéaire, la solution est une fonction linéaire de j , qu'on écrit sous la forme

$$\psi(x) = \int d^4x' S(x-x')j(x') \quad (5.25)$$

où $S(x)$ désigne une matrice 4×4 (qui n'a rien à voir avec la matrice $S(\Lambda)$ de la section 3.2.2). Pour que ceci soit solution de l'équation précédente, il suffit que S vérifie

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H\right) S(x) = \delta^4(x), \quad (5.26)$$

où la matrice identité 4×4 est sous-entendue dans le membre de droite. En transformée de Fourier, compte tenu de l'expression de H (3.3), cette équation devient

$$(E - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m) \tilde{S}(E, \vec{p}) = 1 \quad (5.27)$$

Pour résoudre cette équation, il faut inverser la matrice $E - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m$. Pour cela, on multiplie l'équation à gauche par $E + H$, et on utilise l'équation (3.4). On obtient alors

$$(E^2 - \vec{p}^2 - m^2)\tilde{S}(E, \vec{p}) = E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m. \quad (5.28)$$

Le propagateur retardé s'écrit par conséquent

$$\tilde{S}_{\text{ret}}(E, \vec{p}) = \frac{E + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{(E + i\epsilon)^2 - \vec{p}^2 - m^2}. \quad (5.29)$$

On peut appliquer ce propagateur aux perturbations d'ordre supérieur, en suivant pas à pas la même démarche que pour l'équation de Klein–Gordon. Cependant, on utilise en pratique la forme covariante du propagateur, celle qui permet de résoudre l'équation covariante (3.31) avec second membre, qui s'obtient en multipliant (5.24) à gauche par β

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = j_c(x), \quad (5.30)$$

où $j_c(x) = \beta j(x)$. En définissant le propagateur covariant par $S_c(x) = S(x)\beta$, on a $S_c(x)j_c(x) = S(x)\beta^2 j(x) = S(x)j(x)$, donc d'après l'équation (5.25),

$$\psi(x) = \int d^4x' S_c(x - x')j_c(x'). \quad (5.31)$$

L'équation déterminant la transformée de Fourier $\tilde{S}_c(p)$ s'obtient en multipliant (5.28) à droite par β :

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\tilde{S}_c(p) = \gamma^\mu p_\mu + m. \quad (5.32)$$

On voit que le propagateur de Dirac est relié au propagateur de l'équation de Klein–Gordon (5.18) par

$$\tilde{S}_c(p) = (\gamma^\mu p_\mu + m)\tilde{G}(p). \quad (5.33)$$

5.4 Application à quelques processus élémentaires

Notre formalisme de fonctions d'onde ne nous permet pas, en principe, de traiter l'interaction de deux particules relativistes. La situation est différente en mécanique quantique non relativiste, où le même formalisme permet, par exemple, de décrire deux électrons en interaction : les forces magnétiques sont négligeables, et la force électrostatique est représentée par le terme $e^2/(4\pi|\vec{x} - \vec{y}|)$ dans le hamiltonien. Si leur mouvement est relativiste, par contre, l'interaction n'est plus instantanée. Il faut prendre en compte le retard dû à la propagation, que nous avons étudié dans ce chapitre.

Mais ne désespérons pas. Nous sommes déjà parvenus à contourner la difficulté à plusieurs reprises : l'interprétation de Feynman des états d'énergie négative nous a permis de traiter la création de paires dans les chapitres 2 et 3 ; dans le chapitre 4, nous avons étudié la création de photons par un courant ; dans l'exercice 5.6.8 de ce chapitre, nous interprétons l'interaction d'une particule chargée avec un champ électromagnétique en termes d'absorption et d'émission de photons. Un petit effort supplémentaire nous permettra d'aller beaucoup plus loin.

Étudions à titre d'exemple la diffusion coulombienne de deux particules scalaires chargées.

5.4.1 Diffusion de deux particules scalaires chargées

Commençons par étudier la diffusion électromagnétique de deux particules scalaires distinctes, par exemple les mésons π^- et K^- . Nous noterons les impulsions du π^- et du K^- respectivement p_1 et p_2 avant la diffusion, p_3 et p_4 après.

Nous savons déjà que l'amplitude de diffusion du π^- (par exemple) dans un champ électromagnétique donné s'écrit sous la forme (2.56) :

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x j_\pi^\mu(x) A_\mu(x) \quad (5.34)$$

où j_π^μ désigne le courant de transition (2.60)

$$j_\pi^\mu(x) = e(p_1^\mu + p_3^\mu) e^{-i(p_1 - p_3) \cdot x} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_1}}} \frac{1}{\sqrt{2VE_{\vec{p}_3}}}. \quad (5.35)$$

Pour le processus qui nous intéresse, nous allons prendre pour $A^\mu(x)$ le champ créé par le K^- . On a vu au chapitre 5 que le champ créé par un courant $j_K^\mu(x)$ s'écrit

$$A^\mu(x) = \int d^4x' G(x-x') j_K^\mu(x') \quad (5.36)$$

où G est le propagateur du champ électromagnétique, et j_K^μ reste à définir. L'amplitude de diffusion prend alors la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x d^4x' j_\pi^\mu(x) G(x-x') j_{K,\mu}(x'). \quad (5.37)$$

Que choisir pour $j_K^\mu(x)$? Nous allons devoir nous contenter de notre intuition. Notons tout d'abord que le π^- et le K^- jouent des rôles symétriques dans le processus considérés : plutôt que de calculer l'amplitude de diffusion du π^- dans le champ créé par le K^- , nous aurions pu faire l'inverse, calculer l'amplitude de diffusion du K^- dans le champ créé par le π^- . Il est donc naturel de choisir pour j_K^μ le courant de transition associé au K^- , qui s'écrit

$$j_K^\mu(x) = e(p_2^\mu + p_4^\mu) e^{-i(p_2-p_4)\cdot x} \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_2}}} \frac{1}{\sqrt{2V E_{\vec{p}_4}}}. \quad (5.38)$$

Il reste cependant une dissymétrie dans l'amplitude (5.37) : si nous avons choisi de calculer l'amplitude de diffusion du K^- dans le champ créé par le π^- , nous aurions $G(x'-x)$ au lieu de $G(x-x')$. Si on choisit pour G le propagateur retardé, Eq.(5.12), alors $G_{\text{ret}}(x-x') = G_{\text{av}}(x'-x)$, où $G_{\text{av}}(x)$ est le propagateur avancé, voir exercice 5.6.5 et Eq.(5.66). Cependant, le choix du propagateur n'a aucune importance pour le calcul, comme nous allons le voir un peu plus bas, et le π^- et le K^- jouent par conséquent des rôles symétriques dans notre amplitude.

Calculons l'amplitude de transition (5.37). On écrit le propagateur en transformée de Fourier

$$G(x-x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq\cdot(x-x')} \frac{-1}{q^2}. \quad (5.39)$$

Les intégrations sur x et sur y donnent respectivement $(2\pi)^4 \delta^4(p_3 - p_1 - q)$ et $(2\pi)^4 \delta^4(p_4 - p_2 - q)$. Ceci impose que $q = p_3 - p_1 = p_4 - p_2$. En intégrant sur q , il apparaît ainsi un facteur $(2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)$, qui traduit la conservation de l'énergie et de l'impulsion globales.

L'amplitude de transition s'écrit finalement

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_1}} \sqrt{2E_{\vec{p}_2}} \sqrt{2E_{\vec{p}_3}} \sqrt{2E_{\vec{p}_4}} V} (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2) i \tau_{fi} \quad (5.40)$$

où τ_{fi} est l'amplitude de transition réduite invariante de Lorentz

$$\begin{aligned} \tau_{fi} &= -e^2 (p_1^\mu + p_3^\mu) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} (p_2^\nu + p_4^\nu) \\ &= e^2 \frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{(p_3 - p_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

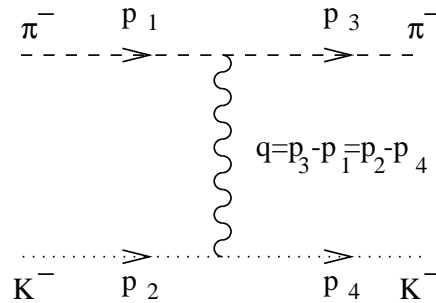


FIG. 5.4 – Diagramme de Feynman de la diffusion coulombienne $\pi^- - K^-$.

Cette amplitude se représente par le diagramme de Feynman de la figure 5.4. Comme dans le diagramme de la figure 2.1, on associe aux vertex les poids respectifs $-ie(p_1^\mu + p_3^\mu)$ et $-ie(p_2^\nu + p_4^\nu)$, et aux lignes externes un poids 1. La seule différence est la ligne interne décrivant la propagation du champ électromagnétique, à laquelle on associe le poids $-ig_{\mu\nu}/q^2$, correspondant au propagateur.

Vérifions ce que nous avons dit plus haut, que l'amplitude ne dépend pas du choix du propagateur. Pour cela, il suffit de vérifier que le dénominateur $q^2 = (p_3 - p_1)^2$ ne s'annule jamais. Nous allons montrer qu'il est en fait qu'on a toujours $q^2 < 0$ pour ce processus. Il suffit pour le voir de choisir un référentiel où $E_{\vec{p}_1} = E_{\vec{p}_3}$, auquel cas $(p_1 - p_3)^2 = -|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|^2$. Par ailleurs, $(p_1 - p_3)^2$ est un invariant de Lorentz, donc a la même valeur dans tout référentiel. On peut préférer une vérification directe. Montrons donc que $|E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}_3}| < |\vec{p}_1 - \vec{p}_3|$:

$$\begin{aligned} |E_{\vec{p}_1} - E_{\vec{p}_3}| &= \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} - \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2} = \frac{|\vec{p}_1^2 - \vec{p}_3^2|}{\sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} + \sqrt{\vec{p}_3^2 + m^2}} \\ &< \frac{|\vec{p}_1^2 - \vec{p}_3^2|}{|\vec{p}_1| + |\vec{p}_3|} = ||\vec{p}_1| - |\vec{p}_3|| \leq |\vec{p}_1 - \vec{p}_3|. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Ceci prouve le résultat cherché.

On dit que les deux particules chargées interagissent par l'échange d'un *photon virtuel*, par opposition à un photon *réel* qui vérifierait $q^2 = 0$. Cette notion de photon virtuel traduit simplement, dans un langage de particules, la propagation du champ électromagnétique entre les deux charges en mouvement.

Le calcul de la section efficace se fait en suivant les mêmes étapes que pour l'effet Compton dans la troisième partie de l'exercice 5.6.8.

5.4.2 Création de paires ; symétrie de croisement

Considérons à présent le processus $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$. Le π^+ et le K^+ sont bien entendu les antiparticules respectives du π^- et du K^- .

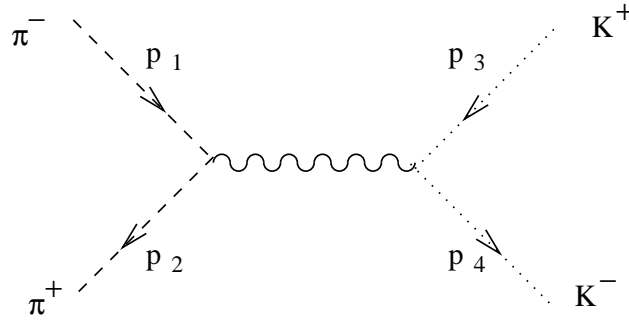


FIG. 5.5 – Diagramme de Feynman de la création de paires $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$. Il s'agit en fait du diagramme précédent vu différemment.

D'après l'interprétation des antiparticules exposée dans la section 2.6, l'amplitude de ce processus s'obtient à partir du processus de diffusion élastique $\pi^-K^- \rightarrow \pi^-K^-$ de la figure 5.4 en remplaçant : 1) le π^- sortant, d'impulsion p_3 , par un π^+ entrant d'impulsion $-p_3$; 2) le K^- entrant, d'impulsion p_2 , par un K^+ sortant d'impulsion $-p_2$. En adoptant les notations de la figure 5.5 pour les impulsions, on voit qu'on passe d'un processus à l'autre en remplaçant dans l'amplitude de transition p_2 par $-p_3$, et \vec{p}_3 par $-\vec{p}_2$. On obtient donc sans calcul l'amplitude de création de paires à partir de l'équation (5.41) :

$$\tau_{fi} = e^2 \frac{(p_1 - p_2) \cdot (p_3 - p_4)}{(p_1 + p_2)^2}. \quad (5.43)$$

On appelle symétrie de croisement (crossing symmetry) la propriété qui permet d'échanger ainsi particules et antiparticules. Elle nous a permis d'obtenir sans calcul l'amplitude du processus $\pi^-\pi^+ \rightarrow K^-K^+$ à partir d'un processus complètement différent, $\pi^-K^- \rightarrow \pi^-K^-$. Dans ce cas particulier, c'était très simple car nous avons l'expression analytique de l'amplitude de transition pour le premier processus. Mais en pratique, il est rare qu'on puisse calculer analytiquement une amplitude de diffusion, en particulier lorsque intervient l'interaction forte. Peut-on alors utiliser la symétrie de croisement ? C'est loin d'être évident, comme on peut facilement s'en persuader en examinant les dénominateurs des équations (5.41) et (5.43) : dans le premier cas, on a toujours $(p_1 - p_3)^2 < 0$ alors que, dans le deuxième, on a $(p_1 + p_2)^2 > 4m_\pi^2$, où m_π désigne la masse du pion. Par conséquent, nous avons utilisé la même fonction, mais dans deux domaines disjoints des paramètres.

Un peu d'histoire :

L'utilisation de la symétrie de croisement suppose donc un *prolongement analytique* de l'amplitude de diffusion. Les méthodes permettant d'effectuer ces prolongements et leur application à la description des

données expérimentales sur les interactions fortes ont été au cœur de l'activité théorique en physique des particules dans les années 1950 et 1960. En effet, on n'arrivait pas à décrire l'interaction forte au moyen d'un lagrangien d'interaction, comme pour l'électromagnétisme et l'interaction faible : pire, les interactions fortes ne semblaient guère suivre d'autres lois que celles, très générales, d'invariance de Lorentz, de causalité, de conservation de la probabilité, de symétrie de croisement. On en vint à penser, ce qui paraît aujourd'hui paradoxal, que ces lois devaient suffire à tout expliquer : de ce fait, la théorie des champs, où la notion de lagrangien d'interaction est fondamentale, passa de mode pendant toute cette période.

5.4.3 Diffusion de particules identiques

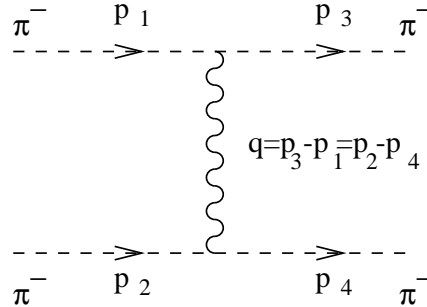


FIG. 5.6 – Diffusion élastique $\pi^- \pi^-$: diagramme direct.

Considérons à présent la diffusion coulombienne $\pi^- \pi^- \rightarrow \pi^- \pi^-$ (figure 5.6). Le même processus, où l'on échangerait les impulsions sortantes p_3 et p_4 , est indiscernable puisque ce sont des particules identiques. Les particules scalaires, de spin 0, étant des bosons, la fonction d'onde de l'état final doit être symétrique par échange des deux particules. Il faut par conséquent prendre en compte, outre le diagramme de la figure 5.6, celui de la figure 5.7, et additionner les deux amplitudes.

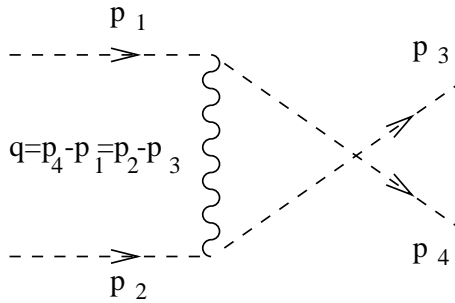


FIG. 5.7 – Diffusion élastique $\pi^- \pi^-$: diagramme d'échange.

L'amplitude du diagramme d'échange s'obtient en échangeant p_3 et p_4 . L'amplitude totale, somme des deux diagrammes, vaut donc :

$$\tau_{fi} = e^2 \left(\frac{(p_1 + p_3) \cdot (p_2 + p_4)}{(p_3 - p_1)^2} + \frac{(p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)}{(p_4 - p_1)^2} \right). \quad (5.44)$$

Cette "augmentation", par rapport au cas de deux particules différentes, est compensée par le fait qu'il y a deux fois moins d'états finals : (\vec{p}_3, \vec{p}_4) et (\vec{p}_4, \vec{p}_3) correspondent maintenant au même état. En définitive, la seule différence, par rapport à des particules distinctes, provient du terme d'interférence entre le diagramme direct et le diagramme d'échange, qui apparaît lorsqu'on élève au carré l'amplitude (5.44).

S'il s'était agi de particules de spin 1/2, par exemple des électrons, il aurait fallu soustraire, et non ajouter les amplitudes des diagrammes 5.6 et 5.7. En effet, la fonction d'onde de deux fermions identiques doit être antisymétrique par échange des deux particules.

5.5 Récapitulation : règles de Feynman

Les règles de Feynman permettent d'écrire sans calcul l'amplitude de transition entre un état initial et un état final comprenant un nombre arbitraire de particules d'impulsion et de spins définis, à un ordre donné

de la théorie des perturbations.

L'amplitude est une somme d'amplitudes partielles dont chacune peut être représentée par un diagramme. Les règles permettent de dessiner les diagrammes contribuant au processus étudié, et d'écrire les amplitudes partielles qu'ils représentent.

Un diagramme est composé de points ou "vertex" et de lignes de deux types : les lignes externes qui ont un vertex à une seule extrémité, et les lignes internes qui ont un vertex à chaque extrémité. A chaque ligne et à chaque vertex est associée une contribution. L'amplitude partielle est le produit de ces contributions. Voici les règles permettant de dessiner les diagrammes et de déterminer les amplitudes partielles associées :

- **Patte externe** : chacune des particules de l'état initial et de l'état final est représentée par une patte externe. Chaque patte externe est reliée à un et un seul vertex. La contribution d'une patte externe comprend toujours un facteur de normalisation $1/\sqrt{2EV}$. Pour les particules ayant un spin, elle comporte de plus
 - particule de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état initial : u
 - particule de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état final : \bar{u}
 - antiparticule de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état initial : \bar{v}
 - antiparticule de spin $\frac{1}{2}$ dans l'état final : v
 - photon dans l'état initial : ϵ^μ
 - photon dans l'état final : $\epsilon^{\mu*}$
- **Ligne interne** : elles représentent la propagation d'une particule, dite *virtuelle*, entre deux points d'interaction. Elle porte un quadrivecteur impulsion q^μ quelconque, qui ne vérifie pas l'équation $q^\mu q_\mu = m^2$. Sa contribution est $i d^4q/(2\pi)^4$ multiplié par le propagateur, soit
 - particule de spin 0 : $1/(q^2 - m^2)$
 - particule de spin $\frac{1}{2}$: $(\gamma^\mu q_\mu + m)/(q^2 - m^2)$.
 - photon : $-g^{\mu\nu}/q^2$
- **Vertex** : un vertex est un point d'intersection : un *vertex à n pattes* est en relation avec n lignes qui peuvent être indifféremment internes ou externes. Il comporte tout d'abord un poids $(2\pi)^4 \delta^4(P)$ où P^μ est la différence des quadriimpulsions entrantes et sortantes. Le vertex contient toute l'information sur l'interaction : le type de vertex, c'est à dire le nombre et la nature des lignes qu'il relie, ainsi que la contribution du vertex à l'amplitude dépendent de l'interaction. Résumons les cas que nous avons étudiés jusqu'ici :
 - *Electrodynamique scalaire* : il y a deux types de vertex : un vertex à trois pattes relié à deux lignes de particules chargées et une ligne de photon, dont la contribution est $-ie(p_1^\mu + p_2^\mu)$, où p_1^μ et p_2^μ sont les impulsions portées par les deux lignes de particules chargées (avec des signes – pour les antiparticules, il va sans dire) ; un vertex à quatre pattes (voir exercice 5.6.8) relié à deux lignes de particules chargées et deux lignes de photons, dont la contribution est $2ie^2 \epsilon \cdot \epsilon'^*$.
 - *Electrodynamique spinorielle* : un vertex à trois pattes analogue à celui de l'électrodynamique scalaire, dont la contribution est $-ie\gamma^\mu$

Les règles de Feynman précisent d'autre part que *tous* les diagrammes qu'on peut dessiner et qui vérifient les règles contribuent à l'amplitude. Nous y reviendrons dans le cours de théorie des champs.

En fin de calcul, on somme sur les impulsions q^μ portées par les lignes internes. Dans le cas d'un diagramme en arbre, la conservation de l'énergie et de l'impulsion aux vertex permet alors de déterminer de proche en proche les valeurs de q^μ portées par les lignes internes en fonction des impulsions des pattes externes. Les lignes internes ne sont jamais "sur couche de masse" et il n'y a jamais d'ambiguïté dans le choix du propagateur. (voir exercice 5.6.8). Ce n'est pas le cas pour les diagrammes présentant des boucles. Ces diagrammes, fort heureusement, n'interviennent que rarement pour un processus donné à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations. Une exception est la diffusion élastique photon-photon (pourquoi?).

Ainsi se termine notre cours de mécanique quantique relativiste. Nous allons maintenant retrouver toutes ces règles, mais établies plus proprement, dans le cours de théorie quantique des champs.

5.6 Exercices et problèmes

Les exercices 5.6.1 à 5.6.3 portent sur la transformée de Fourier et la propriété de causalité énoncée dans la section 5.1.2. Les exercices 5.6.4 et 5.6.5 sont des calculs de propagateur qui complètent celui de la section 5.1.3. L'exercice 5.6.6 reprend, du point de vue semi-classique, le calcul de création de photons du chapitre 4. Le problème 5.6.7 calcule le champ classique rayonné par une charge accélérée, et la perte d'énergie qui en résulte. Enfin, le problème 5.6.8 est un exemple important d'application de la théorie du propagateur.

5.6.1 Fonction de Heaviside

On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est définie par

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (5.45)$$

et la transformée de Fourier inverse

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (5.46)$$

1. Calculer la transformée de Fourier $\tilde{\theta}_\epsilon(\omega)$ de la fonction $\theta_\epsilon(t)$ définie par $\theta_\epsilon(t) = 0$ si $t < 0$ et $\theta_\epsilon(t) = e^{-\epsilon t}$ si $t \geq 0$, ϵ désignant un réel positif fixé. Où est le pôle de $\tilde{\theta}_\epsilon(\omega)$ dans le plan complexe? Vérifier sur ce cas particulier la propriété générale énoncée dans la section 5.1.2.

2. Calculer la transformée de Fourier inverse au moyen du théorème des résidus. Quel contour d'intégration faut-il utiliser pour $t < 0$? pour $t > 0$? Vérifier qu'on retrouve bien $\theta_\epsilon(t)$.

3. Quelle est la limite de $\theta_\epsilon(t)$ lorsque $\epsilon \rightarrow 0^+$?

5.6.2 Oscillateur forcé

Le but de cet exercice problème est d'illustrer les méthodes utilisées dans ce chapitre sur une équation différentielle simple, celle de l'oscillateur forcé :

$$\ddot{x} + \frac{2}{Q}\dot{x} + x = f(t) \quad (5.47)$$

où $f(t)$ est une fonction donnée et Q est une constante dont on rappellera la signification physique.

1. Quelle est la forme générale des solutions de l'équation pour $f(t) = 0$? On adoptera la notation complexe tout au long de cet exercice.

2. La fonction de Green retardée $G(t)$ de l'équation (5.47) est définie par

$$\ddot{G} + \frac{2}{Q}\dot{G} + G = \delta(t). \quad (5.48)$$

et la condition $G(t) = 0$ pour $t < 0$. Montrer que $G(t = 0^+) - G(t = 0^-) = 0$ et que $\dot{G}(t = 0^+) - \dot{G}(t = 0^-) = 1$. En utilisant le résultat de la question 1, en déduire l'expression de $G(t)$ pour $t > 0$.

3. Calculer la transformée de Fourier $\tilde{G}(\omega)$ de $G(t)$, définie par l'équation (5.48).

4. Retrouver le résultat de la question précédente en prenant directement la transformée de Fourier de l'équation (5.48).

5. Où sont situés les pôles de $\tilde{G}(\omega)$ dans le plan complexe de la variable ω ? Commenter le résultat.

6. Retrouver à partir de $\tilde{G}(\omega)$ l'expression de $G(t)$ obtenue précédemment en calculant la transformée de Fourier inverse (5.46) au moyen du théorème des résidus.

7. On revient à l'équation de départ (5.47). Montrer que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-t')f(t')dt' \quad (5.49)$$

est solution. Il s'agit d'une solution particulière. Quelle propriété la caractérise? Quelle autre méthode aurait-on pu utiliser pour résoudre l'équation (5.47)?

5.6.3 Propagation de l'onde à une dimension

Le but de ce problème est de résoudre l'équation d'onde à une dimension avec second membre :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = j(t, x), \quad (5.50)$$

où $j(t, x)$ est une fonction donnée. L'équation (5.50) admet une infinité de solutions. Nous déterminerons la solution retardée, qui s'annule pour $t \rightarrow -\infty$.

Dans la première partie, nous résoudrons l'équation directement. Puis nous montrerons que la fonction de Green qui en résulte est bien la même que celle obtenue par la méthode utilisée dans le cours : transformation de Fourier et condition de causalité. Dans tout le problème, nous supposons que $j(t, x)$ s'annule à l'infini en x et en t , ce qui nous permettra d'appliquer la transformation de Fourier.

Première partie : solution explicite

1. L'équation d'onde à une dimension se simplifie considérablement lorsqu'on la réécrit dans le système de coordonnées du cône de lumière (x^+, x^-) définies par

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{t+x}{\sqrt{2}} \\ x^- &= \frac{t-x}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

On notera S et J les expressions de s et j dans le nouveau système de coordonnées :

$$\begin{aligned} S(x^+, x^-) &= s\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right) \\ J(x^+, x^-) &= j\left(\frac{x^+ + x^-}{\sqrt{2}}, \frac{x^+ - x^-}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Montrer que l'équation (5.50) se réécrit, dans le nouveau système de coordonnées,

$$2 \frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} S(x^+, x^-) = J(x^+, x^-). \quad (5.53)$$

2. Quelle est la solution générale de l'équation lorsque $j(x, t) = 0$? Quelle en est l'interprétation physique?

3. Vérifier que la solution retardée de l'équation (5.53) est

$$S(x^+, x^-) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dx_1 \int_0^{+\infty} dx_2 J(x^+ - x_1, x^- - x_2). \quad (5.54)$$

4. Revenir aux variables x et t et exprimer $s(t, x)$ en fonction de $j(t, x)$. Il sera commode, pour ce calcul, de dessiner la région d'intégration dans le plan (t, x) . On commentera la forme de cette région d'intégration.

Deuxième partie : fonction de Green

1. Mettre la solution obtenue précédemment sous la forme

$$s(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} dx' G(t', x') j(t - t', x - x') \quad (5.55)$$

où $G(t, x)$ est la fonction de Green de l'équation (5.50),

$$G(t, x) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|). \quad (5.56)$$

où nous avons introduit la fonction de Heaviside $\theta(x)$, nulle pour $x < 0$ et égale à 1 pour $x > 0$. Une autre manière d'aboutir à ce résultat est présentée dans l'exercice 5.6.4.

2. La fonction $G(t, x)$ ne s'annule pas pour $t \rightarrow +\infty$, donc on ne peut pas calculer directement sa transformée de Fourier. Par contre, on peut calculer la transformée de Fourier de $G(t, x)e^{-\epsilon t}$ où ϵ est un réel positif arbitrairement petit que nous ferons tendre vers 0 à la fin du calcul. Effectuez ce calcul et mettez le résultat sous la forme

$$\tilde{G}(\omega, k) = -\frac{1}{(\omega + i\epsilon)^2 - k^2}. \quad (5.57)$$

Où sont les pôles de \tilde{G} dans le plan complexe de la variable ω ? Commenter ce résultat.

3. Calculer $s(t, x)$ définie par l'équation (5.55) dans le cas particulier où $j(t, x) = \delta(t) \delta(x)$. Déduire alors de l'équation (5.50) que $G(t, x)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \delta(t) \delta(x) \quad (5.58)$$

Effectuer une transformée de Fourier de cette équation et montrer qu'on retrouve le résultat précédent, au " $i\epsilon$ " près.

5.6.4 Propagateurs à 1+1 et 2+1 dimensions

La fonction de Green retardée à 2+1 dimensions du champ électromagnétique est la solution de

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G_{\text{ret}}(t, x, y) = \delta^3(t, x, y) \quad (5.59)$$

nulle pour $t < 0$. Montrer qu'on l'obtient par intégration de la fonction de Green à 3+1 dimensions :

$$G_{\text{ret}}(t, x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\text{ret}}(t, x, y, z) dz. \quad (5.60)$$

En déduire que

$$G_{\text{ret}}(t, x, y) = \frac{\theta(t - \sqrt{x^2 + y^2})}{2\pi\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}}. \quad (5.61)$$

On remarquera qu'ici, le champ électrique est non nul en tous les points intérieurs du cône de lumière, et pas seulement sur la surface de celui-ci : par conséquent, un observateur situé à une distance R de la source ne verra rien avant l'instant $t = R/c$, mais verra aux temps ultérieurs un "sillage" laissé par le passage de la source lumineuse. On montre qu'il en va de même dans toutes les dimensions d'espace paires.

En suivant la même démarche que précédemment, montrer que la fonction de Green retardée à 1+1 dimensions vaut

$$G_{\text{ret}}(t, x) = \frac{\theta(t - |x|)}{2}. \quad (5.62)$$

5.6.5 Fonction de Green avancée

1. En suivant la démarche de la section 5.1.2, donner l'expression de la transformée de Fourier $\tilde{G}_{\text{av}}(k)$ de la fonction de Green avancée du champ électromagnétique $G_{\text{av}}(x)$, nulle pour $t > 0$.

2. Montrer que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta(x) \quad (5.63)$$

et en déduire que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = 2i\pi\delta(x). \quad (5.64)$$

3. Déduire des résultats précédents l'identité

$$\tilde{G}_{\text{ret}}(\omega, \vec{k}) - \tilde{G}_{\text{av}}(\omega, \vec{k}) = 2i\pi(\theta(\omega) - \theta(-\omega))\delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2). \quad (5.65)$$

Pour faire ce calcul, on distinguera les cas $\omega > 0$ et $\omega < 0$. On vérifie donc, dans ce cas particulier, la propriété générale énoncée à la section 5.1.1, selon laquelle deux fonctions de Green ne peuvent différer que sur le cône de lumière $\omega^2 - |\vec{k}|^2 = 0$.

4. En suivant la démarche de la section 5.1.3, vérifier que la fonction de Green avancée vaut

$$G_{\text{av}}(t, \vec{x}) = \frac{\delta(t + |\vec{x}|)}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (5.66)$$

5.6.6 Champ électromagnétique rayonné par un courant

On définit

$$G^{(-)}(t, \vec{x}) \equiv G_{\text{ret}}(t, \vec{x}) - G_{\text{av}}(t, \vec{x}). \quad (5.67)$$

Etant donné un courant $j^\mu(x)$, on définit ensuite (cf. Eq.(5.3))

$$A_{\text{ray}}^\mu(x) = \int d^4x' G^{(-)}(x - x')j^\mu(x'). \quad (5.68)$$

1. En supposant que le courant $j^\mu(x)$ s'annule pour $t \rightarrow \pm\infty$, vérifier que A_{ray}^μ coïncide avec le champ retardé créé par le courant $j^\mu(x)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2. Vérifier que $\square A_{\text{ray}}^\mu(x) = 0$. On en déduit que $A_{\text{ray}}^\mu(x)$ est une superposition d'ondes planes libres : c'est à proprement parler le champ rayonné par la source de courant. Cette expression a été introduite par Dirac en 1938 dans l'article "Classical theory of radiating electrons", Proc.Roy.Soc.Lond.A167 :148-169.

3. A l'aide des équations (5.65) et (5.68), montrer que la transformée de Fourier $\tilde{A}_{\text{ray}}^\mu(\omega, \vec{k})$ vaut

$$\tilde{A}_{\text{ray}}^\mu(\omega, \vec{k}) = \frac{i\pi}{|\vec{k}|} \tilde{j}^\mu(|\vec{k}|, \vec{k}) \delta(\omega - |\vec{k}|) - \frac{i\pi}{|\vec{k}|} \tilde{j}^\mu(-|\vec{k}|, \vec{k}) \delta(\omega + |\vec{k}|). \quad (5.69)$$

4. Dans cette question, $j^\mu(x)$ désigne le courant créé par des particules chargées en mouvement uniforme à la vitesse \vec{v} , de la forme $j^\mu(t, \vec{x}) = v^\mu f(\vec{x} - \vec{v}t)$ avec $v^\mu = (1, \vec{v})$. En déduire que sa transformée de Fourier est $\tilde{j}^\mu(\omega, \vec{k}) = v^\mu \tilde{f}(\vec{k}) 2\pi \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$, c'est à dire qu'elle n'est non nulle que pour $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}$. Déduire alors de la question précédente que $A_{\text{ray}}^\mu(x) = 0$: des particules en mouvement uniforme ne rayonnent pas.

5. Nous allons maintenant vérifier qu'on retrouve, à partir de cette expression du champ rayonné, la même expression que dans le chapitre 4 pour l'amplitude de probabilité de trouver un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon}$.

a) En prenant la transformée de Fourier inverse de (5.69), vérifier que

$$A_{\text{ray}}^\mu(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{i}{2|\vec{k}|V} \tilde{j}^\mu(|\vec{k}|, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot x - |\vec{k}|t)} - \frac{i}{2|\vec{k}|V} \tilde{j}^\mu(-|\vec{k}|, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot x + |\vec{k}|t)} \right). \quad (5.70)$$

On utilisera le fait que dans un volume fini mais grand, V , on peut faire la substitution $d^3\vec{k}/(2\pi)^3 \rightarrow (1/V) \sum_{\vec{k}}$. Mettre ce résultat sous la forme

$$A_{\text{ray}}^\mu(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{i}{2|\vec{k}|V} \tilde{j}^\mu(|\vec{k}|, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot x - |\vec{k}|t)} - \frac{i}{2|\vec{k}|V} \tilde{j}^\mu(|\vec{k}|, \vec{k})^* e^{-i(\vec{k} \cdot x - |\vec{k}|t)} \right). \quad (5.71)$$

b) On sait que seules les composantes de \vec{A} perpendiculaires à \vec{k} contribuent au nombre de photons. On peut projeter sur le plan perpendiculaire à \vec{k} en remplaçant \vec{j} par $\sum_{\text{polarisations}} \vec{\epsilon}(\vec{\epsilon}^* \cdot \vec{j})$. Mettre le résultat sous la forme

$$\vec{A}_{\text{ray}}(t, \vec{x}) = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \left(a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \frac{\vec{\epsilon}}{\sqrt{2|\vec{k}|V}} e^{i(\vec{k} \cdot x - |\vec{k}|t)} + a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^* \frac{\vec{\epsilon}^*}{\sqrt{2|\vec{k}|V}} e^{-i(\vec{k} \cdot x - |\vec{k}|t)} \right). \quad (5.72)$$

Dans cette équation, $a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}$ représente l'amplitude de probabilité de trouver un photon d'impulsion \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon}$ dans le champ rayonné. Vérifier qu'on retrouve bien le résultat du chapitre précédent, Eq. (4.28).

5.6.7 Rayonnement d'une particule accélérée

Le but de ce problème est d'étudier quelques aspects du champ électromagnétique créé par une particule de charge q , de masse m , en mouvement le long d'une trajectoire donnée $X^\mu(\tau)$. On notera $a \cdot b = a^\mu b_\mu$, $a^2 = a^\mu a_\mu$, et $u^\mu(\tau) = dX^\mu/d\tau$.

1. Potentiels de Liénard-Wiechert :

En utilisant l'expression covariante du courant créé par la particule (4.41), montrer que le potentiel en un point quelconque x^μ s'exprime, dans la jauge de Lorentz,

$$A^\mu(x) = q \int u^\mu G_{\text{ret}}(x - X(\tau)) d\tau, \quad (5.73)$$

où $G_{\text{ret}}(x)$ est la fonction de Green retardée donnée par l'équation (5.13) Montrer que pour un point donné x de l'espace-temps, il existe une et une seule valeur de τ , notée par la suite τ_0 , telle que $x^0 > X^0(\tau_0)$ et $(x - X(\tau_0))^2 = 0$. On notera également $R = |\vec{x} - \vec{X}(\tau_0)|$, $\vec{n} = (\vec{x} - \vec{X}(\tau_0))/R$. Montrer qu'avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{q}{4\pi R(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})} \\ \vec{A}(x) &= \frac{q\vec{v}}{4\pi R(1 - \vec{v} \cdot \vec{n})}. \end{aligned} \quad (5.74)$$

2. Champ électromagnétique :

Vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta[(x - X)^2] = -\frac{x_\mu - X_\mu}{u \cdot (x - X)} \frac{d}{d\tau} \delta[(x - X)^2] \quad (5.75)$$

et en déduire, en partant de l'équation (5.73), que si x n'est pas sur la trajectoire de la particule, alors

$$F_{\mu\nu}(x) = q \int \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u_\nu(x_\mu - X_\mu) - u_\mu(x_\nu - X_\nu)}{u \cdot (x - X)} \right] G_{\text{ret}}(x - X(\tau)) d\tau. \quad (5.76)$$

Montrer que ceci peut également s'écrire, avec les mêmes notations qu'à la première question,

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{q}{4\pi u(\tau_0) \cdot (x - X(\tau_0))} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{u_\nu(x_\mu - X_\mu) - u_\mu(x_\nu - X_\nu)}{u \cdot (x - X)} \right]_{\tau=\tau_0}. \quad (5.77)$$

Développer cette expression et exprimer $F_{\mu\nu}$ en fonction de R , u^μ , $\dot{u}^\mu = du^\mu/d\tau$ et $n^\nu = (1, \vec{n})$. On voit que $F_{\mu\nu}$ peut s'écrire comme la somme de deux termes dont l'un ne dépend pas de l'accélération \dot{u}^μ et l'autre en dépend linéairement. Quelle est leur signification physique respective? Comment se comportent-ils lorsque $R \rightarrow +\infty$?

Vérifier que $\tilde{F}_{\mu\nu}n^\nu = 0$. En déduire que $\vec{B} = \vec{n} \times \vec{E}$.

3. Puissance rayonnée :

Calculer explicitement le champ électrique \vec{E} puis le vecteur de Poynting dans un référentiel où la charge est au repos (c'est à dire $\vec{v} = 0$) à l'instant τ_0 . En déduire, par intégration sur la sphère de centre $\vec{X}(\tau_0)$ et de rayon R , la puissance totale $P(\tau_0)$ rayonnée par la charge au temps τ_0 en fonction de son accélération $|d\vec{v}/dt|$.

On peut également vérifier que l'impulsion emportée par le champ rayonné est nulle dans ce référentiel ; nous l'admettons. Calculer l'énergie et l'impulsion rayonnées pendant l'intervalle $d\tau$ dans un référentiel où la particule a la vitesse \vec{v} . En déduire que la puissance rayonnée $P(\tau)$ est un invariant de Lorentz.

En déduire que l'expression de $P(\tau)$ dans un référentiel quelconque est

$$P(\tau) = -\frac{q^2}{4\pi} \frac{2}{3} \left(\frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} \right).$$

4. Rayonnement synchrotron :

Une particule de charge e , de masse m et d'énergie $E \gg m$ est en mouvement circulaire dans un synchrotron de rayon R . Calculer l'énergie ε_R qu'elle perd en rayonnement à chaque tour.

Application numérique : le collisionneur LEP, mis en service au CERN en 1989, mesure environ 10 km de diamètre et on y accélère des électrons jusqu'à 50 GeV. Calculer ε_R avec ces valeurs. C'est le coût de l'énergie qu'il faut fournir aux électrons à chaque tour, pour compenser les pertes par rayonnement, qui limite la valeur de l'énergie E . Le coût de la construction de l'accélérateur étant par ailleurs proportionnel à son rayon R , comment doit varier R avec E pour minimiser le coût global?

On projette actuellement d'utiliser le tunnel du LEP pour accélérer des protons jusqu'à 7 TeV (projet LHC). Que vaut alors ε_R ? Quel est ici le facteur qui limite l'énergie?

5.6.8 Effet Compton scalaire

Le but de ce problème est le calcul de la section efficace de collision élastique d'un photon avec une particule chargée de spin nul. Il s'agit d'un processus faisant intervenir deux particules distinctes, qui ne peut être traité rigoureusement que dans le cadre de la théorie quantique des champs. Cependant, la mécanique quantique relativiste permet de calculer correctement ce processus à l'ordre dominant en e , moyennant quelques hypothèses naturelles.

Pour ce calcul, nous aurons besoin du second ordre de la théorie des perturbations. Ce sera notre première application de la théorie du propagateur à un problème concret.

Première partie : absorption et émission d'un photon

1. Rappeler l'expression du champ $A^\mu(x)$ d'un photon d'impulsion k^μ et de polarisation ϵ^μ .

2. Calculer au premier ordre de la théorie des perturbations l'amplitude de diffusion dans ce champ d'une particule de Klein-Gordon de masse m , de charge e et d'impulsion initiale p_i^μ (on utilisera les résultats du cours sur l'équation de Klein-Gordon). Quelles sont les deux valeurs possibles de l'impulsion finale p_f^μ ? Interpréter physiquement les processus correspondants.

3. Montrer que la condition $p_f^\mu p_{f\mu} = m^2$ permet d'exclure ces deux processus. Expliquer physiquement pourquoi.

Deuxième partie : amplitude de la diffusion Compton

1. On rappelle que l'équation de Klein–Gordon en présence d'un champ électromagnétique s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}(\square + m^2)\phi(x) &= -(W_1(x) + W_2(x))\phi(x) \\ W_1(x) &= ie(\partial_\mu A^\mu(x) + A^\mu(x)\partial_\mu) \\ W_2(x) &= -e^2 A^\mu(x)A_\mu(x).\end{aligned}\tag{5.78}$$

On notera que $W_1(x)$ est un opérateur, et que la dérivation ∂_μ s'applique à tout ce qui est à sa droite, y compris la fonction sur laquelle agit $W_1(x)$. Vérifier que si $A^\mu(x)$ s'annule à l'infini, alors

$$\int e^{ip_1 \cdot x} W_1(x) e^{-ip_2 \cdot x} d^4x = e(p_1^\mu + p_2^\mu) \int e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} A_\mu(x) d^4x.\tag{5.79}$$

Dans la suite du problème, nous utiliserons ce résultat même si $A^\mu(x)$ ne s'annule pas à l'infini.

2. Dans la diffusion Compton, la particule chargée absorbe un photon d'impulsion k^μ et en émet un d'impulsion k'^μ . D'après la première partie, c'est un champ électromagnétique de fréquence positive (négative) qui va provoquer l'absorption (l'émission). On va donc étudier le mouvement de la particule chargée dans un champ électromagnétique de la forme

$$A^\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2k^0V}} \epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} + \frac{1}{\sqrt{2k'^0V}} \epsilon'^{\mu*} e^{ik' \cdot x}.\tag{5.80}$$

On notera que ce champ n'est pas réel. On pourrait ajouter le complexe conjugué pour le rendre réel, mais les termes supplémentaires ne contribueraient pas au processus étudié, et ne feraient qu'obscurcir les calculs. Dans les premières questions, nous ferons le calcul pour des valeurs arbitraires de k^μ , k'^μ , ϵ^μ , ϵ'^μ . Nous nous limiterons au cas particulier des photons seulement à partir de la question 5.

Nous allons calculer l'amplitude de probabilité pour que la particule ressorte dans un état d'impulsion $p_f = p_i + k - k'$, à l'ordre 2 dans le champ A^μ . Nous écrirons cette amplitude sous la forme

$$\mathcal{A}_{fi} = \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_i}V}} \frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_f}V}} \frac{1}{\sqrt{2k^0V}} \frac{1}{\sqrt{2k'^0V}} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k) i \tau_{fi}\tag{5.81}$$

où τ_{fi} est dite *amplitude réduite*.

Le terme W_2 étant lui-même d'ordre 2 en A^μ , il suffit de le traiter au moyen de la théorie des perturbations au premier ordre. Montrer que sa contribution à τ_{fi} est

$$(\tau_{fi})_2 = 2e^2 \epsilon \cdot \epsilon'^*\tag{5.82}$$

et dessiner le diagramme de Feynman correspondant.

3. Il reste à traiter le terme W_1 au moyen de la théorie des perturbations au deuxième ordre. Ecrire l'amplitude de transition correspondante. On introduira la transformée de Fourier du propagateur :

$$G(x - x') = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq \cdot (x - x')} \tilde{G}(q)\tag{5.83}$$

et on utilisera l'équation (5.79). Montrer que la contribution à l'amplitude de transition réduite s'écrit

$$(\tau_{fi})_1 = -e^2 \left(\frac{\epsilon \cdot (2p_i + k) \epsilon'^* \cdot (2p_f + k')}{(p_i + k)^2 - m^2} + \frac{\epsilon \cdot (2p_f - k) \epsilon'^* \cdot (2p_i - k')}{(p_f - k)^2 - m^2} \right).\tag{5.84}$$

Dessiner les diagrammes de Feynman correspondants.

4. On effectue une transformation de jauge sur le vecteur de polarisation ϵ^μ . Vérifier que l'amplitude de transition réduite, somme des deux contributions (5.82) et (5.84), est invariante par cette transformation. On notera que les trois termes de l'amplitude ne sont pas *séparément* invariants de jauge. Un diagramme de Feynman isolé n'a donc pas de signification physique.

5. A quelles conditions sur k^μ , ϵ^μ , k'^μ , ϵ'^μ chacun des deux termes de l'équation (5.80) correspond-il au champ d'un photon? Simplifier alors l'expression de l'amplitude de transition réduite τ_{fi} . De même que dans la première partie de ce problème, on interprétera la contribution du premier terme de $A^\mu(x)$ comme l'absorption d'un photon, et celle du deuxième terme comme l'émission d'un photon. L'amplitude calculée est donc celle de la diffusion élastique d'un photon, c'est à dire de l'effet Compton.

6. Expliquer pourquoi le choix du propagateur (retardé ou avancé, par exemple) n'a aucune importance pour ce processus.

Troisième partie : section efficace

1. On se place dans le référentiel de repos de la particule chargée avant la collision, soit $\vec{p}_i = \vec{0}$. On note θ l'angle du photon diffusé avec la direction incidente. Calculer l'impulsion $|\vec{k}'|$ du photon diffusé en fonction de $|\vec{k}|$, θ et m .

2. On choisit la jauge de Coulomb. Comment se simplifie alors l'amplitude de transition ?

3. Nous allons maintenant calculer la section efficace, en suivant une démarche similaire à celle du cours pour la diffusion Rutherford. La différence est qu'il y a maintenant deux particules dans l'état final, et non plus une seule. On commence donc par calculer la probabilité de transition, c'est à dire $|\mathcal{A}_{fi}|^2$ où \mathcal{A}_{fi} est donné par l'équation (5.81). Le problème vient de la distribution de Dirac $(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)$, qu'on ne peut élever au carré. Mais cette distribution vient du fait que nous avons intégré $e^{i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x}$ sur tout l'espace-temps. Si on intègre sur un volume fini V et un temps fini T , alors on peut calculer le carré. Expliquer pourquoi on peut écrire

$$[(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)]^2 = VT(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k). \quad (5.85)$$

4. Quel est le nombre d'états quantiques pour le système (particule chargée+photon) dans l'élément d'espace des impulsions $d^3\vec{p}_f d^3\vec{k}'$? En déduire la probabilité de transition par unité de temps vers cet élément d'espace des impulsions.

5. En divisant par le flux incident de photons dans le référentiel choisi, vérifier que la section efficace différentielle est donnée par

$$d\sigma = \frac{1}{4m|\vec{k}|} \frac{d^3\vec{k}'}{(2\pi)^3 2|\vec{k}'|} \frac{d^3\vec{p}_f}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_f}} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - k - p_i) |\tau_{fi}|^2 \quad (5.86)$$

6. Il y a six variables d'intégration mais quatre contraintes provenant de la conservation de l'énergie et de l'impulsion, soit au total deux vrais degrés de liberté, qui correspondent physiquement à la direction, ou l'angle solide, du photon diffusé (de même que pour la diffusion Rutherford). Pour faire apparaître ces vrais degrés de liberté, il faut intégrer sur les "faux" degrés de liberté, qui sont \vec{p}_f et $|\vec{k}'|$. Commencer par intégrer l'expression précédente sur \vec{p}_f . Alors, \vec{p}_f et $E_{\vec{p}_f}$ deviennent des fonctions de \vec{k}' (l'impulsion incidente \vec{k} étant fixée une fois pour toutes). On vérifiera notamment que pour une direction fixée de \vec{k}' ,

$$\frac{dE_{\vec{p}_f}}{d|\vec{k}'|} = -\frac{\vec{k}' \cdot \vec{p}_f}{|\vec{k}'| E_{\vec{p}_f}} \quad (5.87)$$

et on en déduira que

$$\frac{d(|\vec{k}'| + E_{\vec{p}_f})}{d|\vec{k}'|} = \frac{|\vec{k}'| m}{|\vec{k}'| E_{\vec{p}_f}}. \quad (5.88)$$

Décomposer ensuite $d^3\vec{k}' = |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega$ et intégrer sur $|\vec{k}'|$. Montrer que

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2} \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 |\vec{\epsilon}'^* \cdot \vec{\epsilon}|^2. \quad (5.89)$$

où $|\vec{k}'|$ a la valeur obtenue à la question 1 de cette troisième partie.

7. Comment se simplifie cette expression dans la limite où $|\vec{k}| \ll m$? On retrouve alors la section efficace de l'effet Thomson. Calculer la section efficace non polarisée dans cette limite puis, par intégration, la section efficace totale. Exprimer le résultat dans le système d'unités international. On vérifiera qu'il ne dépend pas de \hbar . Calculer numériquement la section efficace.

Chapitre 6

Théorie classique des champs

On appelle de façon générale “champ” une quantité réelle ou complexe dépendant des coordonnées d’espace-temps, ou un ensemble de telles quantités : les champs électrique et magnétique, le champ de vitesse d’un fluide en sont des exemples bien connus en physique classique.

En mécanique du point, les variables dynamiques (position et vitesse) dépendent seulement du temps. En théorie des champs, elles dépendent également des coordonnées d’espace. En particulier, la dynamique d’un champ classique est en général décrite par une équation aux dérivées partielles (équations de Maxwell par exemple), où interviennent des dérivées spatiales.

Dans la section 6.1, nous allons montrer comment on peut généraliser la mécanique lagrangienne aux champs classiques. C’est une étape indispensable pour quantifier les champs, car toutes les procédures de quantification sont basées sur le formalisme lagrangien : la quantification dite “canonique”, que nous adopterons dans les chapitres suivants, est basée sur le hamiltonien déduit du lagrangien, tandis que la quantification par l’intégrale fonctionnelle se base directement sur le lagrangien.

De plus, le formalisme lagrangien permet d’étudier de façon élégante et systématique les symétries continues d’un système (invariance par translation, par rotation...) : le *théorème de Noether*, que nous démontrons dans la section 6.2, permet d’associer à toute symétrie continue une quantité conservée. Ceci permet notamment de définir sans ambiguïté l’énergie, l’impulsion et le moment cinétique d’un système.

6.1 Principe variationnel : équations d’Euler–Lagrange

L’évolution temporelle d’un champ est en général décrite par une équation aux dérivées partielles. La plupart des équations non dissipatives (équation d’onde, équations de Maxwell) peuvent être déduites d’un principe variationnel, de même que les relations de Snell–Descartes décrivant la propagation d’un rayon lumineux peuvent être déduites du principe de Fermat. Nous commençons par quelques rappels sur le calcul variationnel, dans la section 6.1.1, puis nous étendrons les résultats obtenus aux champs, dans la section 6.1.2.

6.1.1 Rappels sur la mécanique lagrangienne

Soit une fonction à valeurs réelles de trois variables réelles $L(x, \dot{x}, t)$, dite *lagrangien*. Par exemple, le mouvement d’une particule de masse m dans un potentiel $U(x)$ est décrit par le lagrangien :

$$L(x, \dot{x}, t) = m\dot{x}^2/2 - U(x) \tag{6.1}$$

(dans cet exemple particulier, L est indépendant de t). On considère l’ensemble des fonctions $x(t)$ dérivables sur l’intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$, telles que $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$, x_0 et x_1 étant des réels fixés. A chaque fonction $x(t)$ de cet ensemble, on associe l’*action* définie par

$$S\{x\} \equiv \int_{t_0}^{t_1} L\left(x(t), \frac{dx(t)}{dt}, t\right) dt. \tag{6.2}$$

L’action S est donc une fonction de la fonction $x(t)$. C’est ce qu’on appelle une *fonctionnelle*.

On cherche à quelles conditions sur la fonction $x(t)$ l’action atteint un minimum, ou un maximum, ou plus généralement à quelles conditions elle est stationnaire. Un tel problème, où il faut dériver par rapport à une infinité de variables (les valeurs de $x(t)$ pour chaque valeur de t), est dit *problème variationnel*, et les techniques permettant de le résoudre constituent le *calcul variationnel*. Dans ce problème, x est la

variable dynamique, et le calcul variationnel déterminera l'équation différentielle à laquelle elle est soumise, en fonction du paramètre t .

Notons que dans l'expression de l'action, (6.2), le lagrangien dépend de t à travers les variables x et \dot{x} , qui dépendent elles-mêmes du temps. On distinguera soigneusement cette dépendance *implicite* de la dépendance *explicite* qui peut intervenir si, par exemple, U est une fonction de x et du temps t dans l'équation (6.2). On notera en général $\partial/\partial t$ les dérivées à x et \dot{x} fixés, qui ne concernent que la dépendance explicite, et d/dt les dérivées calculées le long d'une trajectoire $x(t)$ donnée.

Equation d'Euler-Lagrange

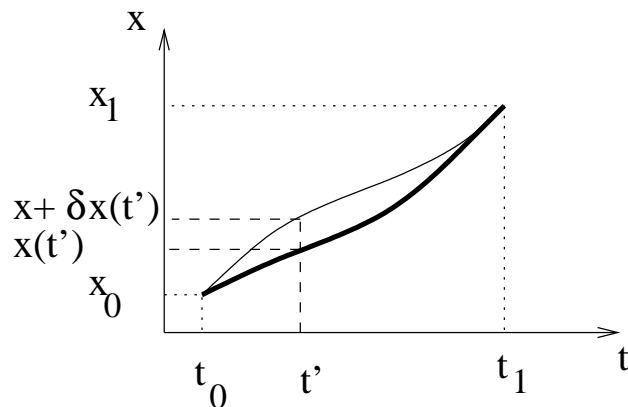


FIG. 6.1 – Deux trajectoires classiques voisines, dont les extrémités sont fixées : $x(t)$ (trait épais) et $x(t) + \delta x(t)$ (trait fin)

La condition que l'action soit stationnaire autour d'une trajectoire $x(t)$ signifie que si on considère une trajectoire voisine $x(t) + \delta x(t)$ (voir Figure 6.1), la variation de S doit être nulle au premier ordre en $\delta x(t)$. Ecrivons donc cette variation. Un développement limité au premier ordre permet d'écrire

$$S\{x + \delta x\} - S\{x\} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{d}{dt} \delta x(t) \right) dt. \quad (6.3)$$

Pour que l'action soit stationnaire, il faut que le second membre s'annule quelle que soit la fonction $\delta x(t)$. Le problème avec l'expression précédente, c'est que δx et sa dérivée par rapport au temps apparaissent toutes deux et ne sont pas indépendantes. Pour se débarrasser de la dérivée, on intègre par parties. C'est là le "truc" important dans tout calcul variationnel. On obtient ainsi

$$S\{x + \delta x\} - S\{x\} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (6.4)$$

On définit parfois la *dérivée fonctionnelle* de L par rapport à $x(t)$ par

$$\frac{\delta L}{\delta x} \equiv \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (6.5)$$

Dans le cas particulier d'une variation δx qui n'est non nulle que dans un petit voisinage autour d'une valeur de t donnée de l'intervalle $]t_0, t_1[$, la variation de S (6.4) est proportionnelle à $\delta L/\delta x$ au point t considéré, d'où l'intérêt de la définition (6.5).

Dans ce calcul variationnel, nous considérons des trajectoires dont les extrémités sont fixées (voir Fig.6.1), c'est à dire que $\delta x(t)$ s'annule en $t = t_0$ et en $t = t_1$. Par conséquent, le dernier terme de (6.4) s'annule. La condition que l'action soit stationnaire s'écrit donc finalement

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt = 0 \quad (6.6)$$

et ce, quelle que soit la fonction $\delta x(t)$ s'annulant aux extrémités de la trajectoire. Comme les valeurs de δx en deux points différents sont indépendantes, l'équation précédente implique que le terme en facteur de $\delta x(t)$ s'annule pour tout t de l'intervalle $]t_0, t_1[$, soit

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (6.7)$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange. Avec le lagrangien (6.1), on a par exemple $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$, $\partial L/\partial x = -\partial U/\partial x$, et l'équation (6.7) donne

$$m\ddot{x} = -\partial U/\partial x \quad (6.8)$$

où l'on reconnaît le principe fondamental de la dynamique.

Quand on écrit les équations d'Euler-Lagrange, il ne faut pas oublier que le second terme de l'équation (6.7) est donc la dérivée par rapport au temps d'une composée de fonctions : $\partial L/\partial \dot{x}$ dépend de x et \dot{x} qui dépendent eux-mêmes du temps, comme on l'a déjà signalé. Il apparaît ainsi un terme linéaire en \ddot{x} , c'est à dire que l'équation d'Euler-Lagrange est une équation différentielle du second ordre en t (si ce terme ne s'annule pas). On sait qu'il y a deux paramètres libres pour une telle équation. Or on a fixé deux conditions aux limites, la valeur de $x(t)$ aux extrémités. Il y a donc souvent une et une seule solution.

Le calcul variationnel peut être facilement généralisé à un lagrangien dépendant des dérivées de x d'ordre supérieur, \ddot{x} , etc.

Cas de plusieurs variables dynamiques

Le calcul ci-dessus se généralise immédiatement à un problème à plusieurs variables dynamiques $x_a(t)$, où a est un indice prenant un nombre N arbitraire de valeurs. Le lagrangien L , lui, reste unique. C'est cette fois une fonction arbitraire de $2N + 1$ variables, qu'on notera $L(x_a, \dot{x}_a, t)$. En écrivant que l'action doit être stationnaire pour une variation quelconque de l'un des x_a , on obtient un système de N équations différentielles du second ordre :

$$\frac{\partial L}{\partial x_a} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} = 0. \quad (6.9)$$

Ces équations sont en général couplées. Elles sont découplées seulement si le lagrangien s'écrit comme une somme de termes ne dépendant chacun que d'une seule des variables x_a .

Invariance par changement de variables ; exemples

Si l'on effectue un changement de variables, c'est à dire qu'on remplace les x_a par des y_a , pouvant être des fonctions quelconques des x_a , les équations d'Euler-Lagrange (6.7) restent valables si on remplace x_a par y_a . C'est là que réside l'intérêt essentiel de la formulation lagrangienne de la mécanique classique, par rapport à la formulation newtonienne. Ce résultat peut se démontrer algébriquement en effectuant le changement de variables dans l'équation (6.9), ce qui est d'ailleurs la démonstration qu'en donne Lagrange lui-même (il est conseillé de le faire à titre d'exercice pour le cas d'une seule variable, après un changement de variable $y(x)$ arbitraire). Mais cette démonstration en cache l'essence, qui vient du principe variationnel : si l'action est stationnaire par rapport à un jeu de variables, alors elle le restera après changement de variables, pourvu que celui-ci soit (au moins localement) inversible, c'est à dire que son jacobien ne s'annule pas.

Prenons un exemple, l'oscillateur harmonique à deux dimensions, dont le lagrangien s'écrit

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2). \quad (6.10)$$

C'est la somme de deux lagrangiens indépendants décrivant les mouvements selon x et y , chacun du type (6.1) avec $U(x) = m\omega^2 x^2/2$, et les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent $\ddot{x} + \omega^2 x = \ddot{y} + \omega^2 y = 0$.

Nous allons effectuer deux changements de variables. Premier changement, nous choisissons des coordonnées cylindriques (r, θ) . On a alors $x^2 + y^2 = r^2$ et la vitesse s'écrit $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$. Le lagrangien (6.10) s'écrit donc, dans ces nouvelles coordonnées

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (6.11)$$

On note que le lagrangien est indépendant de θ , ce qui traduit le fait qu'il est invariant par rotation autour de l'origine. Les dérivées partielles valent

$$\begin{aligned} \partial L/\partial r &= m\dot{\theta}^2 - m\omega^2 r \\ \partial L/\partial \dot{r} &= m\dot{r} \\ \partial L/\partial \theta &= 0 \\ \partial L/\partial \dot{\theta} &= mr^2\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

et les équations (6.9) s'écrivent alors

$$m\ddot{r} = m\dot{\theta}^2 - m\omega^2 r$$

$$m \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) = 0. \quad (6.13)$$

On obtient donc immédiatement les équations du mouvement, sans avoir eu besoin de calculer l'accélération en coordonnées cylindriques. De plus, l'équation du mouvement en θ est obtenue automatiquement sous une forme qui fait apparaître la constante des aires (il s'agit en effet d'une force centrale, dirigée vers l'origine). Ce lien entre symétrie (ici de rotation) et constante du mouvement est inhérent à la mécanique lagrangienne. Son étude est l'objet de la section 6.2.

Deuxième changement de variables, nous pouvons choisir au lieu de x et y les variables z et z^* définies par

$$\begin{aligned} z &= \frac{x + iy}{\sqrt{2}} \\ z^* &= \frac{x - iy}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (6.14)$$

A strictement parler, ceci ne veut rien dire, puisque z et z^* ne sont évidemment pas des variables indépendantes, et que de plus elles sont complexes et non plus réelles. Mais on peut néanmoins les traiter comme des variables indépendantes formellement, dans les opérations de différentiation des équations d'Euler-Lagrange (6.9). Le lagrangien s'écrit, avec ces nouvelles variables,

$$L(z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*) = m \dot{z} \dot{z}^* - m \omega^2 z z^*. \quad (6.15)$$

L'équation d'Euler-Lagrange pour z^* donne alors

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0, \quad (6.16)$$

comme prévu, tandis que l'équation pour z donne l'équation complexe conjuguée. Ce choix de variables nous sera utile dans le chapitre 7.

Remarque : non-unicité du lagrangien

Etant donné un lagrangien $L(x, \dot{x}, t)$, et une fonction $\Lambda(x, t)$ quelconque, définissons un nouveau lagrangien par

$$\begin{aligned} L'(x, \dot{x}, t) &\equiv L(x, \dot{x}, t) + \dot{x} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ &= L(x, \dot{x}, t) + \frac{d}{dt} \Lambda(x(t), t) \end{aligned} \quad (6.17)$$

où, dans la deuxième équation, nous avons fait apparaître une dérivée par rapport au temps le long de la trajectoire $x(t)$. La nouvelle action S' vaut donc

$$S' = S + [\Lambda(x(t), t)]_{t_0}^{t_1}, \quad (6.18)$$

Elle ne diffère de l'ancienne que par un terme de bord. Si on fixe les valeurs de x aux extrémités, S' et S ne diffèrent donc que par une constante, et si S est stationnaire, S' le sera également. Les équations du mouvement déduites de L' sont donc les mêmes que celles déduites de L , ce qui se retrouve directement en utilisant les équations d'Euler-Lagrange.

Ceci resterait d'ailleurs vrai si Λ dépendait non seulement de x et t , mais aussi de \dot{x} . Dans ce cas, l'expression de $d\Lambda/dt$ ferait apparaître la dérivée seconde \ddot{x} , et le nouveau lagrangien $L' = L + d\Lambda/dt$ dépendrait aussi de \ddot{x} , mais sans conséquence sur les équations du mouvement.

6.1.2 Généralisation à plusieurs paramètres

Position du problème

Le problème précédent consistait à minimiser par rapport à une ou plusieurs fonctions inconnues $x_a(t)$, qui étaient toujours des fonctions d'un seul paramètre t . Ceci permet par exemple de décrire le mouvement d'un ensemble de points matériels, ou d'oscillateurs couplés.

Considérons à présent un problème plus complexe, celui des vibrations longitudinales d'un élastique. La seule différence avec le cas précédent, c'est que l'élastique est composé d'un grand nombre d'éléments de longueur, chacun décrit par une variable dynamique $x_a(t)$. Il est plus élégant ici d'introduire une abscisse curviligne s continue repérant les points matériels de l'élastique au repos, par exemple en mesurant la distance

à une extrémité lorsque l'élastique est au repos. Lorsque l'élastique est mis en vibration, l'abscisse d'un point matériel repéré par la coordonnée s sera alors une fonction de deux paramètres $x(s, t)$, qui est la variable dynamique de ce problème. Il reste à trouver une formulation lagrangienne adaptée à cette écriture.

De même, le champ électromagnétique est une fonction non plus de deux, mais de quatre coordonnées d'espace-temps. Nous allons donc généraliser le calcul précédent en remplaçant le paramètre t par un nombre arbitraire D de paramètres x^μ , avec $\mu = 0, \dots, D-1$. Dans les exemples ci-dessous, x^0 désignera le temps t .

Nous emploierons dans tout ce chapitre une notation covariante, en écrivant les paramètres sous la forme x^μ et les dérivées partielles d'un champ φ sous la forme $\partial_\mu \varphi$. Cependant, cette notation n'est pas du tout indispensable ici, car le contenu de ce chapitre n'a rien à voir avec la relativité : le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ n'interviendra nulle part dans les expressions.

Equations d'Euler–Lagrange

Comme dans la section 6.1.1, nous considérerons d'abord, pour simplifier les écritures, le cas où il n'y a qu'une seule variable dynamique (un seul "champ") que nous noterons φ et non plus x . $x(t)$ est donc remplacé par $\varphi(x^0, \dots, x^{D-1})$.

Le lagrangien (dit souvent "densité de lagrangien") est cette fois une fonction de $2D + 1$ variables, $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu)$. On considérera, pour des raisons pratiques, qu'il peut dépendre des dérivées de φ par rapport à n'importe quel paramètre. Dans le cas des vibrations longitudinales d'un élastique, par exemple (où $D = 2$) l'énergie cinétique fait intervenir une dérivée temporelle, tandis que l'énergie potentielle élastique fait intervenir la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne.

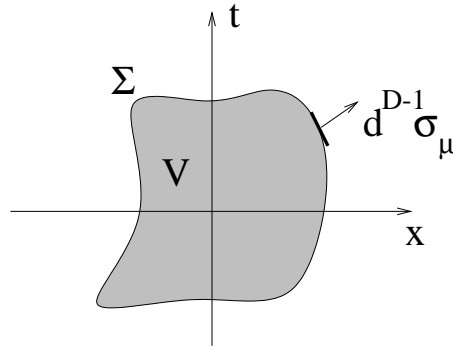


FIG. 6.2 – Lorsqu'il y a plusieurs paramètres (ici $D = 2$), l'action est l'intégrale du lagrangien sur un volume quelconque V de l'espace des paramètres. Son bord Σ est de dimension $D - 1$ (ici une courbe).

L'action est l'intégrale du lagrangien sur un volume V de l'espace des paramètres, de dimension D :

$$S\{\varphi\} = \int_V \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x^\mu) d^D x \quad (6.19)$$

le domaine d'intégration V a pour bord une variété de dimension $D - 1$ (une hypersurface) que nous noterons Σ (voir Fig.6.2). De même qu'on avait fixé les extrémités de la trajectoire, c'est à dire les valeurs de $x(t_0)$ et de $x(t_1)$, on va ici fixer les valeurs de φ sur le bord Σ . Comme auparavant, on va chercher à quelle condition sur φ l'action S est stationnaire, moyennant ces conditions aux limites. On effectue donc une variation arbitraire du champ $\delta\varphi$ autour d'un champ φ donné, et on calcule la variation correspondante de S au premier ordre en $\delta\varphi$. Par analogie avec l'équation (6.3), nous écrivons

$$S\{\varphi + \delta\varphi\} - S\{\varphi\} = \int_V \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta\varphi) \right) d^D x, \quad (6.20)$$

où la sommation sur l'indice répété μ est sous-entendue dans le second terme. L'étape suivante est l'intégration par parties du second terme : on écrit pour cela

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \partial_\mu (\delta\varphi) = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) \delta\varphi. \quad (6.21)$$

Le premier terme est une dérivée. Par intégration sur le volume V , il se réduit donc à un terme de bord. Rappelons en effet que pour une fonction $f(x)$ arbitraire

$$\int_V \partial_\mu f(x) d^D x = \oint_\Sigma f(x) d^{D-1} \sigma_\mu \quad (6.22)$$

où $d^{D-1}\sigma_\mu$ désigne l'élément d'hypersurface normal à Σ orienté vers l'extérieur (voir Fig.6.2). On obtient ainsi une expression analogue à (6.4) :

$$S\{\varphi + \delta\varphi\} - S\{\varphi\} = \int_V \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \delta\varphi d^D x + \oint_\Sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi d^{D-1}\sigma_\mu. \quad (6.23)$$

Comme dans le cas précédent, le terme de bord s'annule puisqu'on impose que $\delta\varphi$ s'annule sur Σ . La variation de S au premier ordre devant être nulle quel que soit $\delta\varphi$, on en déduit l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} = 0. \quad (6.24)$$

Dans le deuxième terme de cette équation, $\partial\mathcal{L}/\partial(\partial_\mu\varphi)$ est une fonction de φ et des $\partial_\mu\varphi$ qui eux-mêmes dépendent du point x^μ où l'on se trouve. En prenant sa dérivée par rapport à x^μ , on dérive donc une composée de fonctions. Il apparaît des termes linéaires dans les dérivées partielles du second ordre $\partial_\mu\partial_\nu\varphi$. L'équation d'Euler-Lagrange est donc en général une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Extension à un nombre arbitraire de champs

Le calcul fait ci-dessus se généralise immédiatement à un nombre arbitraire de champs $\varphi_a(x)$, avec $a = 1, \dots, N$. Le lagrangien est une fonction arbitraire des champs φ_a , de leurs dérivées partielles du premier ordre, et des paramètres x^μ , soit une fonction de $N + ND + D$ variables. Les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_a)} = 0, \quad a = 1, \dots, N \quad (6.25)$$

forment un système de N équations aux dérivées partielles, à N fonctions inconnues. On retiendra ces équations, qui seront utilisées fréquemment par la suite. Dans le cas particulier où le lagrangien est une somme des termes dont chacun dépend d'un seul champ φ_a , on obtient des équations indépendantes pour chacun des φ_a . Mais dans le cas général, ces équations sont couplées.

Non-unicité du lagrangien

Nous avons noté que dans le cas de la mécanique classique, on pouvait ajouter au lagrangien la dérivée de n'importe quelle fonction par rapport au temps sans changer les équations du mouvement. Ceci se généralise aisément. Etant donné $\mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x^\mu)$ et une fonction vectorielle quelconque $\Lambda^\mu(\varphi_a, x^\mu)$, on peut définir un nouveau lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x^\mu) &\equiv \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x^\mu) + (\partial_\mu\varphi_a) \frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial\varphi_a} + \frac{\partial\Lambda^\mu}{\partial x^\mu} \\ &= \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu\varphi_a, x^\mu) + \partial_\mu\Lambda^\mu(\varphi_a(x), x^\mu) \end{aligned} \quad (6.26)$$

où, dans la deuxième équation, on prend en compte le fait que φ_a dépend de x pour calculer la dérivée. La nouvelle action ne diffère de l'ancienne que par un terme de surface :

$$\begin{aligned} S' &= S + \int_V \partial_\mu\Lambda^\mu d^D x \\ &= S + \oint_\Sigma \Lambda^\mu d^{D-1}\sigma_\mu \end{aligned} \quad (6.27)$$

et les équations du mouvement ne sont pas modifiées. Λ^μ pourrait plus généralement dépendre des dérivées des champs $\partial_\mu\varphi_a$, sans modifier le résultat (voir l'exercice 6.3.4).

6.1.3 Exemple : équation d'onde à une dimension

Commençons par un exemple à deux paramètres, c'est à dire où $D = 2$: la propagation d'une onde à la vitesse c suivant un axe x , décrite par une amplitude $s(t, x)$. L'équation d'onde peut être déduite du lagrangien

$$\mathcal{L}(s, \partial_t s, \partial_x s, t, x) = \frac{1}{2c^2}(\partial_t s)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x s)^2. \quad (6.28)$$

Le facteur $1/2$ est purement conventionnel : l'équation d'Euler-Lagrange (6.24) étant linéaire en \mathcal{L} , on ne change pas l'équation du mouvement en multipliant \mathcal{L} par une constante. Remarquons que ce lagrangien est

indépendant de s , t et x : nous y reviendrons dans la section 6.2.4. Les équations d'Euler-Lagrange (6.24) s'écrivent

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} - \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s)} - \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x s)} = 0. \quad (6.29)$$

Le premier terme s'annule car le lagrangien ne dépend pas de s . On a par ailleurs, d'après (6.28),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s)} &= \frac{1}{c^2} \partial_t s \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x s)} &= -\partial_x s \end{aligned} \quad (6.30)$$

et l'équation (6.29) devient

$$-\frac{1}{c^2} \partial_t^2 s + \partial_x^2 s = 0, \quad (6.31)$$

où l'on reconnaît bien l'équation d'onde à une dimension. D'autres exemples importants sont étudiés dans les exercices 6.3.2 et 6.3.3.

6.2 Symétries et lois de conservation

Le formalisme lagrangien est particulièrement bien adapté à l'étude des symétries d'un système. En effet, si l'action est inchangée dans une certaine transformation (variation des champs, translation dans l'espace et dans le temps, transformation de Lorentz, etc.), alors ses extremums seront naturellement inchangés : les équations du mouvement des champs vérifieront donc automatiquement les symétries de l'action.

De plus, nous allons montrer qu'à toute symétrie continue de l'action est associée une quantité conservée, en commençant comme dans la section précédente par le cas, plus simple, d'un seul paramètre.

6.2.1 Théorème de Noether en mécanique classique

Variation de la variable dynamique x

Considérons une fonction $x(t)$ vérifiant l'équation d'Euler-Lagrange (6.7), et une variation infinitésimale δx de cette variable dynamique, pouvant dépendre de x et de t , dont nous n'imposons plus qu'elle soit nulle aux extrémités. Cette variation est représentée sur la figure 6.3. La variation de l'action dans cette

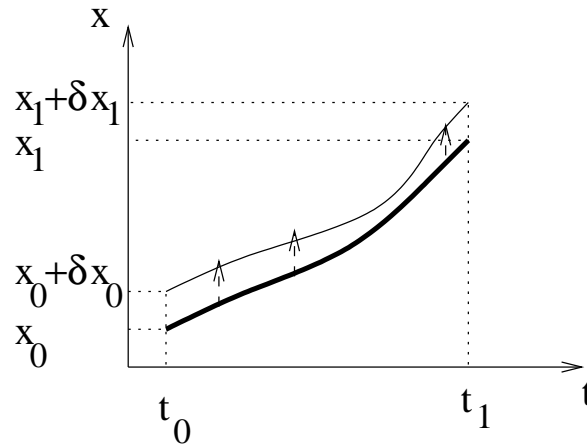


FIG. 6.3 – Changement de variable infinitésimal $x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$, effectué pour une valeur donnée de t .

transformation infinitésimale est donnée par l'équation (6.4). Puisque $x(t)$ est par hypothèse solution de l'équation (6.7), seul le terme de bord reste :

$$S\{x + \delta x\} - S\{x\} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x(t) \right]_{t_0}^{t_1}. \quad (6.32)$$

Si la transformation $x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$ laisse l'action inchangée, alors le membre de gauche s'annule, et le terme entre crochets a la même valeur en t_0 et t_1 . Si ceci est vrai pour toute valeur de t_1 , alors la quantité

entre crochets est indépendante de t : c'est une constante du mouvement, qu'on notera Q :

$$Q \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta x. \quad (6.33)$$

Prenons un exemple élémentaire, celui d'un point matériel libre, dont le lagrangien s'écrit $L(x, \dot{x}, t) = m\dot{x}^2/2$. Du fait que L est indépendante de x , l'action est invariante par une translation infinitésimale $x(t) \rightarrow x(t) + \delta$ avec δ indépendante du temps. Dans ce cas particulier, on obtient que $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ est une constante du mouvement. Dans la suite, on utilisera la notation

$$p \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, \quad (6.34)$$

qui est par définition l'impulsion canonique associée à x . Elle correspond à la quantité de mouvement pour une particule dans un potentiel.

Cas de plusieurs variables dynamiques ; exemple

Le résultat précédent se généralise immédiatement au cas de N variables dynamiques $x_a(t)$, subissant une transformation infinitésimale $x_a(t) \rightarrow x_a(t) + \delta x_a(t)$. δx_a peut être une fonction quelconque de tous les x_a et de t . Si l'action est invariante dans cette transformation, la quantité conservée associée, dite charge de Noether, est

$$Q \equiv \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \delta x_a = \sum_{a=1}^N p_a \delta x_a. \quad (6.35)$$

A titre d'illustration, reprenons l'exemple d'un point matériel en mouvement dans un plan (x, y) sous l'action d'une énergie potentielle ne dépendant que de $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$, c'est à dire d'une force centrale conservative :

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - U\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right). \quad (6.36)$$

Le lagrangien est invariant par rotation autour de l'origine. Pour appliquer le théorème de Noether, on commence par écrire la variation des variables dynamiques x et y dans une rotation infinitésimale, d'angle $\epsilon \ll 1$ dans le plan s'écrit

$$\begin{aligned} \delta x &= -\epsilon y \\ \delta y &= \epsilon x. \end{aligned} \quad (6.37)$$

La constante du mouvement donnée par l'équation (6.35) s'écrit dans ce cas

$$Q = m\epsilon(-\dot{x}y + \dot{y}x). \quad (6.38)$$

Le théorème de Noether nous dit que cette quantité est conservée. Le paramètre ϵ étant constant et arbitraire, on aura toujours une quantité conservée en divisant par ϵ . On reconnaît alors l'expression du moment cinétique. On retrouve donc par cette méthode la conservation du moment cinétique dans un mouvement à force centrale. Notons que, de même que les équations d'Euler-Lagrange, l'expression de la charge de Noether (6.35) est valable quel que soit le système de variables choisi (voir exercice 6.3.1).

Les transformations considérées ici, qui peuvent mélanger entre elles les variables x_a mais laissent le paramètre t inchangé, sont dites *symétries internes*. Notons que pour une symétrie interne, l'invariance de l'action équivaut à l'invariance du lagrangien, puisqu'on ne change pas l'élément d'intégration dt . Ce ne sera plus le cas en général dans le paragraphe suivant, lorsque nous considérerons une transformation affectant également le paramètre t .

Variation du paramètre t

Considérons à présent une classe de transformations plus générales, portant également sur le paramètre t . Celui-ci subit une transformation infinitésimale $t \rightarrow t' \equiv t + \delta t(t)$, où $\delta t(t)$ est une fonction de t arbitraire mais infinitésimale. Après cette transformation, les extrémités de la trajectoire deviennent $t_0 + \delta t(t_0)$ et $t_1 + \delta t(t_1)$. La variable dynamique $x(t)$ subit également une transformation infinitésimale $x(t) \rightarrow x'(t)$. Nous pouvons écrire cette variation sous deux formes. Soit nous comparons les valeurs de x pour la même valeur de t , comme précédemment (figure 6.3). Nous noterons $\bar{\delta}x(t)$ la variation correspondante :

$$\bar{\delta}x(t) \equiv x'(t) - x(t). \quad (6.39)$$

Mais puisqu'on a aussi transformé le paramètre t , il est en fait plus naturel de considérer un autre type de variation, noté $\delta x(t)$:

$$\delta x(t) \equiv x'(t') - x(t). \quad (6.40)$$

Cette variation est représentée sur la figure 6.4. En remplaçant t' par $t + \delta t$ dans la dernière équation, et en développant au premier ordre, on obtient

$$\delta x(t) - \bar{\delta}x(t) = \dot{x}(t)\delta t(t), \quad (6.41)$$

où nous avons, dans le second membre, confondu x et x' puisque nous nous limitons aux variations du premier ordre. Evaluons maintenant la variation de l'action dans cette transformation. Il faut comparer les

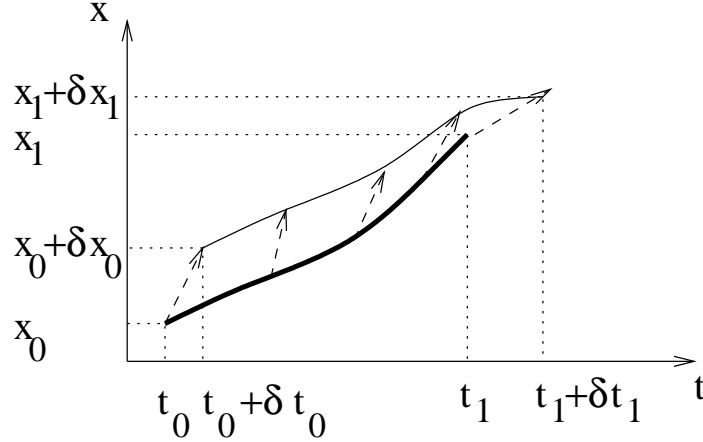


FIG. 6.4 – Transformation infinitésimale portant à la fois sur la variable dynamique x et sur le paramètre t . Celui-ci est changé en $t' = t + \delta t$, où δt est une fonction du temps. De même, $x(t)$ est changé en $x'(t') = x(t) + \delta x(t)$. Les petits vecteurs en pointillés reliant les deux trajectoires ont pour abscisse δt et pour ordonnée δx .

actions des deux trajectoires représentées sur la figure 6.4. Si on considère la variation de x pour t donné, c'est à dire $\bar{\delta}x(t)$, la seule différence par rapport à la figure 6.3 vient des extrémités de la trajectoire : il faut prendre en compte le fait que l'action de la trajectoire modifiée est intégrée de $t_0 + \delta t(t_0)$ à $t_1 + \delta t(t_1)$, et non plus de t_0 à t_1 . Ceci introduit un terme supplémentaire, et l'équation (6.32) devient

$$S\{x + \delta x, t + \delta t\} - S\{x, t\} = [p \bar{\delta}x(t) + L \delta t(t)]_{t_0}^{t_1}. \quad (6.42)$$

Si l'action est inchangée dans la transformation considérée, alors le terme entre crochets est une constante du mouvement, qu'on notera de nouveau Q . En général, on l'exprime en fonction de δx , non de $\bar{\delta}x$. L'équation (6.41) permet d'écrire

$$Q \equiv p \delta x - (p \dot{x} - L) \delta t. \quad (6.43)$$

La généralisation à un nombre N de variables dynamiques x_a est immédiate. On définit le hamiltonien par

$$H \equiv -L + \sum_{a=1}^N p_a \dot{x}_a \quad (6.44)$$

L'expression de la quantité conservée Q est alors

$$Q = -H \delta t + \sum_{a=1}^N p_a \delta x_a. \quad (6.45)$$

C'est la forme la plus générale du théorème de Noether en mécanique classique. En particulier, si le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, c'est à dire si L ne dépend que des x_a et des \dot{x}_a , alors il est inchangé par une translation infinitésimale $t \rightarrow t' = t + \delta$, où δ est indépendant du temps, si on choisit $x'_a(t') = x_a(t)$, c'est à dire si $\delta x_a = 0$ (voir figure 6.5). Comme l'élément d'intégration dt n'est pas modifié par une translation, l'action est également inchangée. Le théorème de Noether montre alors que le hamiltonien H est indépendant du temps : c'est par définition l'énergie mécanique du système.

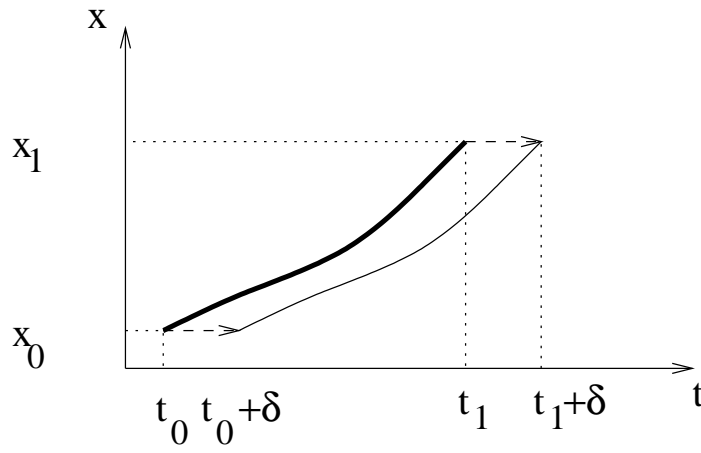


FIG. 6.5 – Translation infinitésimale dans le temps, $t \rightarrow t + \delta$. Dans ce cas, $\delta x(t)$ s’annule, mais pas $\bar{\delta}x(t)$.

6.2.2 Générateur des transformations infinitésimales

Cette section est une parenthèse formelle, sans lien avec la suite de ce chapitre, mais qui nous sera utile dans les chapitres suivants.

Dans le formalisme hamiltonien, ou *canonique*, on dit que la charge de Noether (6.45) est le *générateur* de la transformation infinitésimale correspondante. Ainsi, vous avez sans doute appris dans votre cours de mécanique quantique que l’impulsion est le générateur des translations infinitésimales, et le moment cinétique le générateur des rotations infinitésimales. Plaçons-nous donc dans le cadre de la mécanique quantique. Les résultats qui suivent se transposent à la mécanique classique en remplaçant les commutateurs par des crochets de Poisson.

Rappelons tout d’abord que les relations de commutation canoniques stipulent $[x_a, p_b] = i\hbar\delta_{a,b}$. D’autre part, les relations de Ehrenfest donnent dans la représentation de Heisenberg $[x_a, H] = i\hbar\dot{x}_a$. Calculons alors le commutateur de la charge de Noether (6.45) avec une quelconque des variables dynamiques x_a :

$$[Q, x_a] = -[H\delta t, x_a] + \sum_{b=1}^N [p_b \delta x_b, x_a]. \quad (6.46)$$

Or les variations δt et δx_b ne dépendent par hypothèse que des variables dynamiques x_b et de t , pas des impulsions conjuguées p_a . Par conséquent, x_a commute avec les δx_b et avec δt . On peut alors écrire

$$\begin{aligned} [Q, x_a] &= -[H, x_a]\delta t + \sum_{b=1}^N [p_b, x_a]\delta x_b \\ &= -i\hbar(-\dot{x}_a \delta t + \delta x_a). \end{aligned} \quad (6.47)$$

En comparant avec l’équation (6.41), nous reconnaissons l’expression de $\bar{\delta}x_a$, définie par (6.39). On a donc en définitive

$$[Q, x_a(t)] = -i\hbar\bar{\delta}x_a(t) = -i\hbar(x'_a(t) - x_a(t)). \quad (6.48)$$

On peut donc construire la transformation infinitésimale directement au moyen de la charge Q :

$$x'_a(t) = x_a(t) + \frac{i}{\hbar}[Q, x_a(t)]. \quad (6.49)$$

C’est pour cette raison qu’on dit que Q est le générateur des transformations infinitésimales. C’est un résultat très général, qui est valable même si la transformation considérée n’est pas une transformation de symétrie.

6.2.3 Théorème de Noether en théorie des champs

Le théorème de Noether se généralise facilement au cas où il y a plus d’un paramètre. Nous suivons la même démarche que pour la mécanique classique, en considérant une transformation n’affectant que les variables dynamiques, puis une transformation affectant également les paramètres du champ.

Symétrie interne

Soit une transformation infinitésimale locale $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \delta\varphi(x)$ où la transformation $\delta\varphi$ est une fonction quelconque de φ et des paramètres d'espace-temps x^μ . La variation de l'action dans cette transformation est donnée par (6.23). Si φ est solution des équations d'Euler-Lagrange, seul reste le terme de bord :

$$S\{\varphi + \delta\varphi\} - S\{\varphi\} = \oint_S \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi d^{D-1}\sigma_\mu. \quad (6.50)$$

On définit le *courant de Noether* par

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi. \quad (6.51)$$

L'équation (6.50) se réécrit alors

$$S\{\varphi + \delta\varphi\} - S\{\varphi\} = \oint_S J^\mu d^{D-1}\sigma_\mu = \int_V (\partial_\mu J^\mu) d^D x, \quad (6.52)$$

où nous avons utilisé le théorème de Gauss pour la dernière égalité. Si l'action est invariante dans la transformation considérée, alors le second membre de l'équation est nul quel que soit le volume d'intégration V , ce qui implique que

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (6.53)$$

c'est à dire que J^μ est un courant conservé, tout comme le courant électrique. Plus précisément, la quantité conservée est la charge Q associée au courant, qui s'écrit à quatre dimensions d'espace-temps

$$Q \equiv \int J^0 d^3 \vec{x} \quad (6.54)$$

où l'intégration est effectuée pour une valeur donnée du temps t . Comme pour le courant électrique, on peut interpréter J^0 comme une densité de charge, et les autres composantes du courant J^i comme le flux associé.

Remarque : pour que l'intégrale sur tout l'espace soit bien définie, il faut que J^0 s'annule rapidement pour $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$. De plus, pour que la charge Q soit conservée, il faut également que le flux \vec{J} s'annule pour $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$. On supposera toujours que les champs sont nuls pour $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$, ce qui entraîne en général que les courants de Noether J^μ s'annulent également.

Symétrie d'espace-temps; tenseur d'énergie-impulsion

Considérons maintenant une transformation infinitésimale affectant simultanément les paramètres $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ et le champ $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x)$. Par analogie avec les équations (6.39) et (6.40), nous définissons

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\varphi(x) &\equiv \varphi'(x) - \varphi(x) \\ \delta\varphi(x) &\equiv \varphi'(x') - \varphi(x), \end{aligned} \quad (6.55)$$

qui sont reliés par une équation analogue à (6.41) :

$$\delta\varphi(x) - \bar{\delta}\varphi(x) = \delta x^\mu(x) \partial_\mu \varphi(x), \quad (6.56)$$

où l'on a bien sur posé $\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu$. Comme dans le cas de la mécanique classique, la variation de l'action se calcule facilement en un point donné x^μ , c'est à dire en introduisant $\bar{\delta}\varphi(x)$. Par analogie avec (6.42), on obtient

$$S\{\varphi + \delta\varphi\} - S\{\varphi\} = \oint_S \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \bar{\delta}\varphi + \mathcal{L} \delta x^\mu \right) d^{D-1}\sigma_\mu. \quad (6.57)$$

Le terme entre parenthèses est le courant de Noether, qu'on exprime généralement en fonction de $\delta\varphi$, au moyen de l'équation (6.56) :

$$J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \varphi)} (\partial_\nu \varphi) \delta x^\nu + \mathcal{L} \delta x^\mu. \quad (6.58)$$

On définit le *tenseur d'énergie-impulsion* par

$$T^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial_\nu \varphi - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu, \quad (6.59)$$

ce qui permet d'exprimer le courant de Noether sous la forme suivante :

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta \varphi - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu. \quad (6.60)$$

Cette équation généralise (6.51). En particulier, lorsque le lagrangien ne dépend pas explicitement du paramètre x^ν , l'action est invariante par la translation suivante :

$$\begin{aligned} \delta x^\nu &= \epsilon \\ \delta x^\rho &= 0 \text{ si } \rho \neq \nu \\ \delta \varphi(x) &= 0, \end{aligned} \quad (6.61)$$

où ϵ est un réel arbitrairement petit. Dans ce cas, on a simplement $J^\mu = -T^\mu{}_\nu \epsilon$, et la conservation de J^μ implique, en simplifiant par ϵ ,

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \quad (6.62)$$

qui est l'équation de conservation du tenseur d'énergie-impulsion. Comme ν peut prendre D valeurs, on obtient D charges conservées

$$P_\nu \equiv \int T^0{}_\nu d^3 \vec{x} \quad (6.63)$$

où l'intégrale s'effectue pour une valeur donnée de t . P_0 correspond à l'énergie totale du champ, et l'impulsion est donnée par $-P_i$ (voir plus bas l'exemple de l'onde à une dimension, Sec. 6.2.4), c'est à dire P^i avec une notation covariante. Les équations (6.59) et (6.63) permettent de donner une définition générale de l'énergie et de l'impulsion d'un champ, même si le lagrangien dépend des paramètres d'espace-temps (auquel cas l'énergie et l'impulsion ne sont plus nécessairement conservées).

Bien que l'intégrale sur tout l'espace de $T^0{}_0$ corresponde à l'énergie totale, nous verrons qu'on ne peut pas toujours interpréter $T^0{}_0$ comme une densité d'énergie. C'est le cas en particulier pour le champ électromagnétique, où $T^0{}_0$ n'est pas définie positive (voir exercice 6.3.3). De même, la densité d'impulsion n'est pas toujours donnée par $-T^0{}_i$.

Généralisation à plusieurs champs

Elle s'effectue très simplement. Notons que la variation des champs $\delta \varphi_a(x)$ peut alors dépendre de tous les autres champs φ_b . L'expression du tenseur d'énergie-impulsion dit *canonique* est

$$T^\mu{}_\nu \equiv -\mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu + \sum_{a=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi_a. \quad (6.64)$$

Nous avons ici explicité la sommation sur l'indice répété a . Le courant de Noether s'écrit donc, sous sa forme la plus générale,

$$J^\mu = -T^\mu{}_\nu \delta x^\nu + \sum_{a=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta \varphi_a. \quad (6.65)$$

On retiendra les deux dernières équations, qui sont générales et d'une importance capitale en théorie des champs.

6.2.4 Exemples : symétries de l'équation d'onde à une dimension

Le lagrangien (6.28) a plusieurs propriétés de symétrie. Tout d'abord, il ne dépend pas explicitement du champ s , et il est donc invariant par la transformation de symétrie interne $\delta s(x, t) = \epsilon$, où ϵ est un réel arbitraire. Le courant de Noether associé à cette symétrie est donné par l'équation (6.51), où on remplace φ par s . L'indice μ prend ici deux valeurs, correspondant aux paramètres t et x . Comme il s'agit d'une symétrie interne, on a par ailleurs $\delta x^\mu = 0$. Il vient

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu s)} \quad (6.66)$$

où nous avons divisé par la constante arbitraire ϵ . Il s'agit d'un courant à deux composantes :

$$\begin{aligned} J^t &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t s)} = \frac{1}{c^2} \partial_t s \\ J^x &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x s)} = -\partial_x s. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Son équation de conservation s'écrit

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_t J^t + \partial_x J^x = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 s - \partial_x^2 s = 0, \quad (6.68)$$

où l'on reconnaît l'équation d'onde (6.31) : l'équation de conservation déduite du théorème de Noether peut toujours être déduite directement des équations d'Euler-Lagrange.

On peut également calculer le tenseur d'énergie-impulsion à partir de la définition (6.59) :

$$\begin{aligned} T^t_t &= \frac{1}{2c^2} (\partial_t s)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x s)^2 \\ T^t_x &= \frac{1}{c^2} (\partial_t s)(\partial_x s) \\ T^x_t &= -(\partial_t s)(\partial_x s) \\ T^x_x &= -T^t_t. \end{aligned} \quad (6.69)$$

On vérifiera explicitement, à titre d'exercice, que les équations de conservation de l'énergie, $\partial_t T^t_t + \partial_x T^x_t = 0$, et de l'impulsion, $\partial_t T^t_x + \partial_x T^x_x = 0$, sont ici encore des conséquences de l'équation du mouvement d'Euler-Lagrange (6.31).

On remarque que T^t_t est défini positif, ce qui permet de l'interpréter comme une densité d'énergie : le premier terme est la densité d'énergie cinétique, et le second la densité d'énergie potentielle élastique. T^x_t correspond alors au flux d'énergie.

La densité d'impulsion est donnée par $-T^t_x$ et non par T^t_x . Pour le voir, nous considérons une onde progressive se déplaçant vers les x croissants, à laquelle on va naturellement attribuer une impulsion positive. La solution est alors de la forme $s(x, t) = f(x - ct)$ (voir exercice 5.6.3), qui est automatiquement une solution de l'équation d'onde (6.31) quelle que soit la fonction f . La deuxième des équations (6.69) donne alors $T^t_x = -\frac{1}{c} [f'(x - ct)]^2$, qui est toujours négatif, ce qui conduit à assimiler la densité d'impulsion à $-T^t_x$. Le flux d'impulsion est donc naturellement $-T^x_x$.

6.3 Exercices

Le premier exercice porte sur la mécanique lagrangienne. Les exercices 6.3.2 à 6.3.4 sont des exemples importants de lagrangiens utiles en théorie des champs. Le problème 6.3.6 est une application du formalisme à un problème concret. Les exercices 6.3.7 à 6.3.9 portent sur diverses symétries d'espace-temps, et sur les propriétés du tenseur d'énergie-impulsion qui en découlent. Enfin, les exercices 6.3.10 à 6.3.12 montrent qu'il existe d'autres tenseurs d'énergie-impulsion que celui donné par le formalisme canonique, et qui s'avèrent souvent utiles.

6.3.1 Moment cinétique de l'oscillateur harmonique

Sur l'exemple de l'oscillateur harmonique à deux dimensions, le théorème de Noether (6.35) nous a permis de retrouver l'expression du moment cinétique en coordonnées cartésiennes (6.38). Nous allons vérifier explicitement que le théorème de Noether donne le même résultat après changement de variables.

1. En coordonnées cylindriques, l'expression du lagrangien est (6.11). Comment se transforment r et θ dans une rotation infinitésimale d'angle $\epsilon \ll 1$ autour de l'origine ? En appliquant le théorème de Noether, en déduire l'expression du moment cinétique, et vérifier qu'elle coïncide bien avec l'expression (6.38).
2. Répéter l'exercice avec les coordonnées complexes z et z^* définies par l'équation (6.14), dans lesquelles le lagrangien a pour expression (6.15).

6.3.2 Lagrangien de Klein-Gordon

1. *Champ scalaire réel* : Soit $\Phi(x^\mu)$ une variable dynamique réelle de lagrangien

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, x^\mu) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \quad (6.70)$$

On notera que ce lagrangien est un scalaire de Lorentz si on transforme $\Phi(x)$ comme un scalaire ($\Phi'(x') = \Phi(x)$). Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange pour ce champ et vérifier qu'on retrouve l'équation de Klein-Gordon.

Lorsque le lagrangien est indépendant des x^μ et quadratique dans les champs, l'équation d'Euler-Lagrange est linéaire, homogène, et à coefficients constants. On dit alors que le champ est *libre*. Le lagrangien (6.70) est dit lagrangien du champ scalaire réel libre.

2. *Champ scalaire complexe* : On considère maintenant deux champs scalaires réels $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ de même masse, dont le lagrangien est la somme des lagrangiens associés à Φ_1 et Φ_2 , donnés par (6.70). Nous définissons le champ complexe $\Phi(x)$ par

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\Phi_1 + i\Phi_2}{\sqrt{2}} \\ \Phi^* &= \frac{\Phi_1 - i\Phi_2}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{6.71}$$

(le changement de variables analogue à celui effectué pour l'oscillateur à deux dimensions, cf. Eq.(6.14)). Vérifier que le lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, \Phi^*, \partial_\mu \Phi^*) = (\partial_\mu \Phi^*)(\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^* \Phi.\tag{6.72}$$

Bien que Φ et Φ^* ne soient pas des variables indépendantes, on peut les traiter comme tels dans les opérations de différentiation des équations d'Euler-Lagrange (6.25), comme on l'a fait pour les variables complexes de l'oscillateur harmonique (6.14). Vérifier qu'on retrouve bien ainsi l'équation de Klein-Gordon pour $\Phi(x)$. Le lagrangien (6.72) est dit lagrangien du champ scalaire complexe libre.

3. *Symétrie interne* : Vérifier que le lagrangien (6.72) est invariant par la transformation de symétrie interne $\Phi(x) \rightarrow e^{i\epsilon} \Phi(x)$, où ϵ est un réel arbitraire. Ecrire la forme des transformations infinitésimales pour Φ et Φ^* ; en déduire l'expression du courant de Noether associé. Vérifier qu'il est bien conservé. Nous verrons que cette invariance par rotation dans le plan complexe est à l'origine de la conservation de la charge électrique en théorie des champs.

4. *Energie et impulsion* : Calculer $T^{\mu\nu}$ pour le champ scalaire complexe. Vérifier que T^{00} est bien une quantité définie positive, qu'on peut interpréter comme une densité d'énergie. Donner l'expression de la densité d'impulsion T^{0i} .

5. Quelle est la forme la plus générale du lagrangien pour un champ scalaire réel libre $\Phi(x)$ si on impose l'invariance de Lorentz et l'invariance par translation ? Le choix (6.70) représente-t-il une perte de généralité ?

6.3.3 Lagrangien du champ électromagnétique

Dans le cas des équations de Maxwell, on choisit pour variables dynamiques le potentiel du champ électromagnétique $A^\nu(x)$, qui a quatre composantes réelles. Le lagrangien est défini par

$$\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu, x^\mu) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\nu(x) A^\nu,\tag{6.73}$$

où $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. De même que le lagrangien (6.70), il est scalaire de Lorentz pourvu qu'on transforme j^μ et A^μ comme des vecteurs. Contrairement aux exemples considérés jusqu'ici, le lagrangien dépend cette fois explicitement des paramètres d'espace-temps à travers la densité de courant $j_\nu(x)$.

1. Vérifier que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) - \rho V + \vec{j} \cdot \vec{A}.\tag{6.74}$$

2. Montrer que le lagrangien se réécrit sous la forme

$$\mathcal{L}(A^\nu, \partial_\mu A^\nu, x^\mu) = -\frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - j_\nu(x) A^\nu.\tag{6.75}$$

Cette forme est plus commode pour les calculs.

3. Vérifier que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu}\tag{6.76}$$

4. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange pour le champ $A^\mu(x)$. Vérifier qu'on retrouve le deuxième groupe d'équations de Maxwell.

5. On effectue une transformation de jauge $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)$. Vérifier que la variation du lagrangien se met sous la forme

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu (j^\mu \Lambda).\tag{6.77}$$

Que peut-on en déduire ?

6. *Tenseur d'énergie-impulsion canonique* : Vérifier que

$$T^\mu{}_\nu = -F^{\mu\rho}\partial_\nu A_\rho - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu. \quad (6.78)$$

7. *Energie du champ électromagnétique* : Vérifier l'expression

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}V + \rho V - \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (6.79)$$

En utilisant les équations de Maxwell, mettre ce résultat sous la forme

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V) - \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (6.80)$$

Dans le cas d'un champ libre ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), on ne retrouve pas la densité d'énergie usuelle. Il apparaît en plus un terme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}V)$. A cause de ce terme, T^0_0 n'est pas définie positive, et ne peut être interprétée comme une densité d'énergie. Vérifier que ce terme supplémentaire ne contribue pas à l'énergie totale.

8. *Impulsion du champ électromagnétique* : Vérifier que $T^{0i} = -T^0_i = \vec{E} \cdot \partial_i \vec{A}$. Mettre ce résultat sous la forme $T^{0i} = (\vec{E} \times \vec{B})_i + \vec{E} \cdot \vec{\nabla}A^i$. Le premier terme est l'expression usuelle de la densité d'impulsion, ou vecteur de Poynting. Montrer, au moyen d'une intégration par parties, que le deuxième terme ne contribue pas à l'impulsion totale du champ en l'absence de charges.

6.3.4 Champ vectoriel libre

Le lagrangien du champ électromagnétique (6.73) en l'absence de courant ($j^\mu = 0$) est un exemple de lagrangien possible pour un champ vectoriel libre $A^\mu(x)$. Dans cet exercice, nous allons en étudier les généralisations.

Nous allons tout d'abord chercher la forme la plus générale du lagrangien d'un champ vectoriel libre $A^\mu(x)$ qui soit invariante par transformation de Lorentz et par parité. Le lagrangien d'un champ libre doit être une forme quadratique des composantes $A^\mu(x)$ et de leurs dérivées premières $\partial_\mu A^\nu(x)$. En cherchant à former des scalaires de Lorentz par contraction, on arrive facilement à

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + b(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\nu A^\mu) + c(\partial_\mu A^\mu)^2 + dA^\mu A_\mu \quad (6.81)$$

où a, b, c et d sont des coefficients réels et constants.

1. On pose

$$\Lambda^\mu \equiv A^\nu \partial_\nu A^\mu - A^\mu \partial_\nu A^\nu. \quad (6.82)$$

En utilisant le fait qu'on peut rajouter à \mathcal{L} un terme proportionnel à $\partial_\mu \Lambda^\mu$ sans changer les équations du mouvement (voir Sec. 6.1.2), montrer qu'on peut supposer $b = -a$ dans l'équation (6.81), sans perte de généralité.

2. Le lagrangien de Stueckelberg est défini par

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu \quad (6.83)$$

où $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, et λ et m désignent deux constantes réelles et positives. Quelle perte de généralité implique-t-il ?

3. Vérifier que les équations d'Euler-Lagrange pour ce lagrangien s'écrivent

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \lambda \partial^\nu (\partial_\rho A^\rho) + m^2 A^\nu = 0. \quad (6.84)$$

4. On introduit le champ scalaire $\varphi(x) \equiv \partial_\mu A^\mu(x)$.

a) Dédire des équations d'Euler-Lagrange que si $\lambda = 0$ et $m \neq 0$, alors $\varphi(x) = 0$.

b) Montrer de même que si $\lambda \neq 0$, alors $\varphi(x)$ est solution d'une équation de Klein-Gordon. Quelle est sa masse M ? Expliquer pour quelle raison physique il est nécessaire d'avoir $\lambda > 0$.

c) Expliquer, en utilisant les résultats des questions a) et b), pourquoi la limite $\lambda = m = 0$ (cas de l'électromagnétisme) n'est pas la même suivant que l'on fait tendre d'abord λ ou m vers 0.

5. Dans le cas où $\lambda \neq 0$, on définit le champ vectoriel

$$A_\mu^T \equiv A_\mu + \frac{1}{M^2} \partial_\mu \varphi. \quad (6.85)$$

Vérifier que $\partial_\mu A^{T\mu} = 0$ (on dit que le champ est "transversal"). Montrer que chaque composante A_μ^T est solution d'une équation de Klein-Gordon de masse m .

6.3.5 Lagrangien “topologique”

On ajoute au lagrangien du champ électromagnétique un terme, dit *topologique*, de la forme

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\lambda}{4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (6.86)$$

où $\tilde{F}^{\mu\nu}$ désigne le tenseur dual, défini par l'équation (1.35), et λ une constante multiplicative.

1. Vérifier que $\delta\mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu$, où

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma. \quad (6.87)$$

En déduire que le terme supplémentaire ne modifie pas les équations du mouvement.

2. Vérifier l'expression suivante en fonction des champs usuels

$$\begin{aligned} J^0 &= \vec{A} \cdot \vec{B} \\ \vec{J} &= V\vec{B} - \vec{A} \times \vec{E}. \end{aligned} \quad (6.88)$$

Vérifier sous cette forme l'équation $\partial_0 J^0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \delta\mathcal{L}$.

6.3.6 Potentiel de Yukawa

L'objet de cet exercice est de montrer que la force exercée par l'intermédiaire d'un champ scalaire est attractive entre deux sources identiques, alors qu'elle est répulsive dans le cas de l'électromagnétisme. C'est notamment le cas pour l'interaction entre deux nucléons, dont l'interaction à grande distance est dérivée par l'échange d'un champ scalaire, associé à une particule de spin nul, le pion.

Soit un champ scalaire classique $\varphi(x)$ interagissant avec des sources extérieures, dont la densité volumique $\rho(x)$ (homogène à l'inverse d'un volume) est donnée. Le lagrangien est donné par

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, x) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) (\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - f \rho(x) \varphi, \quad (6.89)$$

f étant une constante de couplage.

1. Quelle est la dimension de f dans un système d'unités où $\hbar = c = 1$?

2. Ecrire l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ $\varphi(x)$.

3. Donner l'expression de l'énergie totale \mathcal{E} du champ dans le cas général puis dans le cas statique, où ρ et φ sont indépendants du temps.

4. On se place dorénavant dans le cas statique. Montrer au moyen d'une intégration par parties que si le champ $\varphi(\vec{x})$ s'annule à l'infini,

$$\mathcal{E} = \frac{f}{2} \int \rho(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (6.90)$$

Connaissez-vous une formule analogue en électrostatique ?

5. Soient deux sources dont les distributions $\rho_A(\vec{x})$ et $\rho_B(\vec{x})$ sont données. Déduire du résultat précédent que leur énergie d'interaction est

$$\mathcal{E}_{AB} = f \int \rho_A(\vec{x}) \varphi_B(\vec{x}) d^3 \vec{x} = f \int \rho_B(\vec{x}) \varphi_A(\vec{x}) d^3 \vec{x}, \quad (6.91)$$

φ_A (resp. φ_B) étant le champ créé par la distribution ρ_A (resp. ρ_B).

6. On note $G(\vec{x})$ la valeur du champ $\varphi(\vec{x})$ créé par une source indépendante du temps $\rho(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$. Calculer la transformée de Fourier $\tilde{G}(\vec{k})$ et en déduire l'expression de $G(\vec{x})$. On donne

$$\int \frac{\exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x})}{k^2 + m^2} \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} = \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} \exp(-m|\vec{x}|). \quad (6.92)$$

7. En déduire l'énergie d'interaction de deux sources ponctuelles A et B avec $\rho_A(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$ et $\rho_B(\vec{x}) = \delta^3(\vec{x} - \vec{r})$. Vérifier que la force qui en résulte est attractive. Yukawa, en 1935, tenta de modéliser de cette façon les interactions entre nucléons, dont la portée est environ $1,5 \times 10^{-15}$ m. Il introduisit pour cela un champ massif $\varphi(x)$ associé à une particule hypothétique, découverte en 1947 et appelée “pion”. Quelle devait être approximativement sa masse en MeV ?

8. Que devient l'énergie d'interaction de la question précédente lorsque $m = 0$? Remarquer que la force est attractive, alors qu'en électrostatique, l'interaction de deux charges ponctuelles identiques est répulsive. Pour comprendre d'où vient cette différence, on écrira les équations de Maxwell puis l'énergie du champ électromagnétique dans le cas de l'électrostatique ($\vec{j} = \vec{B} = \vec{0}$, ρ et \vec{E} indépendants du temps) et on comparera avec les résultats obtenus dans les questions précédentes.

6.3.7 Invariance par dilatation (1)

Soit un champ réel $\varphi(x)$. On suppose que son action est invariante par les transformations de dilatation définies par

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= \lambda x^{\mu} \\ \varphi'(x') &= \varphi(x)\end{aligned}\tag{6.93}$$

où λ est un réel positif quelconque.

1. Vérifier que le courant de Noether associé à une dilatation infinitésimale est $J^{\mu} = T^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$.
2. On suppose de plus que le lagrangien ne dépend pas explicitement des x^{μ} . Dédire alors de l'équation de conservation de J^{μ} que $T^{\mu}_{\mu} = 0$: le tenseur d'énergie impulsion est de *trace nulle*.
3. Vérifier que l'action de l'onde à une dimension, déduite du lagrangien (6.28), est invariante par dilatation. Vérifier que son tenseur d'énergie-impulsion est bien de trace nulle.

6.3.8 Invariance de Lorentz

Soit un lagrangien décrivant la dynamique d'un ensemble de champs $\varphi_a(x)$, $a = 1, \dots, N$. On suppose qu'il est invariant dans les transformations de Lorentz définies par

$$\begin{aligned}x'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \\ \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x),\end{aligned}\tag{6.94}$$

où Λ est la matrice d'une transformation de Lorentz quelconque.

1. Comment qualifier un champ φ_a qui se transforme suivant cette loi? Donner un exemple de lagrangien possédant cette propriété.
2. Expliquer pourquoi l'invariance du lagrangien implique ici l'invariance de l'action.
3. On rappelle qu'une transformation de Lorentz infinitésimale s'écrit sous la forme $\delta x^{\mu} = \omega^{\mu\nu} x_{\nu}$, où $\omega^{\mu\nu}$ est un tenseur infinitésimal *antisymétrique*. En déduire qu'il y a six courants de Noether associés à l'invariance de Lorentz, que l'on peut écrire sous la forme

$$M^{\mu,\nu\rho} = x^{\nu} T^{\mu\rho} - x^{\rho} T^{\mu\nu},\tag{6.95}$$

antisymétrique en ν et ρ . Pour chaque paire d'indices ν et ρ différents, on a ainsi un courant dont les composantes sont repérées par l'indice μ .

4. Calculer les charges conservées associées aux transformations spéciales de Lorentz et interpréter physiquement le résultat. On supposera que le lagrangien est également invariant par translation, et on supposera en outre que T^{00} et T^{0i} représentent bien la densité d'énergie et la densité d'impulsion du champ.
5. A partir de l'équation de conservation de $M^{\mu,\nu\rho}$, montrer que $T^{\mu\nu}$ est symétrique.
6. Quelles sont les dimensions respectives de T^{0i} (densité d'impulsion) et T^{i0} (flux d'énergie) dans le système d'unités international? Quel système d'unités faut-il choisir pour que $T^{\mu\nu}$ soit symétrique?
7. Calculer le tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire réel, dont le lagrangien est donné par l'équation (6.70), et vérifier qu'il est bien symétrique.
8. Le tenseur d'énergie-impulsion du champ électromagnétique $T^{\mu\nu}$, déduit de (6.78) en remontant l'indice ν , n'est manifestement pas symétrique. Quelle hypothèse n'est pas vérifiée dans ce cas? Expliquer, à la lumière de la question 4., pourquoi il est alors difficile d'interpréter T^{00} comme une densité d'énergie et T^{0i} comme une densité d'impulsion.

6.3.9 Invariance conforme

Soit un champ $\varphi(x)$.

1. Ecrire le courant de Noether associé à la transformation infinitésimale suivante, dite *transformation conforme spéciale* :

$$\begin{aligned}\delta x^{\mu} &= (2x^{\mu} x_{\rho} - g^{\mu}_{\rho} x^{\nu} x_{\nu}) \epsilon^{\rho} \\ \delta \varphi(x) &= 0\end{aligned}\tag{6.96}$$

où ϵ^ρ est un vecteur infinitésimal quelconque, indépendant de x .

2. On a montré dans les exercices 6.3.7 et 6.3.8 que si l'action est invariante par translation, par dilatation et par transformation de Lorentz, alors le tenseur d'énergie-impulsion est de trace nulle ($T^\mu_\mu = 0$) et symétrique ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$). Montrer que le courant construit à la question précédente est alors automatiquement conservé.

3. On définit la transformation d'inversion de centre a^μ par

$$x'_\mu - a_\mu = \frac{x_\mu - a_\mu}{(x_\nu - a_\nu)(x^\nu - a^\nu)}. \quad (6.97)$$

- Quelle est la composition de deux inversions de même centre ?
- On considère une inversion de centre l'origine des coordonnées ($a^\mu = 0$) suivie d'une inversion de centre ϵ^μ , avec ϵ^μ infinitésimal. En développant au premier ordre en ϵ^μ , montrer qu'on retrouve la transformation infinitésimale de la question précédente, à une translation près.

6.3.10 Non-unicité du courant de Noether

1. Soit J^μ le courant de Noether, conservé, associé à une symétrie continue de l'action. On définit un nouveau courant par

$$J'^\mu = J^\mu + \partial_\rho X^{\rho\mu} \quad (6.98)$$

où $X^{\rho\mu}$ est un tenseur antisymétrique dépendant des champs et des paramètres d'espace-temps, dont on suppose qu'il s'annule rapidement pour $|\vec{x}| \rightarrow +\infty$. Vérifier que le nouveau courant est également conservé, et que la charge totale associée n'est pas modifiée par cette transformation.

2. On considère une modification du lagrangien de la forme (6.26).

a) Supposons Λ^μ invariant dans une transformation de symétrie interne $\phi_a \rightarrow \phi_a + \delta\phi_a$. Montrer que le courant de Noether associé à cette transformation n'est pas modifié par le terme supplémentaire dans le lagrangien.

b) On suppose que Λ^μ est une fonction uniquement des ϕ_a , indépendante des x^μ . Montrer alors que le nouveau tenseur d'énergie-impulsion canonique (6.64) vaut alors

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho (g^{\rho\nu}\Lambda^\mu - g^{\mu\nu}\Lambda^\rho). \quad (6.99)$$

En déduire que l'énergie et l'impulsion totales ne sont pas modifiées.

6.3.11 Invariance par dilatation (2)

Cet exercice complète l'exercice 6.3.7. On suppose l'action invariante dans une transformation par dilatation un peu plus générale, qui affecte aussi le champ $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \lambda x^\mu \\ \varphi'(x') &= \lambda^k \varphi(x) \end{aligned} \quad (6.100)$$

avec λ constant, et k entier. On va montrer qu'on peut toujours trouver une expression du tenseur d'énergie-impulsion qui soit de trace nulle.

1. On considère un champ réel ϕ sur un espace-temps de dimension D , et la densité de lagrangien suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - g \phi^\alpha, \quad (6.101)$$

où g est une constante de couplage et α un entier. Quelles relations doivent satisfaire k et α pour que l'action soit invariante dans la transformation de dilatation ci-dessus ? En quelles dimensions y a-t-il une valeur de α entière qui convienne ?

2. Ecrire la variation $\delta\varphi$ associée à une dilatation infinitésimale. Montrer que le courant de Noether associé à cette invariance par dilatation peut s'écrire sous la forme

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} + \Delta^\mu \quad (6.102)$$

et donner l'expression de Δ^μ .

3. Déduire de l'équation de conservation de J^μ l'expression de la trace T^μ_μ en fonction de Δ^μ .

4. D'après l'exercice 6.3.10, on peut définir un autre tenseur d'énergie-impulsion par $T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu}$, où $X^{\rho\mu\nu}$ est antisymétrique en ρ et μ , Montrer que pour que $T'^{\mu\nu}$ soit de trace nulle, il suffit d'avoir en outre

$$X^{\rho\mu}{}_\mu = \Delta^\mu. \quad (6.103)$$

5. En déduire qu'on peut choisir

$$X^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{D-1} (g^{\mu\nu} \Delta^\rho - g^{\rho\nu} \Delta^\mu), \quad (6.104)$$

où D désigne le nombre de dimensions d'espace-temps.

6. Calculer le nouveau tenseur d'énergie-impulsion $T'^{\mu\nu}$ pour le lagrangien de la question 1, et vérifier qu'il peut s'écrire

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{D-2}{4(D-1)} (g^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) \varphi^2. \quad (6.105)$$

Vérifier qu'il est bien de trace nulle, en utilisant les équations du mouvement.

Cette modification du tenseur d'énergie-impulsion a été proposée en 1970 dans l'article "A new improved energy-momentum tensor", par Curtis G. Callan, Jr., Sidney R. Coleman et Roman Jackiw, publié dans *Annals of Physics*, volume 59, pages 42-73 (1970).

6.3.12 Symétrisation du tenseur d'énergie-impulsion

Cet exercice complète et généralise l'exercice 6.3.8. Nous avons étudié les conséquences de l'invariance de Lorentz dans le cas où les champs se transforment suivant la loi $\varphi'_a(x') = \varphi_a(x)$ (cf. Eq.(6.94)). Or une transformation de Lorentz mélange plus généralement entre elles les composantes du champ, c'est à dire que l'on a

$$\varphi'_a(x') = S(\Lambda)_{ab} \varphi_b(x), \quad (6.106)$$

où $S(\Lambda)$ est une matrice $N \times N$ mélangeant entre elles les N composantes, et dépendant de la transformation de Lorentz considérée. Par exemple, le champ électromagnétique $A^\mu(x)$ se transforme comme un vecteur :

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x), \quad (6.107)$$

c'est à dire qu'on a dans ce cas $S(\Lambda) = \Lambda$. On supposera dans cet exercice que l'action est invariante lorsqu'on transforme les champs suivant la loi (6.106).

1. Pour une transformation de Lorentz infinitésimale $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ avec $|\omega^\mu{}_\nu| \ll 1$, la transformation des champs $S(\Lambda)$ est également infinitésimale, c'est à dire que $S(\Lambda)_{ab} - \delta_{ab}$ est proportionnel aux paramètres de la transformation de Lorentz $\omega^{\mu\nu}$. En déduire que le courant de Noether s'écrit sous la forme

$$M^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu\rho} \quad (6.108)$$

où $\Delta^{\mu\nu\rho}$ est un terme antisymétrique en ν et ρ , dépendant de la transformation des champs $S(\Lambda)$.

2. Dans le cas du champ électromagnétique, vérifier que

$$\Delta^{\mu\nu\rho} = A^\nu F^{\mu\rho} - A^\rho F^{\mu\nu}. \quad (6.109)$$

3. En utilisant la conservation du courant $M^{\mu,\nu\rho}$, exprimer $T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu}$ en fonction de $\Delta^{\mu\nu\rho}$. On supposera que le lagrangien ne dépend pas explicitement des x^μ .

4. D'après l'exercice 6.3.10, on peut définir un autre tenseur d'énergie-impulsion

$$T'^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} + \partial_\rho X^{\rho\mu\nu} \quad (6.110)$$

où $X^{\rho\mu\nu}$ est antisymétrique en ρ et μ . Cette redéfinition ne change ni l'équation de conservation, ni l'énergie et l'impulsion totales. Montrer que si $X^{\rho\mu\nu}$ vérifie en outre la condition

$$X^{\mu\nu\rho} - X^{\mu\rho\nu} = \Delta^{\mu\nu\rho}, \quad (6.111)$$

alors le nouveau tenseur $T'^{\nu\rho}$ est symétrique.

5. Vérifier que le choix

$$X^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\Delta^{\mu\nu\rho} - \Delta^{\nu\mu\rho} - \Delta^{\rho\mu\nu}) \quad (6.112)$$

vérifie toutes les conditions requises. Cette transformation a été proposée en 1939 par Frederik Jozef Belinfante (1913-1991) dans l'article "On the spin angular momentum of mesons", *Physica*, vol.6, p.887.

6. Vérifier que pour le champ électromagnétique,

$$X^{\mu\nu\rho} = -F^{\mu\nu}A^\rho. \quad (6.113)$$

En déduire, en utilisant les équations de Maxwell, que

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + F^{\mu\rho}\partial_\rho A^\nu - j^\mu A^\nu. \quad (6.114)$$

En utilisant l'expression (6.78) de $T^{\mu\nu}$, vérifier que le nouveau tenseur d'énergie-impulsion est bien symétrique dans le vide ($j^\mu = 0$). Calculer T'^{00} et T'^{0i} et vérifier qu'on retrouve les expressions usuelles de la densité d'énergie et du vecteur de Poynting.

Nous avons dû utiliser les équations de Maxwell, c'est à dire que le tenseur de Belinfante n'est symétrique que sur les trajectoires du mouvement. Signalons qu'il existe une procédure différente qui permet d'obtenir directement la bonne densité d'énergie et d'impulsion, et un tenseur d'énergie-impulsion symétrique, même en dehors des trajectoires du mouvement. Il faut pour cela écrire l'action de telle sorte qu'elle soit invariante par tout changement de coordonnées (et pas seulement par une transformation linéaire, telle que la transformation de Lorentz), comme en relativité générale. Cette procédure élégante, mais qui fait appel à un formalisme plus complexe, a été proposée en 1940 par L. Rosenfeld dans l'article "Sur le tenseur d'impulsion-énergie", *Mém. Acad. Roy. Belg. Sci.*, vol.18, p.1.

Chapitre 7

Quantification du champ scalaire

7.1 Introduction

Nous abordons maintenant la théorie quantique des champs proprement dite, c'est à dire que nous allons quantifier les champs en suivant la même procédure que celle qui mène de la mécanique newtonienne à l'équation de Schrödinger.

Pourquoi quantifier un champ ? Les réponses sont multiples. Tout d'abord, nous connaissons un champ classique, qui est le champ électromagnétique. Ce champ interagit avec des charges. Or ces charges sont décrites par la mécanique quantique, c'est à dire que leur position est entachée d'une incertitude. Le champ électrique en un point donné est donc aussi entaché d'incertitudes quantiques. La quantification du champ électromagnétique est donc nécessaire.

Cette quantification a été effectuée par Dirac en 1927. Il s'est aperçu que quantifier le champ électromagnétique revient à décrire un nombre *arbitraire* de particules identiques, les photons, vérifiant une statistique de Bose–Einstein. Il a ainsi établi le lien entre champ et particules. Nous allons, dans ce premier chapitre, suivre une démarche analogue à celle de Dirac, mais pour le champ scalaire, qui est plus simple que le champ électromagnétique.

Inversement, si on cherche à décrire des particules identiques, on peut chercher à le faire en quantifiant un champ. Nous verrons que ce champ (qui n'aura pas nécessairement d'analogue classique comme le champ électromagnétique) n'est autre que la fonction d'onde à une particule que nous avons introduite dans les premiers chapitres de ce cours (par exemple, nous avons bien utilisé pour fonction d'onde du photon le potentiel vecteur $\vec{A}(x)$ classique), d'où le nom de “seconde quantification”. Ce terme est cependant incorrect car il n'y a qu'une seule quantification, celle du champ, qui est l'objet fondamental de la théorie ; les fonctions d'onde à une particule n'étaient qu'une erreur de conception. De fait, non seulement cette nouvelle démarche permet de décrire plusieurs particules identiques, mais elle résout automatiquement un problème essentiel, celui des états d'énergie négative.

Dans ce chapitre, nous effectuerons la quantification canonique du champ scalaire complexe libre. Dans un volume fini, on peut décomposer celui-ci en une infinité dénombrable de modes propres indépendants. Chacun se comporte comme un oscillateur harmonique complexe, c'est à dire à deux dimensions. Nous commençons donc, dans la section 7.2, par quantifier l'oscillateur à deux dimensions. Puis, dans la section 7.3, nous quantifions le champ scalaire complexe libre et nous montrons comment on interprète physiquement les quanta d'oscillation en termes de particules et d'antiparticules. Dans la section 7.4, nous étudions quelques propriétés formelles résultant de cette quantification. Cette démarche est généralisée au champ scalaire réel libre dans la section 7.5. Enfin, un exemple simple d'interaction est étudié dans la section 7.6.

7.2 Oscillateur harmonique à deux dimensions

On sait que le mouvement d'un oscillateur harmonique dans le plan peut se décomposer en deux oscillations indépendantes suivant les axes x et y (polarisations linéaires). Mais on peut également le décomposer en deux mouvements de rotation uniformes dans le plan, l'un dans le sens positif, l'autre dans le sens négatif (polarisations circulaires), en introduisant les variables complexes $z = (x + iy)/\sqrt{2}$ et $z^* = (x - iy)/\sqrt{2}$ (voir Eq.(6.14)). Dans cette première partie, nous allons quantifier l'oscillateur harmonique avec ces variables. On obtient bien sûr les mêmes résultats en quantifiant les variables x et y .

7.2.1 Relations de commutation canoniques

Le lagrangien a été donné au chapitre précédent, Eq.(6.15) :

$$L(z, z^*, \dot{z}, \dot{z}^*) = m\dot{z}\dot{z}^* - m\omega^2 z z^*. \quad (7.1)$$

L'impulsion canonique associée à la variable z est

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}^* \quad (7.2)$$

On a de même $p_{z^*} = (p_z)^* = m\dot{z}$. Les relations de commutation canoniques sont

$$\begin{aligned} [z, p_z] &= [z^\dagger, p_z^\dagger] = i\hbar \\ [z, z^\dagger] &= [p_z, p_z^\dagger] = [z, p_z^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (7.3)$$

Nous avons noté z^\dagger l'opérateur associé à z^* , hermitique adjoint de z , et de même p_z^\dagger l'opérateur associé à p_{z^*} .

Le hamiltonien s'écrit

$$\begin{aligned} H &= p_z \dot{z} + p_z^\dagger \dot{z}^\dagger - L \\ &= \frac{p_z p_z^\dagger}{m} + m\omega^2 z z^\dagger. \end{aligned} \quad (7.4)$$

7.2.2 Le mouvement des opérateurs

En mécanique quantique non-relativiste, on travaille le plus souvent dans la *représentation de Schrödinger*, où le vecteur d'état du système (la fonction d'onde) dépend du temps, et les opérateurs de position et d'impulsion sont indépendants du temps. A l'inverse, on utilisera dans ce chapitre la *représentation de Heisenberg*, où l'état du système est indépendant du temps, mais où les opérateurs représentant les observables dépendent du temps. Une grandeur physique $a(t)$ suit la loi de Ehrenfest

$$\frac{da}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[a, H]. \quad (7.5)$$

Les raisons de ce choix sont multiples. Il y a des raisons fondamentales, sur lesquelles nous ne nous étendrons pas dans ce cours : l'équivalence entre les deux représentations, qu'on démontre dans les cours de mécanique quantique, n'est plus systématique pour des systèmes ayant une infinité de degrés de liberté, lorsque les interactions sont suffisamment fortes. Il y a aussi des raisons pratiques, que nous apprécierons dès ce chapitre : la représentation de Heisenberg fait clairement apparaître les équations du mouvement pour les observables, et à travers elles le lien avec la théorie classique sous-jacente.

Pour l'oscillateur harmonique complexe, les équations de Ehrenfest s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[z, H] = -\frac{i}{m\hbar}[z, p_z p_z^\dagger] = -\frac{i}{m\hbar}[z, p_z] p_z^\dagger = \frac{p_z^\dagger}{m} \\ \frac{dp_z^\dagger}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[p_z^\dagger, H] = -\frac{im\omega^2}{\hbar}[p_z^\dagger, z z^\dagger] = -\frac{im\omega^2}{\hbar} z [p_z^\dagger, z^\dagger] = -m\omega^2 z, \end{aligned} \quad (7.6)$$

c'est à dire que les opérateurs quantiques vérifient les équations du mouvement classique. On retrouve en particulier

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0. \quad (7.7)$$

7.2.3 Modes de vibration circulaires

La solution générale de cette équation peut s'écrire comme la somme de deux mouvements de rotation, l'un de fréquence positive ($z \propto e^{-i\omega t}$), l'autre de fréquence négative ($z \propto e^{i\omega t}$), soit

$$z(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (b e^{-i\omega t} + d^\dagger e^{i\omega t}). \quad (7.8)$$

Les amplitudes b et d^\dagger sont des opérateurs, au même titre que $z(t)$. Nous avons choisi le facteur multiplicatif dans (7.8) de telle sorte qu'elles soient sans dimension. En dérivant par rapport au temps, on obtient l'expression de p_z^\dagger d'après la première des équations (7.6) :

$$p_z^\dagger(t) = m\dot{z}(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (-b e^{-i\omega t} + d^\dagger e^{i\omega t}). \quad (7.9)$$

Les relations (7.8) et (7.9) s'inversent pour donner

$$\begin{aligned} b e^{-i\omega t} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(z + \frac{ip_z^\dagger}{m\omega} \right) \\ d^\dagger e^{i\omega t} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(z - \frac{ip_z^\dagger}{m\omega} \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

On déduit alors des relations canoniques (7.3) les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} [b, b^\dagger] &= [d, d^\dagger] = 1 \\ [b, d] &= [b, d^\dagger] = 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

Ce sont les relations de commutation de deux oscillateurs harmoniques réels indépendants, chacun correspondant à un des deux sens de rotation. Ces relations justifient les notations que nous avons choisies dans l'équation (7.8), en appelant b l'amplitude du mode de fréquence positive $e^{-i\omega t}$, mais d^\dagger (et non d) l'amplitude du mode de fréquence négative $e^{i\omega t}$.

On déduit des relations de commutation canoniques, par analogie avec le cas bien connu de l'oscillateur harmonique unidimensionnel, qu'une base orthonormée des états du système est de la forme $|n, m\rangle$ où n et m sont des entiers naturels quelconques, les opérateurs b et d étant définis sur cette base par

$$\begin{aligned} b^\dagger |n, m\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1, m\rangle \\ d^\dagger |n, m\rangle &= \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Les entiers n et m correspondent aux valeurs propres de $b^\dagger b$ et $d^\dagger d$, respectivement.

7.2.4 Hamiltonien

Les équations (7.4), (7.8) et (7.9) permettent d'exprimer le hamiltonien en fonction des opérateurs b et d . Nous posons $t = 0$ pour ne pas alourdir les expressions. Le hamiltonien étant indépendant du temps ainsi que les opérateurs b et d , le résultat restera valable pour tout t :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar\omega}{2} ((-b + d^\dagger)(-b^\dagger + d) + (b + d^\dagger)(b^\dagger + d)) \\ &= \hbar\omega (b b^\dagger + d^\dagger d). \end{aligned} \quad (7.13)$$

Avec les relations de commutation (7.11), le hamiltonien (7.13) se met sous la forme

$$H = \hbar\omega (b^\dagger b + d^\dagger d + 1). \quad (7.14)$$

C'est bien la somme de deux hamiltoniens d'oscillateurs harmoniques indépendants. L'énergie du fondamental est $\hbar\omega$, et l'énergie de l'état $|n, m\rangle$ est $(n+m+1)\hbar\omega$. On dit que n et m sont les nombres de quanta d'oscillation associés à chaque sens de rotation. A chaque quantum est associée l'énergie $\hbar\omega$. Les opérateurs b^\dagger et d^\dagger (respectivement b et d), qui augmentent (resp. diminuent) d'une unité le nombre de quanta d'oscillation, sont dits opérateurs de *création* (resp. d'*annihilation*).

7.2.5 Moment cinétique

Le lagrangien (7.1) est inchangé dans une rotation d'angle ϵ dans le plan complexe, qui transforme z en $e^{i\epsilon}z$. Pour une rotation infinitésimale $\epsilon \ll 1$, en particulier, on a les variations $\delta z = i\epsilon z$, $\delta z^* = -i\epsilon z^*$. La quantité conservée associée est donnée par le théorème de Noether, Eq. (6.35) (voir exercice 6.3.1) :

$$J = i(zp_z - z^\dagger p_z^\dagger) = im(zz^\dagger - z^\dagger z). \quad (7.15)$$

On notera que l'ordre des opérateurs est important puisque z et p_z ne commutent pas. Si nous avions choisi un autre ordre, cependant, J ne différerait que d'une constante, ce qui est sans importance. Les équations (7.8) et (7.9) permettent d'exprimer le moment cinétique en fonction des opérateurs b et d . Comme pour le hamiltonien, nous faisons ce calcul pour $t = 0$ pour simplifier, mais le résultat est valable pour tout t puisque J est indépendant du temps ainsi que b et d :

$$\begin{aligned} J &= \frac{i\hbar}{2} ((b + d^\dagger)i(b^\dagger - d) - (b^\dagger + d)i(-b + d^\dagger)) \\ &= \frac{\hbar}{2} (-b^\dagger b - b b^\dagger + d^\dagger d + d d^\dagger) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Grâce aux relations de commutation (7.11), le résultat se met sous la forme

$$J = \hbar(-b^\dagger b + d^\dagger d). \quad (7.17)$$

A chaque quantum d'oscillation dans le sens positif (respectivement négatif) est donc associé un moment cinétique \hbar (respectivement $-\hbar$). Evidemment, dans le cas d'un oscillateur harmonique, $d^\dagger d$ et $b^\dagger b$ sont séparément des constantes du mouvement, donc la conservation de J n'apporte rien. Mais si nous ajoutons une énergie d'interaction préservant la symétrie de rotation, par exemple en $(x^2 + y^2)^2$, la conservation du moment cinétique donne une information utile.

7.3 Champ scalaire complexe libre

Nous choisissons dorénavant un système d'unités où $\hbar = c = 1$. Nous effectuerons la quantification dans un volume fini V .

7.3.1 Décomposition en modes propres

L'équation de Klein–Gordon pour un champ complexe $\Phi(t, \vec{x})$ peut s'obtenir par un formalisme lagrangien, ce qui est l'objet de l'exercice 6.3.2. La densité de lagrangien dont elle découle est donnée par l'équation (6.72). Le lagrangien proprement dit est obtenu en intégrant cette densité de lagrangien sur tout l'espace, soit :

$$L = \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi^* - m^2 \Phi \Phi^* \right) d^3 \vec{x}. \quad (7.18)$$

Nous noterons en majuscules le champ $\Phi(x)$ pour le distinguer des fonctions d'onde, que nous continuerons à noter en minuscules. Il est commode d'utiliser la représentation de Fourier. Dans un grand volume V , on décompose $\Phi(\vec{x})$ à un instant donné :

$$\Phi(t, \vec{x}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}. \quad (7.19)$$

La normalisation a été choisie de telle sorte que $\Phi_{\vec{p}}(t)$ corresponde à la transformée de Fourier spatiale dans la limite d'un grand volume V . On peut récrire le lagrangien (7.18) en fonction des $\Phi_{\vec{p}}(t)$ au moyen de l'identité de Parseval

$$\int f(\vec{x}) g^*(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} f_{\vec{p}} g_{\vec{p}}^*. \quad (7.20)$$

La transformée de Fourier de $\vec{\nabla} \Phi(t, \vec{x})$ est $i\vec{p} \Phi_{\vec{p}}(t)$, ce qui donne

$$L = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} \left(\dot{\Phi}_{\vec{p}} \dot{\Phi}_{\vec{p}}^* - (\vec{p}^2 + m^2) \Phi_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}^* \right). \quad (7.21)$$

Les composantes de Fourier $\Phi_{\vec{p}}(t)$ sont les nouvelles variables dynamiques dans la représentation de Fourier. L'intérêt de cette dernière est qu'il n'y a pas de terme mélangeant des valeurs de \vec{p} différentes ; plus précisément, le lagrangien précédent est la somme d'une infinité dénombrable de lagrangiens d'oscillateurs harmoniques complexes indépendants, de la forme (6.15), en effectuant les substitutions

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \Phi_{\vec{p}} \\ \omega &\rightarrow E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \\ m &\rightarrow \frac{1}{V}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Pour quantifier le champ, il suffit de quantifier chaque oscillateur harmonique complexe $\Phi_{\vec{p}}$. L'équation (7.8) permet de décomposer le mouvement de $\Phi_{\vec{p}}$ en deux composantes de fréquence positive (en $e^{-i\omega t}$) et négative (en $e^{i\omega t}$), dont nous noterons les amplitudes respectivement $b_{\vec{p}}$ et $d_{-\vec{p}}^\dagger$. Ces composantes correspondront naturellement aux particules et aux antiparticules. Nous attribuons l'indice $-\vec{p}$ au mode de fréquence négative, car nous verrons que l'impulsion du quantum d'oscillation correspondant est opposée, en accord avec l'interprétation de Feynman en mécanique quantique relativiste. Avec ces notations, on a donc

$$\Phi_{\vec{p}}(t) = \sqrt{\frac{V}{2E_{\vec{p}}}} \left(b_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}} t} + d_{-\vec{p}}^\dagger e^{iE_{\vec{p}} t} \right). \quad (7.23)$$

Les modes de \vec{p} différents commutent entre eux puisqu'ils sont indépendants, et les relations de commutation dans un mode sont données par (7.11) :

$$\begin{aligned} [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] &= [d_{\vec{p}}, d_{\vec{q}}^\dagger] = \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \\ [b_{\vec{p}}, d_{\vec{q}}] &= [b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}] = [d_{\vec{p}}, d_{\vec{q}}] = [b_{\vec{p}}, d_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \end{aligned} \quad (7.24)$$

En insérant l'équation (7.23) dans la série de Fourier (7.19), on voit apparaître la décomposition du champ sur les solutions à ondes planes de l'équation de Klein–Gordon, Eq. (2.15) :

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(x) + d_{-\vec{p}}^\dagger \phi_{-\vec{p}}^*(x) \right) \\ &= \sum_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(x) + d_{\vec{p}}^\dagger \phi_{\vec{p}}^*(x) \right), \end{aligned} \quad (7.25)$$

où $\phi_{\vec{p}}(x)$ désigne la solution normalisée d'énergie positive et d'impulsion \vec{p} , Eq. (2.14). La seule différence avec l'équation (2.15) est que les amplitudes de probabilité $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}^\dagger$ d'être dans les ondes planes $\phi_{\vec{p}}(x)$ et $\phi_{\vec{p}}^*(x)$ sont maintenant des opérateurs et non plus des nombres. Retenons, car c'est important et général, que les opérateurs de création et d'annihilation dans un mode d'un champ quantique correspondent à l'amplitude de ce mode pour le champ classique.

Remarque : normalisation du lagrangien

Nous avons noté que la normalisation du lagrangien en mécanique classique est arbitraire, puisque les équations d'Euler-Lagrange sont linéaires dans le lagrangien. Il n'en va pas de même en mécanique quantique, où la relation de commutation canonique $[x, \partial L / \partial \dot{x}] = i\hbar$ n'est pas invariante dans la transformation $L \rightarrow \lambda L$. Dans le cas du champ scalaire complexe libre (7.18), néanmoins, multiplier \mathcal{L} par une constante positive λ revient à multiplier $\Phi(x)$ par $\sqrt{\lambda}$. Comme $\Phi(x)$ n'a pas lui-même de signification physique, c'est sans conséquence. Ici, nous avons choisi la normalisation du lagrangien de manière à ce que la décomposition du champ, (7.25), fasse apparaître les ondes planes normalisées de l'équation de Klein–Gordon. C'est la normalisation usuelle pour le champ scalaire complexe.

7.3.2 Particules et antiparticules

Le fait qu'un champ libre corresponde à un ensemble d'oscillateurs harmoniques est fondamental, car il est à la base de son interprétation en termes de particules identiques. En effet, les niveaux d'énergie d'un oscillateur harmonique sont équidistants. Plutôt que de dire "le champ est dans un état d'énergie $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ ", on pourra dire "il comporte n particules identiques d'énergie $\hbar\omega$ chacune" en plus de l'énergie $\hbar\omega/2$ du fondamental, qu'on appellera "vide".

Plus précisément, on peut classer les états du système suivant les valeurs propres de $b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}^\dagger d_{\vec{p}}$. Nous allons montrer que ces valeurs propres correspondent respectivement au nombre de particules et d'antiparticules d'impulsion \vec{p} . Pour cela, nous allons tout d'abord calculer l'énergie, l'impulsion et la charge qui leur sont associées.

Energie

L'énergie du champ scalaire complexe (voir exercice 6.3.2)

$$H = \int \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t} + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Phi^\dagger + m^2 \Phi \Phi^\dagger \right) d^3 \vec{x} \quad (7.26)$$

est la somme des énergies des oscillateurs associés à chaque mode. Celles-ci sont données par l'équation (7.14), où on remplace ω par $E_{\vec{p}}$:

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + d_{-\vec{p}}^\dagger d_{-\vec{p}} + 1 \right) \\ &= \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + d_{\vec{p}}^\dagger d_{\vec{p}} + 1 \right). \end{aligned} \quad (7.27)$$

L'état de plus basse énergie est le vide physique, noté $|0\rangle$. C'est celui qui a 0 quantum dans chaque mode, soit pour tout \vec{p}

$$b_{\vec{p}} |0\rangle = d_{\vec{p}} |0\rangle = 0. \quad (7.28)$$

et de même $\langle 0|b_{\vec{p}}^\dagger = \langle 0|d_{\vec{p}}^\dagger = 0$. On impose d'autre part la condition de normalisation suivante, qui définit le vide à une phase près

$$\langle 0|0\rangle = 1. \quad (7.29)$$

L'énergie du vide est d'après (7.27) et (7.28)

$$E_0 = \langle 0|H|0\rangle = \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \quad (7.30)$$

qui est infinie. Ce n'est pas gênant en général car seules comptent les différences d'énergie entre deux états, qui restent finies. C'est gênant, néanmoins, en relativité générale où la force de gravitation est proportionnelle à l'énergie, qui acquiert par là une valeur absolue et non plus simplement relative.

D'après l'équation (7.27), chaque quantum d'oscillation apporte l'énergie supplémentaire $E_{\vec{p}}$, positive, c'est à dire précisément l'énergie d'une particule, ou d'une antiparticule, d'impulsion \vec{p} . Notons bien, car c'est un des points les plus importants de ce chapitre, qu'il n'y a plus d'états d'énergie négative! Quel que soit le sens de rotation de $\Phi_{\vec{p}}(t)$ dans le plan complexe, en $e^{-i\omega t}$ ou en $e^{i\omega t}$, l'énergie associée est positive. Le problème des états d'énergie négative, qui se posait dans le formalisme des fonctions d'onde, n'apparaît donc plus en théorie des champs.

Charge

Nous allons maintenant introduire un nombre quantique qui nous permettra de distinguer entre particule et antiparticule, c'est à dire entre les deux sens de rotation de $\Phi_{\vec{p}}(t)$. Ce nombre est naturellement l'analogie du moment cinétique de l'oscillateur à deux dimensions, dont l'expression est donnée par (7.15). Au moyen des substitutions (7.22), et en sommant sur toutes les valeurs de \vec{p} , nous obtenons grâce à l'identité de Parseval

$$\begin{aligned} J &= \frac{i}{V} \sum_{\vec{p}} \left(\Phi_{\vec{p}} \dot{\Phi}_{\vec{p}}^\dagger - \Phi_{\vec{p}}^\dagger \dot{\Phi}_{\vec{p}} \right) \\ &= i \int \left(\Phi \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t} - \Phi^\dagger \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) d^3 \vec{x}. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Nous avons rencontré cette quantité à deux reprises : dans l'exercice 6.3.2, comme charge de Noether associée à l'invariance du lagrangien (6.72) par rotation dans le plan complexe $\Phi(x) \rightarrow e^{i\theta} \Phi(x)$; et il y a bien plus longtemps, dans le chapitre 2, comme la définition de la norme pour l'équation de Klein–Gordon, à un signe près. Ce signe est lié aux différences de convention pour l'énergie de la fonction d'onde (comptée positive pour $e^{-i\omega t}$) et le moment cinétique de l'oscillateur à deux dimensions (le sens positif correspondant à $e^{i\omega t}$). Au moyen de l'équation (7.17), nous pouvons récrire $-J$ en fonction des opérateurs de création et d'annihilation,

$$-J = \sum_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} - d_{-\vec{p}}^\dagger d_{-\vec{p}} \right) = \sum_{\vec{p}} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} - d_{\vec{p}}^\dagger d_{\vec{p}} \right). \quad (7.32)$$

De même que la “norme” de l'équation de Klein–Gordon, cette quantité n'est pas définie positive : son signe est opposé pour les particules et pour les antiparticules. Nous comprenons maintenant que l'interprétation correcte de cette quantité est une charge (dans le sens général d'une quantité conservée, qui sera proportionnelle à la charge électrique si charge électrique il y a) plutôt qu'une probabilité ou un nombre de particules. Avec cette interprétation, les problèmes de signe que nous avons rencontrés dans le chapitre 2 disparaissent d'eux-mêmes.

Impulsion

Enfin, l'impulsion canonique est donnée par (voir exercice 6.3.2)

$$\vec{P} = - \int \left(\vec{\nabla} \Phi \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi^* \right) d^3 \vec{x} \quad (7.33)$$

qui se récrit au moyen de l'identité de Parseval

$$\vec{P} = - \frac{i}{V} \sum_{\vec{p}} \vec{p} \left(\Phi_{\vec{p}} \dot{\Phi}_{\vec{p}}^* - \dot{\Phi}_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}^* \right). \quad (7.34)$$

Pour chaque composante de Fourier, nous reconnaissons, au facteur $-\vec{p}$ près, le moment cinétique de l'oscillateur (7.15), où on remplace m par $1/V$. L'équation (7.17) nous permet donc d'écrire

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \sum_{\vec{p}} \vec{p} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} - d_{-\vec{p}}^\dagger d_{-\vec{p}} \right) \\ &= \sum_{\vec{p}} \vec{p} \left(b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} + d_{\vec{p}}^\dagger d_{\vec{p}} \right).\end{aligned}\quad (7.35)$$

Les équations (7.27), (7.32) et (7.35) nous permettent d'identifier $b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}^\dagger d_{\vec{p}}$ comme les nombres de particules et d'antiparticules d'impulsion \vec{p} , respectivement. Ces nombres peuvent prendre n'importe quelle valeur entière et positive. Par conséquent, l'espace des états du champ scalaire quantique est la somme des espaces correspondant à tous les nombres possibles de particules et d'antiparticules. Il est dit *espace de Fock*. Dans le cas d'un champ libre, ces nombres sont séparément conservés, mais ce ne sera plus le cas en général s'il y a des interactions.

7.4 Propriétés locales

Dans cette section, nous étudions quelques conséquences formelles de la quantification que nous venons de réaliser. Ces propriétés sont pour la plupart très générales, et ne se limitent pas au champ libre.

7.4.1 Relations de commutation canoniques locales

Nous avons effectué la quantification en décomposant sur les modes. Nous allons maintenant vérifier que la théorie quantifiée est locale, c'est à dire que les observables en des points différents sont indépendantes à temps égaux.

Deux observables sont indépendantes si les opérateurs correspondants commutent. Nous devons donc calculer les divers commutateurs qu'on peut former. En utilisant la décomposition (7.25) et les relations de commutation canoniques (7.24), on voit immédiatement que

$$[\Phi(x), \Phi(x')] = 0. \quad (7.36)$$

On calcule de même

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(x')] = \sum_{\vec{p}} (\phi_{\vec{p}}(x) \phi_{\vec{p}}^*(x') - \phi_{\vec{p}}^*(x) \phi_{\vec{p}}(x')) \quad (7.37)$$

Le commutateur est donc un nombre, ou plus précisément un opérateur proportionnel à l'identité. Du fait de l'invariance par translation, il ne dépend en fait que de la différence $x - x'$.

On peut calculer le commutateur à temps égaux par un calcul direct (voir exercice 7.7.1). Nous allons choisir ici une méthode plus formelle mais plus générale. Nous utilisons le fait que les $\phi_{\vec{p}}(x)$ et les $\phi_{\vec{p}}^*(x)$ forment une base complète des solutions de l'équation de Klein-Gordon classique, c'est à dire que toute solution se décompose sous la forme (voir Eq. (2.15)) :

$$\phi(x) = \sum_{\vec{p}} (b_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(x) + d_{\vec{p}}^* \phi_{\vec{p}}^*(x)). \quad (7.38)$$

Et nous avons vu qu'on pouvait calculer les coefficients $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}^*$ en connaissant ϕ et $\partial\phi/\partial t$ dans tout l'espace à un instant donné t' :

$$\begin{aligned}b_{\vec{p}} &= i \int_V \left(\phi_{\vec{p}}^*(t', \vec{x}') \frac{\partial\phi}{\partial t'}(t', \vec{x}') - \frac{\partial\phi_{\vec{p}}^*}{\partial t'}(t', \vec{x}') \phi(t', \vec{x}') \right) d^3\vec{x}'. \\ d_{\vec{p}}^* &= -i \int_V \left(\phi_{\vec{p}}(t', \vec{x}') \frac{\partial\phi}{\partial t'}(t', \vec{x}') - \frac{\partial\phi_{\vec{p}}}{\partial t'}(t', \vec{x}') \phi(t', \vec{x}') \right) d^3\vec{x}'.\end{aligned}\quad (7.39)$$

En injectant ces relations dans la décomposition du champ, Eq. (7.38), on voit apparaître le commutateur, Eq. (7.37) et sa dérivée par rapport à t' :

$$\phi(t, \vec{x}) = \int_V \left(i[\Phi(t, \vec{x}), \Phi^\dagger(t', \vec{x}')] \frac{\partial\phi}{\partial t'}(t', \vec{x}') - i \left[\Phi(t, \vec{x}), \frac{\partial\Phi^\dagger}{\partial t'}(t', \vec{x}') \right] \phi(t', \vec{x}') \right) d^3\vec{x}'. \quad (7.40)$$

En particulier, cette égalité doit être vérifiée pour $t = t'$ quels que soient $\phi(t', \vec{x}')$ et $\partial\phi/\partial t'(t', \vec{x}')$. On a donc nécessairement

$$[\Phi(t, \vec{x}), \Phi^\dagger(t, \vec{x}')] = 0$$

$$\left[\Phi(t, \vec{x}), \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t}(t, \vec{x}') \right] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (7.41)$$

Ces relations traduisent simplement le formalisme canonique au niveau local. Le moment conjugué à $\Phi(x)$ est en effet

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\Phi/\partial t)} = \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t}, \quad (7.42)$$

Ces relations, analogues aux relations de commutations canoniques usuelles, peuvent être choisies comme base du formalisme canonique, de préférence aux relations de commutation (7.24) (Heisenberg et Pauli, 1929). Elles montrent en particulier que les observables locales construites à partir des champs $\Phi(x)$, $\Pi(x)$, $\Phi^\dagger(x)$ et $\Pi^\dagger(x)$ commutent en des points différents de l'espace à temps égaux, c'est à dire que la théorie est locale.

7.4.2 Symétrie des fonctions d'onde

On peut classer les états du système suivant le nombre de particules qu'ils contiennent. Un état normalisé à une particule d'impulsion \vec{p} s'écrit

$$|\vec{p}\rangle = b_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \quad (7.43)$$

L'état à une particule le plus général est une combinaison linéaire des divers $|\vec{p}\rangle$. Soit $|\psi\rangle$ un tel état. Rappelons qu'il est indépendant du temps puisque nous sommes dans la représentation de Heisenberg. Définissons la fonction $\psi(x)$ par

$$\psi(x) = \langle 0 | \Phi(x) | \psi \rangle. \quad (7.44)$$

L'opérateur $\Phi(x)$ étant solution de l'équation de Klein–Gordon, il en va de même de la fonction $\psi(x)$, que nous pouvons interpréter comme la fonction d'onde de Klein–Gordon de l'état à une particule. En particulier, si nous choisissons pour $|\psi\rangle$ l'état $|\vec{p}\rangle$ défini par (7.43), nous obtenons d'après l'équation (7.25)

$$\psi(x) = \langle 0 | \Phi(x) | \vec{p} \rangle = \phi_{\vec{p}}(x) \quad (7.45)$$

Nous avons utilisé l'identité suivante :

$$\langle 0 | b_{\vec{q}} b_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = \langle 0 | [b_{\vec{q}}, b_{\vec{p}}^\dagger] | 0 \rangle = \delta_{\vec{p}, \vec{q}}. \quad (7.46)$$

La fonction d'onde $\psi(x)$ est donc simplement l'onde plane d'énergie positive et d'impulsion \vec{p} (2.14), normalisée suivant la convention relative à l'équation de Klein–Gordon.

L'état à une antiparticule d'impulsion \vec{p} s'obtient en remplaçant dans (7.43) $b_{\vec{p}}^\dagger$ par $a_{\vec{p}}^\dagger$. La fonction d'onde ne peut être définie par (7.44), qui donnerait un résultat nul. Il faut remplacer $\Phi(x)$ par $\Phi^\dagger(x)$, ce qui donne pour l'état d'impulsion \vec{p}

$$\langle 0 | \Phi^\dagger(x) a_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = \phi_{\vec{p}}(x). \quad (7.47)$$

Notons qu'il s'agit d'une fonction d'onde d'énergie positive, dont l'impulsion et l'énergie sont celles de l'antiparticule.

Un état normalisé à deux particules d'impulsions \vec{p}_1 et \vec{p}_2 différentes sera

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = b_{\vec{p}_1}^\dagger b_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle \quad (7.48)$$

tandis que pour deux particules d'impulsions égales, la normalisation est, d'après (7.12)

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(b_{\vec{p}_1}^\dagger \right)^2 |0\rangle. \quad (7.49)$$

Pour un état à deux particules quelconques noté $|\psi\rangle$, définissons la fonction d'onde $\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)$ par

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \Phi(t, \vec{x}_1) \Phi(t, \vec{x}_2) | \psi \rangle. \quad (7.50)$$

D'après l'équation (7.36), cette fonction d'onde est symétrique :

$$\psi(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) = \psi(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t). \quad (7.51)$$

On a en particulier d'après (7.48)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \Phi(x_1) \Phi(x_2) | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{\vec{p}_1}(x_1) \phi_{\vec{p}_2}(x_2) + \phi_{\vec{p}_2}(x_1) \phi_{\vec{p}_1}(x_2)) \quad (7.52)$$

et d'après (7.49)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \langle 0 | \Phi(x_1) \Phi(x_2) | \vec{p}_1, \vec{p}_1 \rangle = \phi_{\vec{p}_1}(x_1) \phi_{\vec{p}_1}(x_2). \quad (7.53)$$

On retrouve bien les fonctions d'onde symétriques de la mécanique quantique.

Ces résultats se généralisent facilement à un nombre arbitraire N de particules, en remplaçant dans (7.50) $1/\sqrt{2}$ par $1/\sqrt{N!}$. Ils montrent que les quanta d'oscillation du champ scalaire correspondent à des particules satisfaisant à une statistique de Bose–Einstein, c'est à dire à des bosons.

7.4.3 Générateurs des transformations infinitésimales

Nous avons vu dans la section 6.2.2 qu'en mécanique quantique, la charge de Noether associée à une transformation infinitésimale est le générateur de cette transformation, défini par l'équation (6.48). Considérons par exemple une translation infinitésimale $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{\epsilon}$. Du fait que $\Phi'(\vec{x}') = \Phi(\vec{x})$, la transformation du champ dans cette translation est

$$\Phi'(\vec{x}) = \Phi(\vec{x} - \vec{\epsilon}) = \Phi(\vec{x}) - \vec{\epsilon} \cdot \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \quad (7.54)$$

La charge de Noether associée est définie par les équations (6.54) et (6.65) :

$$Q = - \int d^3 \vec{x} T^0_i \epsilon^i = \vec{P} \cdot \vec{\epsilon}, \quad (7.55)$$

où \vec{P} désigne l'opérateur d'impulsion totale du champ. Or Q est le générateur des transformations infinitésimales, ce qui signifie que

$$[Q, \Phi(\vec{x})] = -i(\Phi'(\vec{x}) - \Phi(\vec{x})). \quad (7.56)$$

Les trois équations précédentes donnent la relation de commutation suivante

$$[\vec{P}, \Phi(\vec{x})] = i \vec{\nabla} \Phi(\vec{x}). \quad (7.57)$$

Ce résultat est tout à fait général. Vérifions-le dans le cas du champ libre. L'opérateur d'impulsion est donné par (7.35). Au moyen des relations de commutation (7.24), on obtient les commutateurs

$$\begin{aligned} [\vec{P}, b_{\vec{p}}] &= -\vec{p} b_{\vec{p}} \\ [\vec{P}, d_{\vec{p}}^\dagger] &= \vec{p} d_{\vec{p}}^\dagger. \end{aligned} \quad (7.58)$$

En utilisant la décomposition du champ $\Phi(x)$ en ondes planes, Eq.(7.25), on arrive facilement au résultat. Pour toute symétrie continue d'une théorie, il existe des relations telles que (7.57). Leur intérêt est qu'elles permettent d'obtenir directement des relations entre des quantités physiques, même si on ne connaît pas le lagrangien. Une application simple de l'équation (7.57) est présentée dans l'exercice 7.7.2.

7.5 Champ scalaire réel libre

Le lagrangien du champ scalaire réel libre est obtenu en intégrant sur tout l'espace, à un instant donné t , la densité de lagrangien (6.70) :

$$L = \frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\vec{\nabla} \Phi \right)^2 - m^2 \Phi^2 \right]. \quad (7.59)$$

On notera le facteur 1/2, qui n'apparaît pas pour le champ scalaire complexe.

7.5.1 Décomposition en modes ; interprétation physique

En décomposant le lagrangien en série de Fourier, on obtient (cf. Eq.(7.21))

$$L = \frac{V}{2} \sum_{\vec{p}} \left(\dot{\Phi}_{\vec{p}} \dot{\Phi}_{\vec{p}}^* - (\vec{p}^2 + m^2) \Phi_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}^* \right). \quad (7.60)$$

La différence essentielle avec le champ scalaire complexe est que les modes \vec{p} et $-\vec{p}$ ne sont plus indépendants : en effet, $\Phi(x)$ est réel si et seulement si $\Phi_{-\vec{p}} = \Phi_{\vec{p}}^*$. On remarquera que \vec{p} et $-\vec{p}$ donnent la même contribution dans (7.60), ce qui permet de récrire cette décomposition sous la forme

$$L = V \sum_{\vec{p} \text{ ou } -\vec{p}} \left(\dot{\Phi}_{\vec{p}} \dot{\Phi}_{\vec{p}}^* - (\vec{p}^2 + m^2) \Phi_{\vec{p}} \Phi_{\vec{p}}^* \right), \quad (7.61)$$

où la notation “ \vec{p} ou $-\vec{p}$ ” signifie que pour une valeur de \vec{p} donnée, on compte soit \vec{p} , soit $-\vec{p}$. A cette restriction près, on a le même lagrangien que pour le champ scalaire complexe, (7.21), puisque le facteur $1/2$ a disparu. Chaque mode de la somme se décompose donc sous la forme (7.23). Cette décomposition définit l’opérateur $b_{\vec{p}}$ pour la moitié des valeurs de \vec{p} et $d_{\vec{p}}$ pour l’autre moitié. Il n’y a donc pas lieu d’employer deux notations différentes, et on pose $a_{\vec{p}} = b_{\vec{p}} = d_{\vec{p}}$, cette fois défini pour tout \vec{p} . Avec cette convention, l’équation (7.23) devient

$$\Phi_{\vec{p}} = \sqrt{\frac{1}{2E_{\vec{p}}V}} \left(a_{\vec{p}} e^{-iE_{\vec{p}}t} + a_{-\vec{p}}^{\dagger} e^{iE_{\vec{p}}t} \right), \quad (7.62)$$

cette décomposition portant sur la moitié des modes \vec{p} . L’autre moitié est donnée par la relation $\Phi_{-\vec{p}} = \Phi_{\vec{p}}^{\dagger}$, et on vérifie alors aisément que l’équation (7.62) est aussi valable pour $-\vec{p}$. Elle vaut donc pour tous les modes.

Confondre $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ revient à confondre particules et antiparticules : un champ scalaire réel décrit une particule qui est sa propre antiparticule. De même, le photon est sa propre antiparticule parce que le champ électromagnétique est réel, comme nous le verrons dans le chapitre suivant.

7.5.2 Relations diverses

Les divers résultats obtenus pour le champ scalaire complexe se généralisent immédiatement au champ scalaire réel. Tout d’abord, la décomposition de $\Phi(x)$ en modes s’obtient en injectant (7.62) dans la décomposition en série de Fourier (7.19), où la sommation porte sur *tous* les modes. On obtient alors le même résultat que pour le champ scalaire complexe, (7.25), en remplaçant $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ par un même opérateur $a_{\vec{p}}$:

$$\Phi(x) = \sum_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}} \phi_{\vec{p}}(x) + a_{\vec{p}}^{\dagger} \phi_{\vec{p}}^*(x) \right). \quad (7.63)$$

L’expression de $a_{\vec{p}}$ en fonction du champ $\Phi(x)$ se déduit de (2.19) :

$$a_{\vec{p}} = i \int \left(\phi_{\vec{p}}^* \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{\vec{p}}^*}{\partial t} \Phi \right) d^3 \vec{x}. \quad (7.64)$$

De même, les relations de commutation canoniques (7.24) se récrivent, en confondant $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$,

$$\begin{aligned} [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^{\dagger}] &= \delta_{\vec{p}, \vec{q}} \\ [a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] &= [a_{\vec{p}}^{\dagger}, a_{\vec{q}}^{\dagger}] = 0. \end{aligned} \quad (7.65)$$

De ces relations, on déduit le commutateur

$$[\Phi(x), \Phi(x')] = \sum_{\vec{p}} \left(\phi_{\vec{p}}(x) \phi_{\vec{p}}^*(x') - \phi_{\vec{p}}^*(x) \phi_{\vec{p}}(x') \right). \quad (7.66)$$

On reconnaît la même expression que pour le champ scalaire complexe, Eq. (7.37).

On déduit alors de (7.41) les relations de commutation canoniques à temps égaux. Nous définissons pour cela le moment conjugué associé à $\Phi(x)$:

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \Phi / \partial t)} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (7.67)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} [\Phi(t, \vec{x}), \Phi(t, \vec{y})] &= 0 \\ [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= 0 \\ [\Phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] &= i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (7.68)$$

L’énergie et l’impulsion sont données par les équations (7.27) et (7.35), où on ne compte qu’un mode sur deux (soit \vec{p} soit $-\vec{p}$), mais où on remplace $d_{\vec{p}}$ et $b_{\vec{p}}$ par $a_{\vec{p}}$, soit en définitive

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\vec{p}} E_{\vec{p}} \left(a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \right) \\ \vec{P} &= \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_{\vec{p}}^{\dagger} a_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Notons enfin que pour un champ scalaire réel, la fonction d’onde d’un état à une particule définie par l’équation (7.44) est complexe et non réelle. Pour un état d’impulsion \vec{p} , c’est simplement la fonction d’onde de Klein–Gordon $\phi_{\vec{p}}(x)$. C’est ce qui explique que nous ayons été amenés, dans le chapitre 4, à considérer des fonctions d’ondes complexes pour le photon.

7.6 Interaction avec une source extérieure

Nous terminons ce chapitre en étudiant en détail un exemple simple d'interaction, qui se traite exactement. Cet exercice, quelque peu académique, permettra d'introduire plusieurs notions importantes.

7.6.1 Position du problème

Soit un champ scalaire réel $\Phi(x)$ et la densité de lagrangien

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi, x) &\equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2}m^2 \Phi^2 + j(x)\Phi \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}\end{aligned}\quad (7.70)$$

où \mathcal{L}_0 est le lagrangien du champ libre défini par l'équation (7.59), et \mathcal{L}_{int} le terme supplémentaire, dit *terme d'interaction*, $j(x)\Phi$. Dans ce terme, $j(x)$ désigne une fonction réelle donnée des coordonnées d'espace-temps, dite *source extérieure*, dont on supposera qu'elle s'annule à l'infini : plus précisément, on supposera qu'il existe $R > 0$ tel que $t^2 + |\vec{x}|^2 > R^2$ implique $j(t, \vec{x}) = 0$. En particulier, la source s'annule partout si $t < -R$ et si $t > R$.

Les équations d'Euler-Lagrange (6.24) s'écrivent

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = j(x).\quad (7.71)$$

En comparant avec l'équation du mouvement du champ libre $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Phi(x) = 0$, on voit qu'il y a maintenant un second membre. Cette équation est analogue aux équations de Maxwell en présence de charges et de courants. De même que des charges en mouvement émettent un champ, c'est à dire des photons (cf. Sec. 4.2), il y aura ici création de particules. Ce phénomène, étudié du point de vue de la mécanique quantique relativiste, était l'objet de l'exercice 2.7.9, où notre formalisme ne nous permettait pas de considérer plus d'une particule. Nous pouvons maintenant nous affranchir de cette limitation.

7.6.2 Opérateurs “in” et “out”

Définition des opérateurs “in” et “out”

La source $j(x)$ n'agissant que pendant un temps fini, le champ $\Phi(x)$ est un champ libre avant (pour $t < -R$) et après (pour $t > R$). Dans chaque cas, nous pouvons décomposer le champ $\Phi(x)$ en modes propres. Nous appellerons $a_{\vec{p}\text{in}}$ les opérateurs d'annihilation pour $t < -R$ (champ entrant). Ils sont définis par l'équation (7.64), soit

$$a_{\vec{p}\text{in}} = i \int_{t \text{ fixe}, t \leq -R} \left(\phi_{\vec{p}}^*(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial t} - \frac{\partial \phi_{\vec{p}}^*(x)}{\partial t} \Phi(x) \right) d^3 \vec{x}.\quad (7.72)$$

On définit de manière analogue les opérateurs d'annihilation pour $t \geq R$ (champ sortant), notés $a_{\vec{p}\text{out}}$. Comme nous allons le voir, ils ne coïncident pas avec ceux du champ entrant.

On notera de même $\Phi_{\text{in}}(x)$ (respectivement $\Phi_{\text{out}}(x)$) le champ libre obtenu en remplaçant $a_{\vec{p}}$ par $a_{\vec{p}\text{in}}$ (resp. $a_{\vec{p}\text{out}}$) dans la décomposition (7.63) ; il coïncide avec $\Phi(x)$ pour $t < -R$ (resp. pour $t > R$).

Relation entre les opérateurs “in” et “out”

Pour obtenir la relation entre $a_{\vec{p}\text{in}}$ et $a_{\vec{p}\text{out}}$, nous utilisons la même technique que pour calculer les amplitudes de transition en mécanique quantique relativiste : nous introduisons le courant de transition

$$J^\mu(x) \equiv i [\phi_{\vec{p}}^*(x) (\partial^\mu \Phi(x)) - (\partial^\mu \phi_{\vec{p}}^*(x)) \Phi(x)].\quad (7.73)$$

D'après l'équation (7.72), les opérateurs $a_{\vec{p}\text{in}}$ et $a_{\vec{p}\text{out}}$ représentent les charges associées à ce courant pour $t < -R$ et $t > R$, respectivement.

En utilisant l'équation du mouvement (7.71) de $\Phi(x)$ et le fait que les $\phi_{\vec{p}}(x)$ sont solutions de l'équation de Klein-Gordon libre, on obtient

$$\partial_\mu J^\mu(x) = i \phi_{\vec{p}}^*(x) j(x).\quad (7.74)$$

L'équation (1.31) donne alors

$$a_{\vec{p}\text{out}} - a_{\vec{p}\text{in}} = i \int d^4 x \phi_{\vec{p}}^*(x) j(x) \equiv \lambda_{\vec{p}}\quad (7.75)$$

Les opérateurs “in” et “out” ne diffèrent donc que par un terme proportionnel à l’identité :

$$\lambda_{\vec{p}} \equiv i \int d^4x \phi_{\vec{p}}^*(x) j(x) = \frac{i}{\sqrt{2E_{\vec{p}}V}} \tilde{j}(E_{\vec{p}}, \vec{p}) \quad (7.76)$$

où, dans la dernière équation, nous avons utilisé l’expression de l’onde plane (2.14) et fait apparaître la transformée de Fourier $\tilde{j}(\omega, \vec{p})$ de la source $j(t, \vec{x})$.

7.6.3 Processus d’émission et d’absorption

Création de particules par une source

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : l’état initial est le vide, que nous noterons $|0, \text{in}\rangle$; quelle est alors la probabilité d’avoir, pour $t \rightarrow +\infty$, N particules d’impulsions $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N$?

L’état initial est vide par hypothèse, c’est à dire

$$a_{\vec{p}, \text{in}} |0, \text{in}\rangle = 0 \quad (7.77)$$

quel que soit \vec{p} . Rappelons que nous sommes dans la représentation de Heisenberg où l’état du système est par définition indépendant du temps, c’est à dire que $|0, \text{in}\rangle$ reste l’état du système pour t quelconque. Pour $t > R$, nous avons par conséquent, d’après l’équation (7.75),

$$a_{\vec{p}, \text{out}} |0, \text{in}\rangle = \lambda_{\vec{p}} |0, \text{in}\rangle \quad (7.78)$$

C’est un état propre de l’opérateur d’annihilation $a_{\vec{p}, \text{out}}$: c’est ce qu’on appelle un *état cohérent* du champ. L’étude de ses propriétés est l’objet de l’exercice 7.7.3, où on montre que la probabilité d’avoir n particules dans l’état \vec{p} est donnée par la loi de Poisson :

$$p_n = \frac{\bar{n}^n}{n!} e^{-\bar{n}} \quad (7.79)$$

où \bar{n} est la valeur moyenne de n , c’est à dire la valeur moyenne de l’opérateur $a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger a_{\vec{p}, \text{out}}$. De l’équation (7.78), on déduit immédiatement

$$\bar{n} = \langle 0, \text{in} | a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger a_{\vec{p}, \text{out}} |0, \text{in}\rangle = |\lambda_{\vec{p}}|^2 \quad (7.80)$$

Le nombre total moyen \bar{N} de particules créées est donc

$$\bar{N} = \sum_{\vec{p}} |\lambda_{\vec{p}}|^2. \quad (7.81)$$

$\lambda_{\vec{p}}$ coïncide naturellement avec l’amplitude de probabilité de création calculée en mécanique quantique relativiste, Eq. (2.100). Nous avons également obtenu une formule analogue pour l’amplitude de création d’un photon, Eq. (4.30), la seule différence provenant de la nature vectorielle du champ électromagnétique.

D’autre part, les modes d’impulsions \vec{p} différentes sont mutuellement indépendants (les opérateurs de création et d’annihilation de modes différents commutent entre eux). Or, si n_1 et n_2 sont deux variables aléatoires entières suivant des lois de Poisson de moyennes \bar{n}_1 et \bar{n}_2 , la loi de probabilité de $n_1 + n_2$ est aussi une loi de Poisson (de moyenne $\bar{n}_1 + \bar{n}_2$). Il en résulte que la distribution du nombre de particules créées dans n’importe quelle région de l’espace des phases est toujours une loi de Poisson. Ceci revient à dire que les photons émis par une source classique sont indépendants.

Emission induite ou stimulée

Supposons à présent que l’état initial $|i\rangle$ comporte n particules dans le mode d’impulsion \vec{p} :

$$|i\rangle = \frac{(a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \text{in}\rangle. \quad (7.82)$$

Calculons l’amplitude de probabilité pour que l’état final $|f\rangle$ en comporte une de plus :

$$|f\rangle = \frac{(a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} |0, \text{out}\rangle. \quad (7.83)$$

L'amplitude de transition s'écrit

$$\langle f|i\rangle = \langle 0, \text{out} | \frac{(a_{\vec{p}, \text{out}})^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{(a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \text{in}\rangle. \quad (7.84)$$

Utilisons l'équation (7.75) et supposons pour simplifier que la source $j(x)$ est une petite perturbation, ce qui permet de calculer l'amplitude de transition au premier ordre en $\lambda_{\vec{p}}$. On obtient alors

$$\langle f|i\rangle = (n+1)\lambda_{\vec{p}} \langle 0, \text{out} | \frac{(a_{\vec{p}, \text{in}})^n}{\sqrt{(n+1)!}} \frac{(a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \text{in}\rangle = \sqrt{n+1} \lambda_{\vec{p}} \langle 0, \text{out} |0, \text{in}\rangle \quad (7.85)$$

La probabilité de création d'une particule est donc proportionnelle à $n+1$: il est d'autant plus facile de créer des particules qu'il y en a déjà dans le système. Ce phénomène est à la base de l'effet laser, qui exploite aussi le fait que les particules créées sont exactement dans le même état quantique que les particules initialement présentes (des photons dans le cas du laser).

De même, en remplaçant $n+1$ par $n-1$ dans l'équation (7.83), on montre que la probabilité d'absorption d'une particule est proportionnelle à n , c'est à dire au nombre de particules initialement présentes, ce qui est intuitivement beaucoup plus évident que le facteur $n+1$ présent dans la probabilité d'émission.

7.6.4 Matrice S

Nous allons, pour clore ce chapitre, exprimer les résultats obtenus ci-dessus sous une forme un peu différente : c'est l'occasion d'introduire sur un exemple simple la notion de matrice S , qui joue un rôle important en théorie des champs.

Définition et propriétés générales

La matrice S est par définition une matrice unitaire ($S^\dagger = S^{-1}$) vérifiant pour tout \vec{p} l'identité suivante :

$$a_{\vec{p}, \text{out}} = S^{-1} a_{\vec{p}, \text{in}} S. \quad (7.86)$$

La même identité s'obtient pour les opérateurs de création $a_{\vec{p}}^\dagger$ en prenant l'hermitique conjuguée de cette équation. On en déduit en particulier

$$\Phi_{\text{out}}(x) = S^{-1} \Phi_{\text{in}}(x) S. \quad (7.87)$$

La matrice S permet de relier les états $|\text{in}\rangle$ aux états $|\text{out}\rangle$. Commençons par voir comment sont reliés les vides "in" et "out". Nous appliquons pour cela l'équation (7.86) à l'état $|0, \text{out}\rangle$:

$$a_{\vec{p}, \text{out}} |0, \text{out}\rangle = 0 = S^{-1} a_{\vec{p}, \text{in}} S |0, \text{out}\rangle. \quad (7.88)$$

En multipliant à gauche par S , on obtient $a_{\vec{p}, \text{in}} S |0, \text{out}\rangle = 0$, c'est à dire que $S |0, \text{out}\rangle = 0$ correspond au vide pour les opérateurs $a_{\vec{p}, \text{in}}$, à une phase près :

$$S |0, \text{out}\rangle = e^{i\alpha} |0, \text{in}\rangle \quad (7.89)$$

où α est un réel arbitraire : la définition de S , Eq. (7.86), contient également une phase arbitraire. La matrice S transforme donc le vide, $|0, \text{out}\rangle$, en l'état final du système, $|0, \text{in}\rangle$.

Considérons maintenant un état contenant une particule d'impulsion \vec{p} dans l'état initial :

$$\begin{aligned} |\vec{p}, \text{in}\rangle = a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger |0, \text{in}\rangle &= e^{-i\alpha} a_{\vec{p}, \text{in}}^\dagger S |0, \text{out}\rangle \\ &= e^{-i\alpha} S a_{\vec{p}, \text{out}}^\dagger |0, \text{out}\rangle = e^{-i\alpha} S |\vec{p}, \text{out}\rangle. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Ceci se généralise à n'importe quel contenu en particules : la matrice S transforme les états "out" en états "in", ce qu'on écrit de manière condensée

$$S |\text{out}\rangle = e^{i\alpha} |\text{in}\rangle. \quad (7.91)$$

Si on parvient à exprimer la matrice S en termes des opérateurs "in" ou "out", on obtient alors toutes les amplitudes de transition. Par exemple, l'amplitude de probabilité de créer une particule d'impulsion \vec{p} en partant du vide s'écrit

$$\langle \vec{p}, \text{out} |0, \text{in}\rangle = e^{-i\alpha} \langle \vec{p}, \text{in} | S |0, \text{in}\rangle = e^{-i\alpha} \langle \vec{p}, \text{out} | S |0, \text{out}\rangle. \quad (7.92)$$

Expression de la matrice S

Dans le cas qui nous intéresse, les opérateurs $a_{\vec{p},\text{out}}$ et $a_{\vec{p},\text{in}}$ ne diffèrent que par une constante additive, d'après l'équation (7.75). Par définition de la matrice S , Eq. (7.86), elle doit vérifier pour tout \vec{p}

$$S^{-1}a_{\vec{p},\text{in}}S = a_{\vec{p},\text{in}} + \lambda_{\vec{p}}. \quad (7.93)$$

Pour une valeur de \vec{p} particulière, une solution unitaire de cette équation est donnée par $S = S_{\vec{p}}$, avec (voir exercice 7.7.3) :

$$S_{\vec{p}} = \exp\left(\lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger - \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}}\right). \quad (7.94)$$

Cet opérateur laisse inchangés les modes d'impulsion différente de \vec{p} . Par conséquent, pour transformer tous les modes \vec{p} , il suffit d'effectuer le produit de toutes les transformations :

$$S \equiv \prod_{\vec{p}} S_{\vec{p}} = \exp\left(\sum_{\vec{p}} (\lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger - \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}})\right). \quad (7.95)$$

On peut mettre S sous une autre forme, moins explicite mais plus élégante, en utilisant l'expression de $\lambda_{\vec{p}}$, Eq.(7.75). On obtient alors

$$S \equiv \prod_{\vec{p}} S_{\vec{p}} = \exp\left(i \int d^4x j(x) \sum_{\vec{p}} (\phi_{\vec{p}}^*(x) a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger + \phi_{\vec{p}}(x) a_{\vec{p},\text{in}})\right). \quad (7.96)$$

On reconnaît dans cette expression la décomposition du champ libre (7.63), et on aboutit finalement à un résultat fort simple :

$$S = \exp\left(i \int d^4x j(x) \Phi_{\text{in}}(x)\right). \quad (7.97)$$

Donnons encore une forme différente de la matrice S , qui va nous être utile pour calculer les probabilités de création de particules. Nous partons de l'expression (7.95) et nous utilisons l'identité suivante (voir exercice 7.7.3), valable si A et B sont deux opérateurs linéaires commutant tous deux avec leur commutateur $[A, B]$:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}. \quad (7.98)$$

Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} S &= \exp\left(\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^*\right) \\ &= \exp\left(\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger\right) \exp\left(-\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}}\right) \exp\left(-\frac{\bar{N}}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.99)$$

où nous avons fait apparaître le nombre moyen de particules émises (7.81).

Amplitudes de transition

La matrice S permet de calculer facilement n'importe quelle amplitude de transition. Par exemple, l'amplitude de probabilité de créer des particules d'impulsion $\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n$ à partir du vide s'écrit, suivant l'équation (7.92) :

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \text{out} | 0, \text{in} \rangle = e^{-i\alpha} \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \text{in} | S | 0, \text{in} \rangle. \quad (7.100)$$

En utilisant l'expression (7.99), et le fait que $a_{\vec{p},\text{in}} | 0, \text{in} \rangle = 0$, il reste

$$\langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \text{out} | 0, \text{in} \rangle = e^{-i\alpha} \exp\left(-\frac{\bar{N}}{2}\right) \langle \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n, \text{in} | \exp\left(\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger\right) | 0, \text{in} \rangle. \quad (7.101)$$

En particulier, la probabilité de ne créer aucune particule est

$$|\langle 0, \text{out} | 0, \text{in} \rangle|^2 = \exp(-\bar{N}) \quad (7.102)$$

C'est le résultat attendu pour une loi de Poisson.

Produit normal

Une expression telle que (7.99), où tous les opérateurs de création sont à gauche et tous les opérateurs d'annihilation à droite, est pratique pour les calculs. On la retrouvera souvent en théorie des champs. On appelle *produit normal* un produit d'opérateurs réarrangé de cette façon. Le produit normal de aa^\dagger sera par exemple $a^\dagger a$, et on le note $:aa^\dagger: = :a^\dagger a: = a^\dagger a$. L'ordre des opérateurs dans un produit normal n'a pas d'importance : à partir du moment où on a mis tous les opérateurs de création ensemble, ils commutent entre eux, et idem pour les opérateurs d'annihilation. On notera ainsi

$$:S: = : \exp \left(\sum_{\vec{p}} (\lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger - \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}}) \right) : \equiv \exp \left(\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} a_{\vec{p},\text{in}}^\dagger \right) \exp \left(- \sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^* a_{\vec{p},\text{in}} \right). \quad (7.103)$$

Avec cette convention, l'équation (7.99) se réécrit

$$S = :S: \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^* \right), \quad (7.104)$$

Le théorème permettant d'exprimer un produit d'opérateurs en fonction de produits normaux est le théorème de Wick, qui sera étudié plus tard. Un cas particulier en est donné dans l'exercice 7.7.5.

7.7 Exercices

7.7.1 Commutateur de deux champs

En remplaçant $\phi_{\vec{p}}(x)$ par son expression dans l'équation (7.37), vérifier que dans la limite d'un grand volume V ,

$$[\Phi(x), \Phi^\dagger(x')] = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2E_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-x')} - e^{ip \cdot (x-x')} \right). \quad (7.105)$$

En déduire les commutateurs à temps égaux

$$\begin{aligned} [\Phi(t, \vec{x}), \Phi^\dagger(t, \vec{x}')] &= 0 \\ \left[\Phi(t, \vec{x}), \frac{\partial \Phi^\dagger}{\partial t}(t, \vec{x}') \right] &= -\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (7.106)$$

7.7.2 Onde plane

Soit un état à une particule $|\psi\rangle$ d'un champ scalaire $\Phi(x)$. On suppose que $|\psi\rangle$ est état propre de l'opérateur d'impulsion totale \vec{P} , avec la valeur propre \vec{p} . En utilisant la relation (7.57), montrer que la fonction d'onde $\psi(t, \vec{x})$ définie par l'équation (7.44) vérifie l'équation différentielle $-\vec{p}\psi(t, \vec{x}) = i\vec{\nabla}\psi(t, \vec{x})$. Intégrer cette équation différentielle. Que retrouve-t-on? On notera que ce résultat n'est pas limité à un champ libre, mais est très général.

7.7.3 États cohérents de l'oscillateur harmonique

Rappel : le hamiltonien d'un oscillateur harmonique de pulsation ω s'écrit $H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$, avec $[a, a^\dagger] = 1$.

Un état cohérent $|\lambda\rangle$ est par définition un état propre normalisé de l'opérateur a avec la valeur propre complexe λ :

$$\begin{aligned} a|\lambda\rangle &= \lambda|\lambda\rangle \\ \langle\lambda|\lambda\rangle &= 1. \end{aligned} \quad (7.107)$$

Nous allons construire les états cohérents par deux méthodes différents, qui conduisent aux mêmes résultats : la première méthode consiste à décomposer les états sur une base d'états propres du hamiltonien, dans une logique "à la Schrödinger"; la seconde méthode, qui sera utile pour le cours, est purement algébrique et repose sur les propriétés de commutation des opérateurs, suivant une démarche "à la Heisenberg". Une autre illustration de ces deux méthodes est donnée par l'exercice 7.7.4.

1. Décomposition sur la base des états propres du hamiltonien

Nous allons d'abord calculer comment l'état cohérent se décompose sur la base des états propres d'énergie de l'oscillateur harmonique $|n\rangle$, avec n entier naturel. Ces états s'obtiennent à partir de l'état fondamental par actions successives de l'opérateur de création a^\dagger

$$|n\rangle \equiv \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (7.108)$$

- a) Vérifier que l'état $|n\rangle$ ainsi défini est bien normalisé.
b) Vérifier que

$$\langle n|\lambda\rangle = \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|\lambda\rangle. \quad (7.109)$$

En déduire que

$$|\lambda\rangle = \langle 0|\lambda\rangle \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \quad (7.110)$$

- c) Déduire de la condition de normalisation que

$$\langle 0|\lambda\rangle = e^{i\alpha} e^{-|\lambda|^2/2}. \quad (7.111)$$

où α est un réel arbitraire. On choisira par convention $\alpha = 0$.

- d) Vérifier que dans un état cohérent, la loi de probabilité de n est une loi de Poisson de moyenne $|\lambda|^2$.
e) Récrire l'état cohérent sous la forme

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle. \quad (7.112)$$

2. Méthode algébrique

On pose

$$S \equiv \exp(\lambda a^\dagger - \lambda^* a). \quad (7.113)$$

- a) Montrer que S est unitaire.
b) *Lemme* : soit deux opérateurs A et B tels que $[A, B]$ commute avec A . Démontrer l'identité

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B]. \quad (7.114)$$

Indication : on introduira l'opérateur $C(\theta) = e^{\theta A} B e^{-\theta A}$, qu'on dérivera par rapport à θ .

- c) En déduire que

$$S^{-1} a S = a + \lambda. \quad (7.115)$$

- d) En déduire qu'on obtient un état cohérent normalisé en posant

$$|\lambda\rangle \equiv S|0\rangle. \quad (7.116)$$

3. Equivalence entre les deux résultats

Reste à vérifier que l'état cohérent défini par les équations (7.113) et (7.116) est en accord avec celui obtenu précédemment, Eq.(7.112).

- a) *Lemme* : Si A et B sont deux opérateurs linéaires commutant tous deux avec leur commutateur $[A, B]$, montrer que

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A, B]/2}. \quad (7.117)$$

Indication : on introduira l'opérateur $D(\theta) \equiv e^{\theta A} e^{\theta B} e^{-\theta^2 [A, B]/2}$ et on utilisera le lemme (7.114).

- b) En déduire que

$$S = e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} e^{-|\lambda|^2/2}. \quad (7.118)$$

En déduire l'équivalence cherchée entre les deux formes de $|\lambda\rangle$.

4. Fonction d'onde de l'état cohérent

On rappelle les expressions de l'opérateur de position et de l'opérateur d'impulsion de l'oscillateur harmonique :

$$\begin{aligned} X &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \\ P &= -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a - a^\dagger). \end{aligned} \quad (7.119)$$

- a) En utilisant la définition (7.107), calculer les valeurs moyennes $\langle X \rangle$ et $\langle P \rangle$ dans l'état cohérent.
 b) Récrire l'équation (7.113) sous la forme

$$S = \exp\left(\frac{i\langle P \rangle X - i\langle X \rangle P}{\hbar}\right). \quad (7.120)$$

- c) En utilisant les équations (7.116) et (7.117), en déduire que la fonction d'onde de l'état cohérent $\psi_\lambda(x) = \langle x|\lambda \rangle$ est reliée à celle de l'état fondamental $\psi_0(x) = \langle x|0 \rangle$ par

$$\psi_\lambda(x) = e^{i\theta} e^{i\langle P \rangle x/\hbar} \psi_0(x - \langle X \rangle) \quad (7.121)$$

où $\langle X \rangle$ et $\langle P \rangle$ sont les valeurs moyennes calculées plus haut, et θ est un réel indépendant de x . Quelle est donc la forme du paquet d'ondes ?

- d) En utilisant l'équation (7.112), montrer que l'état cohérent $|\lambda e^{-i\omega t}\rangle$, où λ est un complexe indépendant de t , est solution de l'équation de Schrödinger. Décrire l'évolution de la densité de probabilité au cours du temps.

7.7.4 Parité et conjugaison de charge

Nous allons construire explicitement les opérateurs qui effectuent les transformations de parité et de conjugaison de charge pour le champ scalaire.

Rappelons qu'en mécanique quantique, à tout opérateur unitaire U est associée une *transformation canonique* dans l'espace des états, qui à tout état $|\psi\rangle$ associe l'état $|\psi'\rangle = U|\psi\rangle$. L'image d'un opérateur a quelconque par cette transformation canonique est définie par $a' = UaU^{-1}$, de telle sorte que les éléments de matrice de a' dans la base transformée sont ceux de a dans l'ancienne base : $\langle\psi'_1|a'|\psi'_2\rangle = \langle\psi_1|U^\dagger(UaU^{-1})U|\psi_2\rangle = \langle\psi_1|a|\psi_2\rangle$.

1. Soit un oscillateur harmonique. On pose

$$U(\lambda) = e^{i\lambda a^\dagger a}, \quad (7.122)$$

où λ est un réel quelconque.

- a) Expliquer pourquoi $U(\lambda)$ est un opérateur unitaire.
 b) On note $a'(\lambda)$ l'image de l'opérateur a par la transformation canonique associée à $U(\lambda)$. Calculer l'action de $a'(\lambda)$ sur la base des $|n\rangle$, et en déduire que $a'(\lambda) = e^{-i\lambda}a$.
 c) Retrouver le résultat de la question précédente sans décomposer sur une base, en montrant directement que $da'/d\lambda = -i a'$.

2. Soit maintenant deux oscillateurs harmoniques indépendants, dont nous désignons par b et d les opérateurs d'annihilation.

- a) Vérifier que les opérateurs $a \equiv (b-d)/\sqrt{2}$ et $c \equiv (b+d)/\sqrt{2}$ ont aussi les relations de commutation de deux oscillateurs harmoniques indépendants.
 b) Soit la transformation canonique définie par

$$U = \exp(i\pi a^\dagger a) = \exp\left(\frac{i\pi}{2}(b^\dagger - d^\dagger)(b - d)\right). \quad (7.123)$$

En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que a est changé en son opposé par cette transformation canonique, tandis que c est inchangé. Que valent donc les images de b et d ?

3. La transformation de conjugaison de charge pour un champ scalaire complexe est par définition celle qui échange les opérateurs $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ pour tout \vec{p} . En utilisant ce qui précède, donner l'expression de l'opérateur unitaire U_C réalisant cette transformation.

4. La transformation de parité pour un champ scalaire réel est celle qui échange $a_{\vec{p}}$ et $a_{-\vec{p}}$. Donner l'expression de l'opérateur unitaire U_P réalisant cette transformation.

7.7.5 Théorème de Wick

Cet exercice est une application importante de l'équation (7.104).

1. En utilisant l'expression de $\lambda_{\vec{p}}$ donnée par l'équation (7.75), montrer que

$$\sum_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}} \lambda_{\vec{p}}^* = \int d^4x d^4y j(x)j(y) \langle 0|\Phi_{\text{in}}(x)\Phi_{\text{in}}(y)|0\rangle, \quad (7.124)$$

2. En utilisant l'expression (7.97) de l'opérateur S , en déduire que la décomposition en produit normal (7.104) s'écrit

$$\begin{aligned} \exp\left(i \int d^4x j(x)\Phi_{\text{in}}(x)\right) &= : \exp\left(i \int d^4x j(x)\Phi_{\text{in}}(x)\right) : \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y) \langle 0|\Phi_{\text{in}}(x)\Phi_{\text{in}}(y)|0\rangle\right). \end{aligned} \quad (7.125)$$

Rappelons que $\Phi_{\text{in}}(x)$ désigne un champ libre. En prenant la valeur moyenne de cette expression dans le vide, on obtient ainsi pour tout champ scalaire réel libre $\Phi(x)$, quelle que soit la fonction $j(x)$, l'identité

$$\langle 0|\exp\left(i \int d^4x j(x)\Phi(x)\right)|0\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^4x d^4y j(x)j(y) \langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle\right), \quad (7.126)$$

puisque le produit normal donne 1 par construction.

3. En développant cette équation en puissances de $j(x)$, montrer que la valeur moyenne dans le vide d'un produit d'un nombre arbitraire de champs $\langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_2)\cdots\Phi(x_N)|0\rangle$ (fonction à N points) s'exprime en fonction de la fonction à deux points $\langle 0|\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle$. Vérifier en particulier l'identité

$$\begin{aligned} \langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_2)\Phi(x_3)\Phi(x_4)|0\rangle &= \langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_2)|0\rangle \langle 0|\Phi(x_3)\Phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_3)|0\rangle \langle 0|\Phi(x_2)\Phi(x_4)|0\rangle \\ &+ \langle 0|\Phi(x_1)\Phi(x_4)|0\rangle \langle 0|\Phi(x_2)\Phi(x_3)|0\rangle. \end{aligned} \quad (7.127)$$

Chapitre 8

Quantification du champ de Dirac

Dans le chapitre précédent, nous avons construit pour chaque point de l'espace-temps un opérateur $\Phi(t, \vec{x})$ satisfaisant à l'équation de Klein-Gordon et vérifiant des relations de commutation canoniques locales. Dans ce chapitre, nous allons faire de même pour l'équation de Dirac. Malheureusement, nous ne pouvons pas suivre une démarche parallèle à celle du chapitre précédent en raison de deux différences fondamentales : d'une part, l'équation de Dirac est du premier ordre en temps, donc la quantification ne peut pas se faire directement à partir du lagrangien ; d'autre part, le champ de Dirac quantique ne peut s'obtenir par quantification d'une théorie hamiltonienne classique, ce qui est lié au caractère fermionique des particules qu'il décrit. Pour cette raison, nous commencerons ce chapitre par quelques généralités (sections 8.1 et 8.2). Nous quantifions ensuite le champ de Dirac.

8.1 Quantification des équations du premier ordre

Contrairement à l'équation de Klein-Gordon, l'équation de Dirac est du premier ordre en temps. Il est alors impossible de déduire directement le formalisme hamiltonien d'un formalisme lagrangien. En effet, les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

sont du premier ordre en temps si et seulement si $\partial L / \partial \dot{q}_i$ est indépendant des \dot{q}_i . Dans ce cas, on ne peut pas exprimer les \dot{q}_i en fonction des q_i et des $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$, ce qui est la condition pour écrire les équations du mouvement sous forme hamiltonienne.

La bonne façon d'effectuer la quantification canonique d'un tel système est d'écrire directement les équations du mouvement sous forme hamiltonienne, sans passer par un lagrangien. C'est à dire qu'il faut trouver un ensemble de variables dynamiques réelles q_j et p_j telles que l'équation de Dirac dans un volume V soit équivalente au système d'équations d'évolution soient de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \end{aligned} \tag{8.1}$$

où H est une fonction réelle des variables q_j et p_j . La théorie quantique s'obtient ensuite en imposant les relations de commutation canoniques :

$$\begin{aligned} [q_j, q_k] &= [p_j, p_k] = 0 \\ [q_j, p_k] &= i\delta_{j,k} \end{aligned} \tag{8.2}$$

dans un système d'unités où $\hbar = 1$. Comme nous le verrons, il y a une infinité de choix possibles pour q_j , p_j , H qui donnent les bonnes équations classiques du mouvement, mais qui ne conduisent pas tous à des théories quantiques équivalentes. Pour le champ de Dirac, nous imposerons de plus qu'il y ait un état fondamental (de plus basse énergie) bien défini, et que les observables construites à partir de $\Psi(\vec{x})$ commutent en des points différents, c'est à dire que la théorie soit locale.

Signalons que le lagrangien est néanmoins utile pour mettre en évidence les symétries de la théorie (invariance de Lorentz par exemple) et pour construire les quantités conservées au moyen du théorème de Noether (impulsion, charge, moment cinétique). Nous ne l'étudierons pas dans ce cours. Toutes les remarques ci-dessus s'appliquent à la seconde quantification de l'équation de Schrödinger, que nous n'étudierons pas non plus.

8.2 Quantification des variables normales

Un champ libre dans un volume donné peut toujours être décomposé en modes normaux, c'est à dire en modes de fréquences bien définies. Les amplitudes de ces modes deviennent, dans la théorie quantique, des opérateurs de création et d'annihilation, comme nous l'avons déjà constaté sur l'exemple du champ scalaire, Eq. (7.25). Avant d'étudier le cas particulier du champ de Dirac, nous allons donner quelques propriétés générales de ces amplitudes, dites *variables normales*.

8.2.1 Variable canonique complexe

Nous allons commencer par récrire les équations de Hamilton (8.1) sous une forme qui nous sera plus utile. Nous introduisons pour cela la variable complexe

$$a_j = \sqrt{\frac{\lambda}{2}} q_j + \frac{i}{\sqrt{2\lambda}} p_j, \quad (8.3)$$

où λ est une constante positive quelconque. On peut alors exprimer H en fonction des variables a_j et de leur complexe conjugué a_j^* , qu'on peut traiter formellement comme des variables indépendantes dans les opérations de différentiation. On exprime pour cela les q_j et les p_j en fonction des nouvelles variables :

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} (a_j + a_j^*) \\ p_j &= -i\sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_j - a_j^*). \end{aligned} \quad (8.4)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_j^*} &= \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial a_j^*} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial a_j^*} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{dp_j}{dt} + i\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \frac{q_j}{dt} = i \frac{da_j}{dt}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

En calculant de la même façon $\partial H/\partial a_j$, on obtient l'équation complexe conjuguée de celle-ci, qui est équivalente. Le changement de variables que nous avons effectué permet donc de remplacer les équations réelles (8.1) par les équations complexes

$$i \frac{da_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial a_j^*}. \quad (8.6)$$

Ces équations peuvent être choisies pour base du formalisme hamiltonien, au lieu des équations (8.1). Dans les nouvelles variables, en utilisant l'équation (8.3), les relations de commutations canoniques (8.2) deviennent

$$\begin{aligned} [a_j, a_k] &= 0 \\ [a_j, a_k^\dagger] &= \delta_{j,k}, \end{aligned} \quad (8.7)$$

où nous avons naturellement noté a_k^\dagger l'opérateur associé à la variable classique a_k^* .

8.2.2 Cas des variables normales

Un cas particulier important est celui des variables dont le comportement en temps est harmonique, $a_j(t) \propto e^{-i\omega_j t}$. On les appelle des variables *normales*. Leur équation d'évolution,

$$i \frac{da_j}{dt} = \omega_j a_j, \quad (8.8)$$

se met sous la forme canonique (8.6) avec

$$H = \sum_j \omega_j a_j^* a_j. \quad (8.9)$$

C'est simplement une collection d'oscillateurs harmoniques indépendants. Le hamiltonien du champ scalaire libre est bien de cette forme lorsqu'on l'exprime en fonction des amplitudes des modes propres, Eq. (7.27), à une constante additive près qui ne modifie pas les équations du mouvement.

Il n'est pas inutile de mentionner que c'est précisément en suivant la démarche ci-dessus que Dirac a quantifié le champ électromagnétique en 1927 : il commence par remarquer que le champ électromagnétique dans un volume quelconque se décompose en modes normaux de fréquences bien définies ; il met ensuite les équations d'évolution des amplitudes de ces modes sous la forme hamiltonienne (8.6), où H est donné par (8.9) ; il quantifie enfin la théorie avec les relations de commutation canoniques (8.7).

Si on veut que le hamiltonien soit borné inférieurement, il est important que les ω_j soient tous positifs. Notons que $a_j^*(t) \propto e^{i\omega_j t}$, c'est à dire que les a_j^* ont des fréquences opposées aux a_j . Par exemple, dans la décomposition du champ scalaire en modes normaux, Eq. (7.23), on a bien un opérateur d'annihilation b associé au terme de fréquence positive, et un opérateur de création d^\dagger associé au terme de fréquence négative.

Notons enfin qu'on peut multiplier a_j et a_j^* par une même constante réelle κ , et H par κ^2 , sans changer les équations du mouvement classique. En revanche, on obtient une théorie quantique différente, puisqu'on modifie les relations de commutation (8.7). Ce qui précède ne suffit pas à nous dire comment normaliser les a_j .

8.2.3 Variables normales en mécanique quantique

La mécanique quantique est plus générale que la mécanique classique et admet par conséquent des possibilités plus variées. Ainsi, dans la représentation de Heisenberg, en utilisant l'équation de Ehrenfest (7.5), on a $a(t) \propto e^{-i\omega t}$ si et seulement si

$$[a, H] = \omega a. \quad (8.10)$$

Une solution particulière de cette équation est bien sûr fournie par la quantification canonique de l'oscillateur harmonique, $H = \omega a^\dagger a$, avec $[a, a^\dagger] = 1$. Il en existe d'autres. Si on cherche à préserver le hamiltonien sous la forme $H = \omega a^\dagger a$, on peut déduire de l'équation (8.10) que les valeurs propres de $a^\dagger a$ sont $0, 1, \dots, N$ (voir exercice 8.5.1), mais le nombre $N + 1$ de niveaux est a priori arbitraire. Il est infini lorsque $[a, a^\dagger] = 1$.

Un autre cas important, mais qui n'a pas de limite classique, est celui du système à deux niveaux. Notons $|0\rangle$ le fondamental et $|1\rangle$ l'état excité, à ω au-dessus du fondamental. Dans cette base, la matrice de H s'écrit

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Posons

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.12)$$

On en déduit

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.13)$$

On vérifie, avec ces notations, l'équation $H = \omega a^\dagger a$, ainsi que l'équation (8.10).

Des équations (8.12) et (8.13), on déduit par ailleurs

$$\begin{aligned} a^2 &= 0 \\ aa^\dagger + a^\dagger a &= 1. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Notons que a et a^\dagger sont interchangeables dans ces deux équations, ce qui n'est pas le cas pour l'oscillateur harmonique. Si on échange a et a^\dagger , l'état $|0\rangle$ défini par $a|0\rangle = 0$ devient l'état excité, et $|1\rangle$ l'état fondamental.

8.2.4 Ensemble de systèmes à deux niveaux ; relations d'anticommutation

Considérons à présent un ensemble de N systèmes à deux niveaux indépendants, d'énergies d'excitation ω_j , avec $j = 1, \dots, N$. On écrit naturellement le hamiltonien sous la forme (8.9), où chacun des a_j vérifie les équations (8.14). Pour des systèmes indépendants, il paraît naturel de supposer que a_j commute avec a_k et a_k^\dagger pour $j \neq k$. Moyennant des changements de signe dans les matrices des a_j , il est en fait possible (voir exercice 8.5.2) de les construire de telle sorte qu'ils *anticommutent* au lieu de commuter. L'intérêt de ce choix est son élégance formelle : on obtient des relations analogues aux relations de commutation canoniques (8.7), mais où tous les commutateurs sont remplacés par des anticommutateurs.

$$\begin{aligned} \{a_j, a_k\} &= 0 \\ \{a_j, a_k^\dagger\} &= \delta_{j,k}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Le hamiltonien s'écrit toujours

$$H = \sum_{j=1}^N \omega_j a_j^\dagger a_j. \quad (8.16)$$

L'identité suivante, déjà utilisée dans le chapitre 3, est utile :

$$[A, BC] = \{A, B\}C - \{A, C\}B. \quad (8.17)$$

Elle permet d'écrire, en utilisant (8.15),

$$[a_j, a_k^\dagger a_k] = \{a_j, a_k^\dagger\} a_k - \{a_j, a_k\} a_k^\dagger = \delta_{j,k} a_k = \delta_{j,k} a_j \quad (8.18)$$

On en déduit que chacun des a_j vérifie une équation d'évolution analogue à (8.10) : $[a_j, H] = \omega_j a_j$.

8.3 Quantification du champ de Dirac libre

8.3.1 Décomposition en modes normaux

Le hamiltonien de l'équation de Dirac, $\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla}) + \beta m$, peut être diagonalisé dans une base orthonormée (par exemple une base d'ondes planes), c'est à dire qu'on peut trouver un ensemble de fonctions propres $\psi_\alpha(\vec{x})$ vérifiant

$$\left(\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla}) + \beta m \right) \psi_\alpha(\vec{x}) = E_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}), \quad (8.19)$$

qui traduit que $\psi_\alpha(\vec{x})$ est fonction propre d'énergie E_α (positive ou négative), et

$$\int \psi_\alpha^\dagger(\vec{x}) \psi_\beta(\vec{x}) d^3 \vec{x} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad (8.20)$$

qui traduit que les états sont normalisés et orthogonaux entre eux. Pour avoir une base de l'ensemble des états, il faut de plus vérifier la relation de complétude $\sum_\alpha |\psi_\alpha\rangle \langle \psi_\alpha| = 1$. En désignant par $\psi_{\alpha,a}(\vec{x})$ la $a^{\text{ème}}$ composante de $\psi_\alpha(\vec{x})$, avec $a = 1, \dots, 4$, cette relation de complétude s'écrit plus explicitement

$$\sum_\alpha \psi_{\alpha,a}(\vec{x}) \psi_{\alpha,b}^*(\vec{x}') = \delta_{a,b} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (8.21)$$

Une solution arbitraire de l'équation de Dirac libre peut être décomposée sur cette base. Nous cherchons à construire une théorie *quantique*, où chaque composante de $\Psi(t, \vec{x})$ soit un opérateur, donc les amplitudes de chacune des $\psi_\alpha(\vec{x})$ seront des opérateurs, de même que pour le champ scalaire. Nous écrivons cette décomposition sous la forme

$$\Psi(t, \vec{x}) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}) \begin{cases} b_\alpha(t) & \text{si } E_\alpha > 0 \\ d_\alpha^\dagger(t) & \text{si } E_\alpha < 0 \end{cases}. \quad (8.22)$$

L'équation de Dirac impose $b_\alpha(t) = e^{-iE_\alpha t} b_\alpha(0)$ et $d_\alpha^\dagger(t) = e^{-iE_\alpha t} d_\alpha^\dagger(0)$. Comme pour le champ scalaire (Eq. (7.23)) nous avons noté d_α^\dagger , et non d_α , l'amplitude associée à un mode de fréquence négative. Avec cette convention, $b_\alpha(t)$ et $d_\alpha(t)$ varient tous deux comme $e^{-i\omega t}$ avec $\omega > 0$ ($\omega = E_\alpha$ pour $b_\alpha(t)$ et $\omega = -E_\alpha$ pour $d_\alpha(t)$).¹

Les équations d'évolution de $b_\alpha(t)$ et $d_\alpha(t)$ peuvent être déduites du hamiltonien

$$H = \sum_{E_\alpha > 0} E_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} (-E_\alpha) d_\alpha^\dagger d_\alpha. \quad (8.23)$$

(cf. Eq. (8.16)), que nous choisissons entre les b et les d des relations de commutation, analogues aux Eq. (7.24) (en remplaçant \vec{p} par α), ou des relations d'anticommutation à temps égaux

$$\begin{aligned} \{b_\alpha(t), b_\beta^\dagger(t)\} &= \{d_\alpha(t), d_\beta^\dagger(t)\} = \delta_{\alpha,\beta} \\ \{b_\alpha(t), d_\beta(t)\} &= \{b_\alpha(t), b_\beta(t)\} = \{d_\alpha(t), d_\beta(t)\} = \{b_\alpha(t), d_\beta^\dagger(t)\} = 0. \end{aligned} \quad (8.24)$$

En choisissant, dans l'équation (8.22), de décomposer $\Psi(t, \vec{x})$ sur une base d'états propres *normalisés*, nous avons implicitement fixé la normalisation des amplitudes b_α et d_α . N'importe quel choix de normalisation nous aurait donné la bonne équation du mouvement pour $\Psi(t, \vec{x})$, mais le choix que nous avons fait nous permet en outre d'obtenir une théorie *locale*, comme nous allons le voir.

¹Notons la différence avec le chapitre 7, où les opérateurs $b_{\vec{p}}$ et $d_{\vec{p}}$ étaient définis de telle sorte qu'ils soient indépendants du temps. Nous adopterons la même convention plus loin dans ce chapitre car elle est pratique pour définir les états de particules, mais elle masque le fait que les b_α et les d_α sont les variables dynamiques du système.

8.3.2 Localité

Nous voulons que notre théorie soit *locale*, c'est à dire que des observables en des points différents de l'espace commutent à temps égaux. Choisissons les relations d'anticommutation ci-dessus et calculons l'*anticommutateur* entre deux composantes de $\Psi(t, \vec{x})$ ou $\Psi^\dagger(t, \vec{x})$ en des points différents. En utilisant la décomposition (8.22), on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \{\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b(t, \vec{x}')\} &= 0 \\ \{\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b^\dagger(t, \vec{x}')\} &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha,a}(\vec{x}) \psi_{\alpha,b}^*(\vec{x}') = \delta_{a,b} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \end{aligned} \quad (8.25)$$

où nous avons utilisé la relation de complétude (8.21). Les anticommutateurs sont tous nuls en des points différents. Or nous voulons que les observables commutent, et non qu'elles anticommutent. Mais les observables sont toujours des formes bilinéaires des composantes de Ψ et Ψ^\dagger . En utilisant l'identité (8.17), on en déduit qu'elles commutent bien en des points différents.

Si nous avons utilisé des commutateurs à la place des anticommutateurs, nous aurions un changement de signe dans l'équation (8.25).

$$\begin{aligned} [\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b(t, \vec{x}')] &= 0 \\ [\Psi_a(t, \vec{x}), \Psi_b^\dagger(t, \vec{x}')] &= \sum_{E_\alpha > 0} \psi_{\alpha,a}(\vec{x}) \psi_{\alpha,b}^*(\vec{x}') - \sum_{E_\alpha < 0} \psi_{\alpha,a}(\vec{x}) \psi_{\alpha,b}^*(\vec{x}'). \end{aligned} \quad (8.26)$$

A cause de ce signe, nous ne pouvons pas utiliser la relation de complétude (8.21) et le commutateur ne s'annule pas en des points différents.

De même, si nous avons choisi de quantifier le champ scalaire avec des anticommutateurs, nous aurions un signe + au lieu du signe – dans l'équation (7.37), et les anticommutateurs ne s'annuleraient pas en des points différents.

Dans le cas du champ scalaire comme du champ de Dirac, le choix entre les anticommutateurs et les commutateurs n'est pas arbitraire. Il nous est dicté par deux conditions : la positivité de l'énergie, qui nous impose d'associer un opérateur de création aux modes de fréquence négative, et la localité de la théorie.

8.4 Interprétation physique : particules et observables

8.4.1 Forme locale du hamiltonien

Nous avons déjà donné l'expression du hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, Eq. (8.23). On peut aussi l'exprimer en fonction du champ $\Psi(x)$:

$$H = \int \Psi^\dagger(\vec{x}) (\vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla}) + \beta m) \Psi(\vec{x}) d^3\vec{x}. \quad (8.27)$$

Remarquons que si $\Psi(\vec{x})$ désigne une fonction d'onde, et non plus un champ quantique, alors le second membre de cette équation est simplement la valeur moyenne du hamiltonien de Dirac dans l'état $\Psi(\vec{x})$. Pour vérifier que cette expression est équivalente à l'expression (8.23), on utilise la décomposition du champ (8.22), puis le fait que les $\psi_\alpha(\vec{x})$ sont des vecteurs propres du hamiltonien de Dirac, Eq. (8.19), et enfin qu'ils sont orthonormés, Eq. (8.20). On trouve ainsi

$$H = \sum_{E_\alpha > 0} E_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} E_\alpha d_\alpha d_\alpha^\dagger. \quad (8.28)$$

En utilisant les relations canoniques (8.24), il vient

$$H = \sum_{E_\alpha > 0} E_\alpha b_\alpha^\dagger b_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} (-E_\alpha) d_\alpha^\dagger d_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} E_\alpha. \quad (8.29)$$

Cette expression diffère de (8.23) par une constante, certes infinie, mais qui ne modifie pas les équations du mouvement.

8.4.2 Le vide et son énergie

Puisque les $b_\alpha^\dagger b_\alpha$ et $d_\alpha^\dagger d_\alpha$ valent 0 ou 1, et sont affectés de coefficients positifs dans l'équation (8.29), le *vide* $|0\rangle$, qui est par définition l'état fondamental, d'énergie la plus basse, sera celui pour lequel tous les $b_\alpha^\dagger b_\alpha$ et $d_\alpha^\dagger d_\alpha$ sont nuls, c'est à dire qu'il sera défini comme pour un champ scalaire : pour tout α , $b_\alpha |0\rangle = d_\alpha |0\rangle = 0$

L'énergie du vide, déduite de l'équation (8.29), vaut alors

$$\langle 0|H|0\rangle = \sum_{E_\alpha < 0} E_\alpha. \quad (8.30)$$

Remarquons qu'elle est négative pour le champ de Dirac, alors qu'elle était positive pour le champ scalaire, Eq. (7.30). Un intérêt des théories *supersymétriques*, qui associent à chaque boson un fermion, est que l'énergie du vide y est nulle.

8.4.3 Etats à une particule ; redéfinition de b_α et d_α

Comme pour le champ scalaire, un état à une particule dans l'état α est obtenu par action de b_α^\dagger sur le vide. Mais les opérateurs b_α^\dagger définis plus haut dépendent du temps ; or nous voulons, dans la représentation de Heisenberg, que les états physiques soient indépendants du temps. Nous effectuerons donc dans ce qui précède les substitutions

$$\begin{aligned} b_\alpha(t) &\rightarrow b_\alpha e^{-iE_\alpha t} \\ d_\alpha^\dagger(t) &\rightarrow d_\alpha^\dagger e^{-iE_\alpha t}, \end{aligned} \quad (8.31)$$

de telle sorte que les nouveaux opérateurs soient indépendants du temps. Cette redéfinition ne modifie pas les relations canoniques (8.24), et laisse inchangés les $b_\alpha^\dagger b_\alpha$ et $d_\alpha^\dagger d_\alpha$ dont dépend le hamiltonien (8.29). Avec cette nouvelle définition, l'équation (8.22) devient

$$\Psi(t, \vec{x}) = \sum_\alpha \psi_\alpha(t, \vec{x}) \begin{cases} b_\alpha & \text{si } E_\alpha > 0 \\ d_\alpha^\dagger & \text{si } E_\alpha < 0 \end{cases} \quad (8.32)$$

où les $\psi_\alpha(t, \vec{x})$ sont une base orthonormée d'états propres du hamiltonien de Dirac libre.

Les états à une particule sont alors définis par $b_\alpha^\dagger|0\rangle$ et les états à une antiparticule par $d_\alpha^\dagger|0\rangle$.

8.4.4 Principe d'exclusion de Pauli

L'interprétation du champ de Dirac quantifié en termes de particules est la même que pour le champ scalaire. A chaque solution d'énergie positive de l'équation de Dirac $\psi_\alpha(x)$ est associée un opérateur "nombre de particules dans l'état α ", $b_\alpha^\dagger b_\alpha$, chaque particule ayant l'énergie E_α ; à chaque solution d'énergie E_α négative est associée un opérateur "nombre d'antiparticules dans l'état α ", $d_\alpha^\dagger d_\alpha$. Ces antiparticules ont l'énergie positive $-E_\alpha$, en accord avec les interprétations de Feynman et de Dirac des états d'énergie négative. La différence fondamentale avec le champ scalaire, c'est que le nombre de particules ou d'antiparticules dans un état α ne peut valoir que 0 ou 1, ce qui est le principe d'exclusion de Pauli.

8.4.5 Charge, impulsion

On définit l'opérateur de courant $J^\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$. Il est conservé, $\partial_\mu J^\mu = 0$, pour les mêmes raisons que dans l'équation de Dirac non quantifiée, l'équation du mouvement étant la même. Cependant, nous allons voir que son interprétation physique est différente. Calculons pour cela la charge en utilisant les équations (8.22) puis (8.20), comme nous l'avons fait pour le hamiltonien :

$$\begin{aligned} Q &= \int J^0 d^3\vec{x} = \int \Psi^\dagger(\vec{x})\Psi(\vec{x})d^3\vec{x} \\ &= \sum_{E_\alpha > 0} b_\alpha^\dagger b_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} d_\alpha d_\alpha^\dagger \\ &= \sum_{E_\alpha > 0} b_\alpha^\dagger b_\alpha - \sum_{E_\alpha < 0} d_\alpha^\dagger d_\alpha + \sum_{E_\alpha < 0} 1. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Si on conserve cette définition, la charge du vide est infinie (voir exercice 8.5.3 pour une interprétation physique). Pour éviter cet inconvénient, on redéfinit l'opérateur Q en soustrayant cette constante infinie. De façon générale, pour qu'un opérateur agissant sur le vide donne la valeur 0, il suffit que tous les opérateurs d'annihilation soient à gauche des opérateurs de création. On peut toujours changer l'ordre d'un produit d'opérateurs (en changeant le signe si besoin dans le cas des fermions) pour que ce soit le cas. On appelle une telle opération un "produit normal", comme dans le chapitre précédent, et on le note en mettant deux points de chaque côté de l'opérateur. On définira ainsi le courant électrique par $J^\mu(x) =: \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) :$. Il

ne diffère de la définition précédente par une constante, donc l'équation de conservation est toujours vraie avec la nouvelle définition. La charge devient alors

$$\begin{aligned} Q &= \int : \Psi^\dagger(t, \vec{x}) \Psi(t, \vec{x}) : d^3 \vec{x} \\ &= \sum_{E_\alpha > 0} b_\alpha^\dagger b_\alpha - \sum_{E_\alpha < 0} d_\alpha^\dagger d_\alpha. \end{aligned} \quad (8.34)$$

En faisant cette opération de “produit normal”, on perd la propriété de positivité de Q . Son signe est maintenant négatif pour un état à une antiparticule. L'interprétation correcte de $J^\mu(x)$ n'est plus un courant de probabilité, comme dans le chapitre 3, mais un courant électrique (à une constante multiplicative e près).

Le calcul fait ci-dessus pour l'énergie et pour la charge se généralise immédiatement à toute autre constante du mouvement de la mécanique quantique relativiste, par exemple l'impulsion. On définira naturellement l'opérateur d'impulsion par

$$\vec{P} = \int \Psi^\dagger(t, \vec{x}) (-i \vec{\nabla}) \Psi(t, \vec{x}) d^3 \vec{x}. \quad (8.35)$$

Pour l'exprimer en fonction des opérateurs de création et d'annihilation, il suffit de choisir pour $\psi_\alpha(\vec{x})$ une base d'ondes planes, qui diagonalise simultanément \vec{P} et H . On trouve alors une expression analogue à (8.29), où E_α est remplacée par l'impulsion \vec{p}_α de l'onde plane. Comme pour l'énergie, l'impulsion de l'antiparticule a donc le signe opposé à l'impulsion de l'équation de Dirac, en accord avec l'interprétation des états d'énergie négative.

8.5 Exercices

8.5.1 Variables normales et niveaux d'énergie

1. Soit a un opérateur tel que $[a, H] = \omega a$, où H est un opérateur hermitique. Montrer que si $|\psi\rangle$ est vecteur propre de H avec la valeur propre E , alors $a|\psi\rangle$ est soit nul, soit vecteur propre de H avec la valeur propre $E - \omega$. De même, montrer que $a^\dagger|\psi\rangle$ est soit nul, soit vecteur propre de H avec la valeur propre $E + \omega$.

2. Montrer que les valeurs propres de $a^\dagger a$ sont réelles et positives, a désignant un opérateur quelconque. Montrer que $a^\dagger a|\psi\rangle = 0$ si et seulement si $a|\psi\rangle = 0$.

3. On suppose comme dans la première question que $[a, H] = \omega a$, et en outre que $H = \omega a^\dagger a$, où ω est un réel positif. En utilisant les résultats des deux questions précédentes, montrer que les valeurs propres de H sont espacées de ω à partir de 0.

8.5.2 Systèmes à deux niveaux

1. Soit a un opérateur vérifiant les relations (8.14). Montrer que $[a, a^\dagger]$ est hermitique, de carré 1, et anti-commute avec a et a^\dagger . Ecrire sa matrice dans la représentation (8.12).

2. Soit un ensemble de N opérateurs a_j , avec $j = 1, \dots, N$, vérifiant les relations (8.14) et commutant entre eux, c'est à dire

$$[a_j, a_k] = [a_j, a_k^\dagger] = 0 \quad (8.36)$$

pour $j \neq k$. On définit les opérateurs b_j par

$$b_j = a_j \prod_{k < j} [a_k, a_k^\dagger]. \quad (8.37)$$

Montrer que les b_j satisfont aux relations d'anticommutation canoniques (8.15),

8.5.3 Mer de Dirac

Les relations d'anticommutation canoniques (8.24) sont inchangées si on échange les opérateurs d_α avec leurs adjoints d_α^\dagger , ce qui ne serait pas si l'on avait des relations de commutation.

Echangeons donc d_α et d_α^\dagger dans tout ce chapitre. Comment s'exprime le hamiltonien en fonction des opérateurs “nombres de particules” $b_\alpha^\dagger b_\alpha$ et $d_\alpha^\dagger d_\alpha$? Définissons ensuite l'état “vide de particules” $|0'\rangle$ par $b_\alpha|0'\rangle = d_\alpha|0'\rangle = 0$ quel que soit α . Comment le vide physique $|0\rangle$, état de plus basse énergie de la théorie, s'obtient-il à partir de l'état $|0'\rangle$? Quelle relation voyez-vous avec l'interprétation de Dirac des états d'énergie négative, étudiée dans le chapitre 3?

Chapitre 9

Théorie des perturbations

Nous avons montré, dans les deux chapitres précédents, qu'un champ scalaire correspond à un nombre arbitraire de bosons identiques de spin nul, et qu'un champ de Dirac correspond à un nombre arbitraire de fermions identiques de spin $\frac{1}{2}$. Les interactions entre les particules résultent naturellement des interactions entre les champs qui leurs correspondent. Nous ne ferons ici qu'esquisser ce vaste sujet. Il y a quelques exemples de théories en interaction exactement solubles, comme l'interaction avec une source dans la section 7.6. Mais on doit plus souvent se contenter de résultats approchés : les amplitudes de probabilité des processus physiques se calculent au moyen de la théorie des perturbations, c'est à dire en les développant en puissances de l'interaction.

Pour les calculs de perturbation, on n'utilise pas en général la représentation de Heisenberg, comme dans les deux chapitres précédents, mais la représentation d'interaction, que nous définissons dans la section 9.1. Nous donnons ensuite quelques exemples de calculs de perturbation au premier ordre, dans la section 9.2. Ceci nous permettra d'une part de retrouver des résultats établis de façon heuristique dans les premiers chapitres ; d'autre part de décrire de nouveaux phénomènes physiques, notamment la radioactivité β dont nous dirons quelques mots.

Nous passerons ensuite aux calculs de perturbation d'ordre supérieur. Pour cela, il nous faudra introduire les propagateurs, comme en mécanique quantique relativiste. Nous verrons que le problème du choix du propagateur ne se pose pas en théorie des champs, où un propagateur particulier, dit "propagateur de Feynman", apparaît naturellement dans le formalisme. Nous nous contenterons d'une version très simplifiée du formalisme de la théorie des perturbations, et nous montrerons comment les diagrammes de Feynman apparaissent dans le cadre de la théorie des champs.

9.1 Représentation d'interaction

9.1.1 Définition

Jusqu'ici, nous avons utilisé la représentation de Heisenberg de la mécanique quantique, dans laquelle les vecteurs d'état $|\psi\rangle_H$ (où l'indice H fait référence à Heisenberg) sont indépendants du temps, et un opérateur \mathcal{O}_H dépend du temps suivant l'équation de Ehrenfest :

$$\begin{aligned}\frac{d|\psi\rangle_H}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mathcal{O}_H}{dt} &= -i[\mathcal{O}_H, H].\end{aligned}\tag{9.1}$$

Nous avons supposé, dans la dernière équation, que l'opérateur ne dépend pas *explicitement* du temps, mais qu'il n'en dépend qu'à travers les variables dynamiques (X et P dans le cas de la mécanique quantique, $\Phi(x)$ et $\partial\Phi/\partial t$ dans le cas de la théorie des champs).

Vous connaissez par ailleurs la représentation de Schrödinger, où c'est l'inverse : les opérateurs sont indépendants du temps, et les vecteurs d'état dépendent du temps :

$$\begin{aligned}\frac{d|\psi\rangle_S}{dt} &= -iH|\psi\rangle_S \\ \frac{d\mathcal{O}_S}{dt} &= 0.\end{aligned}\tag{9.2}$$

Ces deux représentations sont reliées par les équations

$$|\psi\rangle_H = e^{iHt}|\psi\rangle_S$$

$$\mathcal{O}_H = e^{iHt} \mathcal{O}_S e^{-iHt}. \quad (9.3)$$

En insérant ces équations dans (9.1), on retrouve en effet les équations (9.2), ce qui prouve l'équivalence entre ces deux formulations de la mécanique quantique. Mentionnons toutefois que si les mêmes équations s'appliquent formellement à la théorie des champs, une étude mathématique plus soignée montre que les deux représentations ne sont pas toujours équivalentes en raison du nombre infini de degrés de liberté. Pour plus de détails sur ce point (sans conséquence pratique pour ce cours d'introduction) nous renvoyons au livre de Dirac, *Lectures on Quantum Field Theory*, Academic Press, 1966.

La représentation d'interaction, que nous choisirons dans ce chapitre, est un intermédiaire entre la représentation de Schrödinger et la représentation de Heisenberg. On sépare le hamiltonien en deux termes (on peut choisir cette séparation comme on le souhaite) $H = H_0 + H_{\text{int}}$. La représentation d'interaction, que nous repérerons par un indice I , est définie à partir de la représentation de Schrödinger par

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_I &= e^{iH_0 t} |\psi\rangle_S \\ \mathcal{O}_I &= e^{iH_0 t} \mathcal{O}_S e^{-iH_0 t}. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Avec cette définition, nous voyons que H_0 garde la même expression dans la représentation d'interaction que dans la représentation de Schrödinger ; en particulier, il reste indépendant du temps. Par contre, H_{int} dépend du temps, et nous noterons simplement $H_I(t)$ sa valeur dans la représentation d'interaction :

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} H_{\text{int},S} e^{-iH_0 t}. \quad (9.5)$$

En utilisant les équations (9.2), on obtient alors facilement les équations

$$\begin{aligned} \frac{d|\psi\rangle_I}{dt} &= -iH_I(t)|\psi\rangle_I \\ \frac{d\mathcal{O}_I}{dt} &= -i[\mathcal{O}_I, H_0]. \end{aligned} \quad (9.6)$$

En comparant avec les équations définissant les représentations de Heisenberg et de Schrödinger, on voit que la représentation d'interaction est en quelque sorte "Heisenberg pour H_0 , et Schrödinger pour H_{int} ".

On choisit pour H_0 le hamiltonien du (ou des) champ(s) libre(s), et pour H_{int} les termes d'interaction entre ces champs. Les équations (9.6) montrent alors que les équations d'évolution des opérateurs, c'est à dire des champs, sont les mêmes que pour le champ libre. Par conséquent, la décomposition en ondes planes et les relations de commutations canoniques sont inchangées. Les interactions sont contenues dans l'évolution du vecteur d'état, que nous allons maintenant étudier.

9.1.2 Solution de l'équation d'évolution

Expliquons maintenant comment on résout l'équation différentielle.

$$\frac{d|\psi\rangle_I}{dt} = -iH_I(t)|\psi\rangle_I \quad (9.7)$$

avec des conditions initiales données en t_0 . Si $H_I(t)$ était un nombre, la solution serait simplement

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (9.8)$$

Mais les opérateurs $H_I(t)$ pour deux valeurs différentes de t ne commutent pas entre eux, donc ce n'est pas si simple. Nous allons commencer par remplacer cette équation différentielle par une équation intégrale qui lui est équivalente

$$|\psi(t)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle_I - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') |\psi(t')\rangle_I. \quad (9.9)$$

Cette équation est en effet valable pour $t = t_0$, et en la dérivant par rapport à t , on retrouve l'équation différentielle (9.7). Nous avons rencontré des équations intégrales analogues dans le chapitre 5, par exemple l'équation (5.21). Nous savons qu'elles se prêtent à un développement en puissances de l'interaction, ici H_I . Au premier ordre en H_I , on peut remplacer $|\psi(t')\rangle_I$ par $|\psi(t_0)\rangle_I$ dans le membre de droite :

$$|\psi(t)\rangle_I = \left(1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') \right) |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (9.10)$$

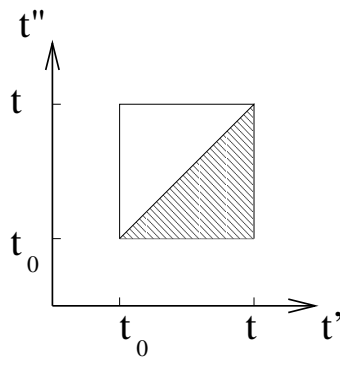


FIG. 9.1 – La région hachurée représente le domaine d’intégration de la perturbation au deuxième ordre, équation (9.11).

Au deuxième ordre, on remplace $|\psi(t')\rangle_I$ son expression au premier ordre dans le membre de droite de (9.9), ce qui donne

$$|\psi(t)\rangle_I = \left(1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' H_I(t') H_I(t'') \right) |\psi(t_0)\rangle_I, \quad (9.11)$$

et ainsi de suite. Ce qui est important dans la dernière équation, c’est l’ordre des opérateurs du dernier terme. On a toujours $t' > t''$, ce qui signifie que le produit $H_I(t')H_I(t'')$ est ordonné par temps décroissants. Le domaine d’intégration, représenté sur la figure 9.1, n’est pas commode. Si on intègre sur le carré $[t_0, t] \times [t_0, t]$, on rajoute une contribution similaire, à ceci près que l’ordre des opérateurs est inversé. Pour y remédier, on définit une opération qui remet les opérateurs dans le bon ordre : le T -produit de deux opérateurs $\mathcal{O}(t)$ dépendant du temps est défini par

$$T\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(t') = \theta(t - t')\mathcal{O}(t)\mathcal{O}(t') + \theta(t' - t)\mathcal{O}(t')\mathcal{O}(t), \quad (9.12)$$

où $\theta(t)$ désigne la fonction de Heaviside. Ce T -produit est tout simplement un produit ordonné dans l’ordre des temps décroissants. En utilisant cette notation, on peut écrire l’équation (9.11) sous la forme

$$|\psi(t)\rangle_I = \left(1 - i \int_{t_0}^t dt' H_I(t') + \frac{(-i)^2}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt' dt'' T H_I(t') H_I(t'') \right) |\psi(t_0)\rangle_I, \quad (9.13)$$

où le facteur $\frac{1}{2}$ compense le fait que nous avons doublé le domaine d’intégration. On reconnaît, au T -produit près, le développement de l’exponentielle de l’équation (9.8). De fait, en généralisant le T -produit à un produit de plusieurs champs, la solution générale de notre équation différentielle (9.7) s’écrit

$$|\psi(t)\rangle_I = T e^{-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'} |\psi(t_0)\rangle_I. \quad (9.14)$$

Dans ce qui suit, nous allons d’abord donner quelques exemples d’application de la théorie des perturbations du premier ordre, puis nous introduisons les propagateurs de Feynman, qui permettent de faire des calculs de perturbation aux ordres supérieurs.

9.2 Perturbations au premier ordre

Nous allons maintenant appliquer l’équation (9.10) à des calculs de perturbation au premier ordre. Nous allons ainsi retrouver des résultats déjà obtenus dans les chapitres précédents, ainsi que des résultats nouveaux.

9.2.1 Généralités

Nous supposons dans tout ce chapitre que le hamiltonien d’interaction $H_I(t)$ s’annule pour $t \rightarrow \pm\infty$. Alors les états entrants ($t \rightarrow -\infty$) et sortants ($t \rightarrow +\infty$), dits états “asymptotiques”, sont ceux de la théorie libre. Ils sont donc indépendants du temps, comme dans les deux chapitres précédents.

La réalité est bien plus complexe : un électron, même isolé, crée un champ électromagnétique et interagit avec celui-ci, donc l’interaction ne s’annule jamais. Ces complications font partie des difficultés de la théorie quantique des champs, et nous les laisserons de côté dans ce cours d’introduction.

Notons $|i\rangle$ l'état du système pour $t \rightarrow -\infty$, et cherchons à calculer l'amplitude de probabilité pour que le système soit dans un état $|f\rangle$ différent pour $t \rightarrow +\infty$. Par "différent", nous voulons dire qu'il vérifie $\langle f|i\rangle = 0$. Au premier ordre de la théorie des perturbations, nous pouvons appliquer l'équation (9.10) en prenant les limites $t \rightarrow +\infty$ et $t \rightarrow -\infty$. L'amplitude de transition s'écrit alors

$$\mathcal{A}_{fi} = -i\langle f|\int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t)|i\rangle. \quad (9.15)$$

On s'intéresse en général à des processus pour lesquels les états $|i\rangle$ et $|f\rangle$ contiennent un nombre déterminé de particules. Ces états s'obtiennent en faisant agir des opérateurs de création sur le vide $|0\rangle$. Pour calculer l'amplitude de transition, il suffit de calculer la valeur moyenne dans le vide d'un produit d'un certain nombre d'opérateurs. Le théorème de Wick, étudié en travaux dirigés, donne une façon systématique d'effectuer ce calcul, en se ramenant à des valeurs moyennes de produits de deux opérateurs.

9.2.2 Champ scalaire en interaction avec une source

Commençons par un exemple que nous avons résolu exactement dans la section 7.6, la création de particules par une source. A partir du lagrangien (7.70), le théorème de Noether donne l'expression de l'énergie : on trouve facilement que le hamiltonien d'interaction s'écrit

$$H_I(t) = -\int j(t, \vec{x})\Phi(t, \vec{x})d^3\vec{x}. \quad (9.16)$$

Supposons que l'état initial est le vide, $|0\rangle$, et calculons l'amplitude de création d'une particule d'impulsion \vec{p} , correspondant à un état final $|f\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger|0\rangle$. L'équation (9.15) donne l'amplitude de probabilité :

$$\mathcal{A}_{fi} = i\int d^4x\langle 0|a_{\vec{p}}\Phi(x)|0\rangle j(x). \quad (9.17)$$

En remplaçant $\Phi(x)$ par sa décomposition (7.63),

$$\mathcal{A}_{fi} = i\int d^4x\phi_{\vec{p}}^*(x)j(x) = \lambda_{\vec{p}}, \quad (9.18)$$

où $\lambda_{\vec{p}}$ est défini par l'équation (7.76). La probabilité de créer plus d'une particule est nulle au premier ordre. Ces résultats coïncident avec ceux obtenus précédemment, si on développe les équations (7.79) et (7.80) à l'ordre dominant en $\lambda_{\vec{p}}$.

9.2.3 Electrodynamique quantique

Création de photons

Considérons maintenant un processus formellement analogue, mais plus parlant physiquement, la création de photons par un courant classique $j^\mu(x)$, étudiée au chapitre 4. Le hamiltonien d'interaction correspondant est

$$H_I(t) = \int j_\mu(t, \vec{x})A^\mu(t, \vec{x})d^3\vec{x}, \quad (9.19)$$

dont l'analogie avec (9.16) est évidente. Nous n'avons pas eu le temps d'étudier la quantification du champ électromagnétique libre. En raisonnant par analogie avec le champ scalaire, Eq. (7.63), il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle est donnée par

$$A^\mu(x) = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \left(a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} A_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^\mu(x) + a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^\dagger A_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^{\mu*}(x) \right). \quad (9.20)$$

Dans cette équation, $A_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^\mu(x)$ désigne l'onde plane de polarisation ϵ^μ , d'impulsion \vec{k} et d'énergie positive, définie par l'équation (4.14), où nous l'avons notée $A_f^\mu(x)$; $a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^\dagger$ est l'opérateur de création d'un photon dans l'état correspondant. En raisonnant comme ci-dessus pour le champ scalaire, l'amplitude de probabilité de créer un photon de polarisation ϵ^μ et d'impulsion \vec{k} vaut

$$\mathcal{A}_{fi} = -i\int d^4x A_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^{\mu*}(x)j_\mu(x). \quad (9.21)$$

Ce résultat est identique à celui obtenu dans le chapitre 4, équation (4.29).

Diffusion d'une particule chargée par un champ extérieur

Le même hamiltonien d'interaction, (9.19), nous permet d'étudier l'interaction d'un électron avec un champ électromagnétique classique $A^\mu(x)$, étudiée au chapitre 3. Le courant j^μ associé à des électrons est un opérateur, comme on l'a vu dans la section 8.4.5. Nous le multiplions par la charge de l'électron, e , en accord avec la notion de courant électrique :

$$j^\mu(x) = e : \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) : \quad (9.22)$$

Calculons l'amplitude de transition d'un électron d'un état $|i\rangle$ vers un état $|f\rangle$. Elle s'obtient à partir des équations (9.15) et (9.19) qui donnent, pour un champ $A^\mu(x)$ classique,

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \int d^4x \langle f | j^\mu(x) | i \rangle A_\mu(x). \quad (9.23)$$

Cette expression est formellement analogue à l'amplitude obtenue dans les chapitres 2 et 3, Eq. (2.56), où $j^\mu(x)$ désignait le "courant de transition". Nous allons vérifier que ce courant de transition n'est autre que l'élément de matrice de l'opérateur de courant (9.22) entre l'état $|i\rangle$ et l'état $|f\rangle$, comme le suggère la comparaison entre les équations (2.56) et (9.23). Ceci nous permettra de comprendre plus simplement la conservation du courant de transition, que nous avons déjà constatée. Elle résulte naturellement de l'équation de l'opérateur de courant, $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$, qui entraîne une équation de conservation analogue pour n'importe lequel de ses éléments de matrice.

Pour la diffusion d'un électron, l'état initial est de la forme $|i\rangle = b_i^\dagger|0\rangle$ et l'état final $|f\rangle = b_f^\dagger|0\rangle$. Calculons l'élément de matrice de $j^\mu(x)$ entre ces deux états en utilisant la décomposition du champ (8.22) :

$$\begin{aligned} \langle f | j^\mu(x) | i \rangle &= e \langle 0 | b_f : \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) : b_i^\dagger | 0 \rangle. \\ &= e \psi_f(x) \gamma^\mu \psi_i(x) \end{aligned} \quad (9.24)$$

(le produit normal ne joue ici aucun rôle). C'est, comme prévu, le courant de transition de l'équation de Dirac, Eq. (3.88).

Création de paires

Calculons maintenant l'amplitude de probabilité de création de paires par le champ $A^\mu(x)$. L'état initial est à présent le vide, $|0\rangle$; l'état final de la forme $|f\rangle = b_\alpha^\dagger d_\beta^\dagger |0\rangle$, où α et β désignent deux solutions stationnaires du hamiltonien de Dirac, avec $E_\alpha > 0$ et $E_\beta < 0$. L'énergie de l'antiparticule est $-E_\beta$. L'amplitude de création de paires est par conséquent

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \langle 0 | d_\beta b_\alpha \int d^4x : \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) : A_\mu(x) | 0 \rangle, \quad (9.25)$$

ce qui donne un résultat analogue à l'amplitude de diffusion

$$\mathcal{A}_{fi} = -ie \int d^4x \bar{\psi}_\beta(x) \gamma^\mu \psi_\alpha(x) A_\mu(x), \quad (9.26)$$

résultat identique à celui obtenu dans le chapitre 3.

Synthèse

Nous avons remarqué, dans le chapitre 4, la similitude formelle entre l'amplitude de probabilité de création d'un photon, (4.29), et l'amplitude de diffusion d'une particule chargée, (2.56), valable pour les particules scalaires comme pour les particules de Dirac. Cette similitude pouvait paraître fortuite. Le formalisme dont nous disposons maintenant, la théorie quantique des champs, montre que cette analogie est en fait profonde. La diffusion d'un électron par un champ électromagnétique et la création d'un photon sont deux manifestations différentes d'un même phénomène physique : l'interaction du champ d'électrons $\Psi(x)$ avec le champ électromagnétique $A^\mu(x)$, décrite par le hamiltonien d'interaction (9.19). Cette théorie s'appelle l'électrodynamique quantique. Nous ne traiterons pas l'interaction d'un champ scalaire chargé avec le champ électromagnétique (correspondant aux processus étudiés dans le chapitre 2) qui est un peu plus complexe du fait que le terme d'interaction comprend des dérivées du champ.

9.2.4 Théorie ϕ^4

Soit maintenant un champ scalaire réel $\Phi(x)$ en interaction avec lui-même, suivant le hamiltonien

$$H_I(t) = \lambda \int : [\Phi(t, \vec{x})]^4 : d^3\vec{x}, \quad (9.27)$$

où λ est une constante réelle positive. Rappelons que $\Phi(x)$ a la dimension d'une énergie, de même que la fonction d'onde de Klein-Gordon, et que x est homogène à l'inverse d'une énergie. On en déduit que la constante de couplage λ est sans dimension. Calculons avec cette interaction l'amplitude de diffusion élastique de deux particules. Notons \vec{p}_1 et \vec{p}_2 les impulsions dans l'état initial, \vec{p}_3 et \vec{p}_4 les impulsions dans l'état final, différentes de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 . L'état initial est donc $|i\rangle = a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle$ et l'état final $|f\rangle = a_{\vec{p}_3}^\dagger a_{\vec{p}_4}^\dagger |0\rangle$. L'amplitude de transition au premier ordre s'écrit, en utilisant l'équation (9.15)

$$\mathcal{A}_{\text{fi}} = -i\lambda \int d^4x, \langle 0 | a_{\vec{p}_4} a_{\vec{p}_3} : \Phi(x)^4 : a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle. \quad (9.28)$$

L'élément de matrice a été calculé en travaux dirigés au moyen du théorème de Wick. Rappelons le résultat :

$$\langle 0 | a_{\vec{p}_4} a_{\vec{p}_3} : \Phi(x)^4 : a_{\vec{p}_1}^\dagger a_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = 24 \phi_{\vec{p}_4}^*(x) \phi_{\vec{p}_3}^*(x) \phi_{\vec{p}_1}(x) \phi_{\vec{p}_2}(x). \quad (9.29)$$

En reportant dans l'équation précédente, et en remplaçant les ondes planes de Klein-Gordon par leurs expressions, Eq. (2.14), on en déduit l'amplitude de diffusion

$$\mathcal{A}_{\text{fi}} = -24 i \lambda \delta^4(p_4 + p_3 - p_1 - p_2) \prod_{j=1}^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}_j} V}} \right). \quad (9.30)$$

La distribution de Dirac donne $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, c'est-à-dire que l'énergie et l'impulsion totale sont conservées.

9.2.5 Interactions faibles

La radioactivité β est l'émission d'un électron par un noyau atomique. On a longtemps pensé que cet électron était contenu initialement dans le noyau, formé de protons et d'électrons, et que la radioactivité ne faisait que le libérer. Mais la mécanique quantique permettait difficilement à des électrons de rester confinés dans un volume aussi petit que celui d'un noyau.

Fermi, guidé par une analogie avec l'émission de lumière par les atomes excités, que Dirac avait interprétée en 1927 comme la *création* d'un photon, émit en 1934 l'hypothèse que l'électron était également créé dans la radioactivité β . Il supposa que le processus fondamental à l'œuvre était la désintégration d'un neutron du noyau (le neutron avait été observé en 1932) en un proton, un électron et un antineutrino (alors appelé neutrino), particule neutre et de faible masse. C'est également dans cet article qu'il énonça la célèbre *règle d'or* pour calculer la probabilité de transition vers un continuum d'états finals.

Les particules intervenant dans la désintégration du neutron sont toutes de spin $\frac{1}{2}$, et nous désignons par Ψ_n , Ψ_p , Ψ_e et Ψ_ν les champs de Dirac associés respectivement au neutron, au proton, à l'électron et au neutrino. Fermi postula pour expliquer la radioactivité β le hamiltonien d'interaction

$$H_I(t) = G_F \int [\bar{\Psi}_p(t, \vec{x}) \gamma^\mu \Psi_n(t, \vec{x})] [\bar{\Psi}_e(t, \vec{x}) \gamma_\mu \Psi_\nu(t, \vec{x})] d^3\vec{x} + \text{hermitique conjugué} \quad (9.31)$$

où G_F désigne une constante de couplage et $\bar{\Psi}$ le spineur conjugué à Ψ . Il introduisit les matrices γ^μ par analogie avec le courant électrique. Le calcul de la désintégration du neutron au premier ordre de la théorie des perturbations avec cette interaction est l'objet du problème 9.5.2.

La théorie actuelle, dite "V-A" (mise au point en 1958) donne un hamiltonien d'interaction très proche de celui de Fermi, en remplaçant γ^μ par $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$, à quelques détails près.

9.3 Propagateurs de Feynman

Nous avons vu dans le chapitre 5 que les propagateurs permettent d'aller au-delà du premier ordre en théorie des perturbations. C'est aussi vrai en théorie des champs. Lorsqu'on fait de la théorie des perturbations au deuxième ordre, on doit former un T -produit, comme le montre l'équation (9.13). Le hamiltonien d'interaction H_I est en général un polynôme des champs et de leurs dérivées. Il apparaît donc des T -produits des champs. Les propagateurs ne sont autres que les valeurs moyennes de ces T -produits dans le vide, à un facteur $-i$ près. Ce propagateur n'est pas le propagateur retardé, mais un propagateur nouveau, le propagateur de Feynman.

9.3.1 Champ scalaire

Le propagateur de Feynman d'un champ est défini comme la valeur moyenne dans le vide d'un T -produit des composantes de ce champ, multipliée par $-i$. Pour un champ scalaire complexe :

$$G_F(x, y) = -i\langle 0|T\Phi(x)\Phi^\dagger(y)|0\rangle. \quad (9.32)$$

En raison de l'invariance par translation, il ne dépend que de la différence $x - y$, donc nous le calculerons pour y à l'origine des coordonnées. En explicitant le T -produit,

$$\begin{aligned} G_F(x) &= -i\langle 0|T\Phi(x)\Phi^\dagger(0)|0\rangle \\ &= -i\theta(t)\langle 0|\Phi(x)\Phi^\dagger(0)|0\rangle - i\theta(-t)\langle 0|\Phi^\dagger(0)\Phi(x)|0\rangle \end{aligned} \quad (9.33)$$

On peut remplacer $\theta(-t)$ par $1 - \theta(t)$, ce qui fait apparaître un commutateur :

$$G_F(x) = -i\theta(t)\langle 0|[\Phi(x), \Phi^\dagger(0)]|0\rangle - i\langle 0|\Phi^\dagger(0)\Phi(x)|0\rangle. \quad (9.34)$$

Nous allons montrer que le premier terme du membre de droite est tout simplement le propagateur retardé que nous avons déjà rencontré au chapitre 5. Le second terme, de même que le champ $\Phi(x)$, est solution de l'équation de Klein-Gordon sans second membre. La somme des deux termes est donc également un propagateur.

Posons donc

$$G_{\text{ret}}(x) = -i\theta(t)\langle 0|[\Phi(x), \Phi^\dagger(0)]|0\rangle \quad (9.35)$$

et vérifions qu'il s'agit bien du propagateur retardé. Il s'annule bien pour $t < 0$. Il ne nous reste donc qu'à montrer qu'il vérifie l'équation du propagateur (5.17) que nous rappelons :

$$(\square + m^2) G_{\text{ret}}(x) = -\delta^4(x). \quad (9.36)$$

Commençons par calculer la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial G_{\text{ret}}}{\partial t} = -i\delta(t)\langle 0|[\Phi(x), \Phi^\dagger(0)]|0\rangle - i\theta(t)\langle 0|\left[\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t}, \Phi^\dagger(0)\right]|0\rangle. \quad (9.37)$$

Le premier terme est nul. En effet, $\delta(t) = 0$ pour $t \neq 0$, et le commutateur $[\Phi(x), \Phi^\dagger(0)]$ s'annule pour $t = 0$ d'après les équations (7.41). Il ne reste donc que le deuxième terme. Dérivons une nouvelle fois par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 G_{\text{ret}}}{\partial t^2} = -i\delta(t)\langle 0|\left[\frac{\partial\Phi(x)}{\partial t}, \Phi^\dagger(0)\right]|0\rangle - i\theta(t)\langle 0|\left[\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial t^2}, \Phi^\dagger(0)\right]|0\rangle. \quad (9.38)$$

Le premier terme est nul pour $t \neq 0$, et pour $t = 0$ on peut utiliser les relations de commutation canoniques à temps égaux (7.41) :

$$\frac{\partial^2 G_{\text{ret}}}{\partial t^2} = -\delta(t)\delta^3(\vec{x}) - i\theta(t)\langle 0|\left[\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial t^2}, \Phi^\dagger(0)\right]|0\rangle. \quad (9.39)$$

Il ne reste qu'à dériver l'équation (9.35) par rapport à x , y et z . Ces dérivées n'agissent pas sur $\theta(t)$, donc

$$(\square + m^2) G_{\text{ret}}(x) = -\delta(t)\delta^3(\vec{x}) - i\theta(t)\langle 0|[(\square + m^2)\Phi(x), \Phi^\dagger(0)]|0\rangle. \quad (9.40)$$

Le champ $\Phi(x)$ étant solution de l'équation de Klein-Gordon, le deuxième terme s'annule, et on trouve le résultat cherché, (9.36).

Revenons au propagateur de Feynman. D'après les équations (9.34) et (9.35),

$$G_F(x) - G_{\text{ret}}(x) = -i\langle 0|\Phi^\dagger(0)\Phi(x)|0\rangle. \quad (9.41)$$

Calculons le membre de droite, qui est solution de l'équation de Klein-Gordon libre. En utilisant la décomposition du champ en ondes planes, Eq. (7.25), et les relations de commutation canoniques, Eq. (7.24), on trouve

$$-i\langle 0|\Phi^\dagger(0)\Phi(x)|0\rangle = -i\sum_{\vec{p}}\phi_{\vec{p}}(0)\phi_{\vec{p}}^*(x). \quad (9.42)$$

En utilisant l'expression des ondes planes, Eq.(2.14), on obtient

$$-i\langle 0|\Phi^\dagger(0)\Phi(x)|0\rangle = -i\sum_{\vec{p}}\frac{1}{2E_{\vec{p}}V}e^{iE_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}}. \quad (9.43)$$

Le propagateur de Feynman diffère donc du propagateur retardé par un terme de fréquence négative $-E_{\vec{p}}$. En revenant à la définition (9.33), et en procédant comme ci-dessus, on montrerait que le propagateur de Feynman est en quelque sorte un propagateur “retardé pour les énergies positives et avancé pour les énergies négatives”. Ceci est cohérent avec l’interprétation de Feynman des états d’énergie négative étudiée au chapitre 2 : puisqu’un état d’énergie négative à la fin correspond à une antiparticule au début, le principe de causalité appliqué aux antiparticules montre que les états d’énergie négative doivent vérifier une causalité inversée, que traduit le propagateur avancé. Notons aussi que le propagateur de Feynman, contrairement au propagateur avancé et au propagateur retardé, est non nul même à l’extérieur du cône de lumière, c’est à dire lorsque l’intervalle x entre les deux points est de genre espace.

Notons enfin que pour un champ scalaire complexe, $\langle 0|T\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle = 0$ quels que soient x et y . Pour un champ scalaire réel, par contre, ce n’est pas le cas. Le propagateur de Feynman a la même valeur que pour le champ scalaire complexe et son expression en fonction du champ est donné par

$$G_F(x, y) = -i\langle 0|T\Phi(x)\Phi(y)|0\rangle, \quad (9.44)$$

au lieu de (9.32) pour un champ complexe.

En transformée de Fourier, le propagateur de Feynman s’écrit

$$\tilde{G}_F(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (9.45)$$

avec $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$. La vérification de cette formule est l’objet de l’exercice 9.5.1. On comparera cette expression avec celle du propagateur retardé, Eq. (5.19). Les pôles du propagateur de Feynman sont situés en $p^0 = E_{\vec{p}} - i\epsilon$ et en $p^0 = -E_{\vec{p}} + i\epsilon$, ce qui est une autre façon de voir que la propagation est retardée pour les états d’énergie positive, et avancée pour les états d’énergie négative.

9.3.2 Champ de Dirac

Le propagateur de Feynman du champ de Dirac est une matrice 4×4 . Nous noterons $(S_F)_{ab}$, avec $1 \leq a, b \leq 4$ un élément de cette matrice. Elle est définie par

$$(S_F)_{ab}(x, y) = -i\langle 0|T\Psi_a(x)\Psi_b^\dagger(y)|0\rangle, \quad (9.46)$$

analogue à la définition choisie pour le champ scalaire, Eq. (9.32).

Pour le calculer, nous suivons une démarche analogue. En raison de l’invariance par translation, il ne dépend que de la différence $x - y$ donc nous le calculerons pour $y^\mu = 0$. En explicitant le T -produit,

$$\begin{aligned} (S_F)_{ab}(x) &= -i\langle 0|T\Psi_a(x)\Psi_b^\dagger(0)|0\rangle \\ &= -i\theta(t)\langle 0|\Psi_a(x)\Psi_b^\dagger(0)|0\rangle + i\theta(-t)\langle 0|\Psi_b^\dagger(0)\Psi_a(x)|0\rangle. \end{aligned} \quad (9.47)$$

On remplace $\theta(-t)$ par $1 - \theta(t)$, ce qui fait apparaître un anticommutateur :

$$(S_F)_{ab}(x) = -i\theta(t)\langle 0|\{\Psi_a(x), \Psi_b^\dagger(0)\}|0\rangle + i\langle 0|\Psi_b^\dagger(0)\Psi_a(x)|0\rangle. \quad (9.48)$$

Posons maintenant

$$(S_{\text{ret}})_{ab}(x) = -i\theta(t)\langle 0|\{\Psi_a(x), \Psi_b^\dagger(0)\}|0\rangle, \quad (9.49)$$

et vérifions qu’il s’agit bien du propagateur retardé du champ de Dirac, tel qu’il a été défini dans le chapitre 5. S_{ret} est bien nul pour $t < 0$, donc il ne reste qu’à vérifier qu’il vérifie l’équation du propagateur

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - H_D\right) S_{\text{ret}}(x) = \delta^4(x), \quad (9.50)$$

où $H_D = \vec{\alpha} \cdot (-i\vec{\nabla}) + \beta m$ est le hamiltonien de l’équation de Dirac libre, et la matrice identité 4×4 est sous-entendue dans le membre de droite.

Tout d’abord, le champ $\Psi(x)$ vérifie l’équation de Dirac libre

$$\left(i\delta_{ca}\frac{\partial}{\partial t} - (H_D)_{ca}\right) \Psi_a(x) = 0 \quad (9.51)$$

où nous avons explicité les indices de Dirac, et la sommation sur a est sous-entendue. On déduit de cette équation que la valeur moyenne dans le vide de l’anticommutateur,

$$A_{ab}(x) = \langle 0|\{\Psi_a(x), \Psi_b^\dagger(0)\}|0\rangle, \quad (9.52)$$

vérifie également l'équation de Dirac libre

$$\left(i\delta_{ca} \frac{\partial}{\partial t} - (H_D)_{ca} \right) A_{ab}(x) = 0, \quad (9.53)$$

soit plus simplement, sous forme matricielle,

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_D \right) A(x) = 0. \quad (9.54)$$

Les équations (9.49) et (9.52) permettent d'écrire $S_{\text{ret}}(x) = -i\theta(t)A(x)$. En dérivant par rapport au temps, il vient

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_D \right) S_{\text{ret}}(x) = \delta(t)A(x) + \theta(t) \left(i \frac{\partial}{\partial t} - H_D \right) A(x) = \delta(t)A(x). \quad (9.55)$$

Les relations d'anticommutation canoniques (8.25) donnent enfin, pour $t = 0$, $A(0, \vec{x}) = \delta^3(\vec{x})$, avec la matrice identité 4×4 sous-entendue dans le membre de droite. On en déduit le résultat cherché, (9.50).

Revenons au propagateur de Feynman. D'après les équations (9.48) et (9.49), il est relié au propagateur retardé par

$$(S_F)_{ab}(x) - (S_{\text{ret}})_{ab}(x) = i\langle 0 | \Psi_b^\dagger(0) \Psi_a(x) | 0 \rangle, \quad (9.56)$$

relation analogue à celle obtenue pour le champ scalaire, (9.41). Décomposons $\Psi_b^\dagger(0)$ et $\Psi_a(x)$ sur une base orthonormée des solutions de l'équation de Dirac, suivant l'équation (8.22). Les opérateurs d'évolution $b_\alpha(t)$ et $d_\alpha^\dagger(t)$ sont proportionnels à $e^{-iE_\alpha t}$. En utilisant les relations d'anticommutation canoniques à temps égaux (8.24), la différence entre le propagateur de Feynman et le propagateur retardé s'écrit

$$(S_F)_{ab}(x) - (S_{\text{ret}})_{ab}(x) = i \sum_{E_\alpha < 0} \psi_{\alpha,b}^\dagger(\vec{0}) \psi_{\alpha,a}(\vec{x}) e^{-iE_\alpha t}, \quad (9.57)$$

soit, sous forme matricielle,

$$S_F(x) - S_{\text{ret}}(x) = i \sum_{E_\alpha < 0} \psi_\alpha(\vec{x}) \psi_\alpha^\dagger(\vec{0}) e^{-iE_\alpha t}, \quad (9.58)$$

Comme pour le champ scalaire, la différence provient des états d'énergie négative $E_\alpha < 0$, dont le sens de propagation est inversé.

En transformée de Fourier, le propagateur de Feynman s'écrit

$$\tilde{S}_F(p) = (p^0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m) \tilde{G}_F(p) = \frac{p^0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (9.59)$$

La vérification de cette formule est l'objet de l'exercice 9.5.1. On comparera cette expression avec celle du propagateur retardé, Eq. (5.29).

9.4 Théorème de Wick et règles de Feynman

Nous allons enfin pouvoir expliquer, arrivés au terme de ce cours d'introduction, comment la théorie des champs permet de justifier les règles de Feynman que nous avons survolées dans le chapitre 5.

Par exemple, une amplitude de transition au deuxième ordre de la théorie des perturbations s'obtient à partir de l'équation (9.13) en prenant les limites $t_0 \rightarrow -\infty$ et $t \rightarrow +\infty$, comme au premier ordre. En ne gardant que le terme d'ordre deux :

$$\mathcal{A}_{\text{fi}} = \frac{(-i)^2}{2} \langle f | \int_{-\infty}^{+\infty} dt dt' T H_I(t) H_I(t') | i \rangle. \quad (9.60)$$

L'état initial et l'état final s'obtiennent en faisant agir des opérateurs de création sur le vide ; l'interaction H_I est en général une fonction polynomiale des champs. On est ainsi amené à calculer la valeur moyenne dans le vide d'un produit d'opérateurs de champs. Le théorème de Wick, étudié en travaux dirigés, permet d'écrire cette valeur moyenne comme une somme de termes. Il y a autant de termes que de façons de regrouper tous les opérateurs par paires. La contribution de chaque terme est le produit des valeurs moyennes dans le vide des paires, avec un facteur correspondant au signe de la permutation pour les fermions.

La contribution de chaque terme est représentée par un diagramme de Feynman de la façon suivante : chaque opérateur est représenté par un point, et on regroupe en un même "vertex" l'ensemble des opérateurs

appartenant à un facteur donné $H_I(t)$; chaque paire d'opérateurs est représentée par une ligne reliant les deux points correspondants. Les lignes internes du diagramme sont celles reliant entre eux deux vertex, et les lignes externes sont celles qui ne sont reliées qu'à un vertex, ce qui veut dire qu'un des deux opérateurs est un opérateur de création définissant $|i\rangle$ à partir de $|0\rangle$, ou un des opérateurs d'annihilation définissant $\langle f|$ à partir de $\langle 0|$. Les paires formées entre un opérateur de création de l'état initial et un opérateur d'annihilation de l'état final donnent une contribution nulle, sauf si une particule continue en ligne droite.

Le théorème de Wick dit qu'on doit grouper les paires de toutes les façons possibles, ce qui signifie qu'il faut tracer tous les diagrammes possibles à un ordre donné de la théorie des perturbations (c'est à dire, pour un nombre de vertex donné). La contribution de chaque diagramme est le produit des contributions de ses divers éléments, lignes et vertex.

L'expression de H_I détermine quels types de vertex sont possibles. Par exemple, pour le hamiltonien d'interaction de l'électrodynamique quantique, $\int d^3\vec{x}\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)A_\mu(x)$, il y a deux opérateurs de Dirac et un opérateur de photon. Il y aura donc exactement deux lignes d'électron (on met en outre une flèche sur la ligne pour distinguer entre $\bar{\Psi}$ et Ψ) et une ligne de photon issues de chaque vertex. Pour le hamiltonien (9.27), il y aura exactement quatre lignes de champ scalaire pour chaque vertex.

Enfin, expliquons comment on détermine le poids associé aux lignes et aux vertex. Les lignes internes correspondent à la valeur moyenne dans le vide d'un T -produit. Leur poids dans le diagramme est donc i multiplié par le propagateur de Feynman du champ correspondant. Les lignes externes sont des valeurs moyennes du type $\langle 0|\Phi(x)a_k^\dagger|0\rangle$ pour une particule entrante, ce qui donne la fonction d'onde de la particule, et $\langle 0|a_k\Phi(x)|0\rangle$ pour une particule sortante, ce qui donne le complexe conjugué de la fonction d'onde, comme on pouvait s'y attendre. Enfin, à chaque vertex est associé un facteur $-i$ (cf. Eq. (9.14)) ainsi que les constantes de couplage apparaissant dans H_I .

9.5 Exercices et problèmes

9.5.1 Propagateurs de Feynman en représentation d'impulsion

Champ scalaire

a) A partir des équations (5.19) et (9.45), vérifier que

$$\tilde{G}_F(p) - \tilde{G}_{\text{ret}}(p) = -2i\pi\theta(-p^0)\delta(p^2 - m^2). \quad (9.61)$$

On utilisera l'identité

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon} \right) = 2i\pi\delta(x) \quad (9.62)$$

(cf. exercice 5.6.5, Eq. (5.64)).

b) En déduire que

$$\tilde{G}_F(p) - \tilde{G}_{\text{ret}}(p) = -2i\pi \frac{1}{2E_{\vec{p}}} \delta(p^0 + E_{\vec{p}}). \quad (9.63)$$

c) En prenant la transformée de Fourier inverse de cette équation, vérifier qu'on retrouve l'équation (9.41).

Champ de Dirac

On pose

$$\tilde{S}_F(p) = (p^0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\tilde{G}_F(p). \quad (9.64)$$

En comparant avec l'équation (5.29), vérifier que

$$\tilde{S}_F(p) - \tilde{S}_{\text{ret}}(p) = (p^0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)(-2i\pi)\theta(-p^0)\delta(p^2 - m^2). \quad (9.65)$$

En déduire que

$$\tilde{S}_F(p) - \tilde{S}_{\text{ret}}(p) = \frac{E_{\vec{p}} - \vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta m}{2E_{\vec{p}}} (2i\pi)\delta(p^0 + E_{\vec{p}}). \quad (9.66)$$

En prenant la transformée de Fourier inverse de cette équation, vérifier qu'on retrouve l'équation (9.58). On choisira pour $\psi_\alpha(\vec{x})$ de la forme $\frac{1}{\sqrt{2E_{\vec{p}}V}} v e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$, et on utilisera l'équation (3.24) pour la somme sur les spins.

9.5.2 Théorie de Fermi de la radioactivité β

Dans ce problème, nous allons étudier quelques conséquences de la théorie de Fermi, brièvement exposée dans la section 9.2.5. Nous nous limiterons pour simplifier à la désintégration du neutron libre, dont la durée de vie est $885,7 \pm 0,8$ secondes, soit environ un quart d'heure. Nous allons calculer le spectre des électrons émis, c'est à dire leur distribution en énergie.

1. Cinématique

a) On se place dans le référentiel de repos du neutron. Expliquer pourquoi il est nécessaire de postuler l'existence du neutrino pour expliquer le spectre continu des électrons émis. Cette hypothèse fut émise par Pauli en 1930, et le neutrino ne fut observé qu'en 1956.

b) Expliquer pourquoi la probabilité de désintégration ne peut dépendre que de l'énergie de l'électron, E_e , et de l'angle θ entre sa direction et celle du neutrino.

c) La différence de masse entre neutron et proton vaut $\Delta = m_n - m_p \simeq 1,293$ MeV, assez grande pour pouvoir émettre un électron, de masse $m_e \simeq 0,511$ MeV, et un neutrino ($m_\nu < 3$ eV), mais très petite devant la masse du proton $m_p \simeq 938$ MeV. Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie cinétique emportée par le proton? On négligera cette énergie, dite de recul, dans tout le problème.

2. Analyse qualitative

a) Expliquer pourquoi le hamiltonien de Fermi permet *a priori* la désintégration $n \rightarrow pe^- \bar{\nu}$, où $\bar{\nu}$ désigne l'antineutrino.

b) Ecrire le terme "hermitique conjugué" du hamiltonien, et montrer qu'il permet également la radioactivité β^+ , qui est le processus $p \rightarrow ne^+ \nu$ dans un noyau. Ce processus fut observé par les Joliot-Curie également en 1934, et Wick remarqua qu'il pouvait être expliqué par la théorie de Fermi. Il prédit un troisième processus, la *conversion interne* d'un électron du nuage électronique, $pe^- \rightarrow n\nu$, observé peu après. Expliquer pourquoi certains noyaux se désintègrent uniquement par conversion interne.

c) Quelle est la dimension de la constante de couplage G_F dans un système d'unités où $\hbar = c = 1$?

3. Probabilité de transition

a) Notons $\psi_i(\vec{x})$ les fonctions d'onde normalisées des 4 particules intervenant dans le processus, supposées états propres du hamiltonien de Dirac. Montrer que l'amplitude de transition vaut

$$\mathcal{A}_{fi} = -iG_F 2\pi \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \int [\bar{\psi}_p(\vec{x}) \gamma^\mu \psi_n(\vec{x})] [\bar{\psi}_e(\vec{x}) \gamma_\mu \psi_\nu(\vec{x})] d^3\vec{x}. \quad (9.67)$$

On a noté E_ν l'énergie de l'antineutrino.

b) On utilise la représentation de Dirac des matrices γ^μ . Le neutron et le proton étant quasiment au repos, leur fonction d'onde est alors de la forme

$$\psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \phi(\vec{x}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.68)$$

Expliquer pourquoi seul le terme $\mu = 0$ contribue à l'amplitude de transition. On choisit l'axe z suivant la direction du spin du neutron. Montrer que l'amplitude de transition s'annule si le proton est polarisé suivant $-z$. On le supposera donc aussi polarisé suivant z .

c) On choisit pour les fonctions d'ondes des ondes planes. Montrer que l'amplitude de transition s'écrit, dans le référentiel de repos du neutron,

$$\mathcal{A}_{fi} = -i \frac{G_F}{V^2} \frac{u_e^\dagger v_\nu}{\sqrt{2E_e} \sqrt{2E_\nu}} (2\pi)^4 \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu). \quad (9.69)$$

d) Calculer la probabilité de transition par unité de temps dp_{fi}/dt . Sommer sur les polarisations de l'électron et de l'antineutrino. Vérifier que

$$\frac{dp_{fi}}{dt} = \frac{G_F^2}{V^3} \left(1 + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu - m_e m_\nu}{E_e E_\nu} \right) (2\pi)^4 \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu). \quad (9.70)$$

4. Spectre des électrons – temps de vie :

a) Sommer la probabilité de transition par unité de temps sur les états finals. Intégrer sur l'impulsion du proton puis sur l'énergie du neutrino, et vérifier que le nombre de transitions par unité de temps dans $d^3\vec{p}_e d\cos\theta$ vaut

$$d\Gamma = d^3\vec{p}_e d\cos\theta \frac{G_F^2}{(2\pi)^4} p_\nu E_\nu \left(1 + \frac{p_e p_\nu \cos\theta - m_e m_\nu}{E_e E_\nu} \right) \quad (9.71)$$

où $E_\nu = \Delta - E_e$ et $p_\nu = \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}$.

b) Intégrer sur θ . Dans le cas où le neutrino est de masse nulle, vérifier que $(d\Gamma/d^3\vec{p}_e)^{1/2}$ décroît linéairement avec l'énergie de l'électron. Comment est modifiée cette loi si le neutrino a une masse non nulle? Aujourd'hui encore, les meilleures bornes supérieures sur la masse du neutrino viennent du spectre des électrons émis dans la désintégration β du tritium, ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} e \bar{\nu}$.

Chapitre 10

Solutions des exercices et problèmes

10.1 Particule de spin 0

10.1.1 Masse et dispersion

1. $v \simeq 1 - m^2/(2p^2) = 1 - \lambda^2 m^2/(8\pi^2)$ dans le système d'unités où $\hbar = c = 1$ ($\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$).
2. En inversant la relation précédente on obtient $m^2 = 8\pi^2 \Delta v / \Delta \lambda^2$. Dans les unités usuelles, on obtient

$$mc^2 = 2\pi\hbar c \sqrt{\frac{2\Delta v/c}{\Delta \lambda^2}}.$$

En utilisant la relation $\hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm} = 1.97 \times 10^{-9} \text{ eV} \cdot \text{m}$, on obtient la borne supérieure $mc^2 < 1.7 \times 10^{-10} \text{ eV}$.

10.1.2 Hamiltonien de Klein–Gordon

2. En exprimant ϕ et $\partial\phi/\partial t$ en fonction de θ et χ , on trouve $\rho(x) = |\theta(x)|^2 - |\chi(x)|^2$.
3. Pour une solution d'énergie positive non relativiste, l'énergie est proche de m , donc $i\partial\phi/\partial t \simeq m\phi$. On obtient donc $\theta \simeq \sqrt{2m}\phi$, qui correspond à la fonction d'onde de Schrödinger, multipliée par un facteur e^{-imt} . L'autre composante $\chi \simeq 0$. Elle est négligeable devant θ dans la limite non relativiste.

10.1.3 Marche de potentiel

1. $p^2 = E^2 - m^2$ et $p'^2 = (E - V)^2 - m^2$. Donc p' est imaginaire pur si $(E - V)^2 < m^2$, soit si $E - m < V < E + m$. Dans ce cas, l'onde décroît exponentiellement pour $x > 0$. On s'attend à ce que ce soit le cas si la barrière de potentiel est plus grande que l'énergie cinétique incidente, soit si $V > E - m$. Ce qui est surprenant ici est la condition supplémentaire $V < E + m$: il n'y a plus d'atténuation exponentielle si la barrière de potentiel dépasse le seuil $E + m$, dont on notera qu'il est supérieur à $2m$, l'énergie nécessaire pour créer une paire particule–antiparticule.
2. De même que pour l'équation de Schrödinger en présence d'une marche de potentiel, la discontinuité du potentiel entraîne une discontinuité dans $\partial^2\phi/\partial x^2$. Mais ϕ et $\partial\phi/\partial x$ sont bien continues. Ceci s'écrit

$$\begin{aligned} 1 + r &= t \\ p(1 - r) &= p't \end{aligned} \tag{10.1}$$

d'où le résultat demandé en éliminant t . Il y a réflexion totale si $|p - p'| = |p + p'|$, soit si p' est imaginaire pur, soit si l'onde est atténuée exponentiellement pour $x > 0$.

10.1.4 Facteur de forme

$$F(q) = 3 \frac{\sin qR - qR \cos qR}{(qR)^3}.$$

10.1.5 Création de paires

2. $q_\mu(p_1^\mu - p_2^\mu) = (p_{1\mu} + p_{2\mu})(p_1^\mu - p_2^\mu) = p_1^2 - p_2^2 = m^2 - m^2 = 0$.
3. $0 = q_\mu J^{\mu\nu} = (Aq^2 + B)q^\nu$. Donc $B = -Aq^2$. D'où le résultat.

4. Sachant que ∂_μ devient en transformée de Fourier $-iq_\mu$, on obtient $\tilde{F}^{\mu\nu}(q) = -i(q^\mu A^\nu(q) - q^\nu A^\mu(q))$. Puis

$$\begin{aligned}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}^* &= (q^\mu\tilde{A}^\nu - q^\nu\tilde{A}^\mu)(q_\mu\tilde{A}_\nu^* - q_\nu\tilde{A}_\mu^*) \\ &= 2\left(q^2\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu^* - (q\cdot\tilde{A})(q\cdot\tilde{A}^*)\right).\end{aligned}$$

Et, d'autre part,

$$J^{\mu\nu}\tilde{A}_\mu\tilde{A}_\nu^* = \left[q^2\tilde{A}^\mu\tilde{A}_\mu^* - (q\cdot\tilde{A})(q\cdot\tilde{A}^*)\right]C(q) = \frac{1}{2}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}^*C(q).$$

5. $I(q)$ est un scalaire de Lorentz car $d^3\vec{p}/E$ est un scalaire de Lorentz, ainsi que la distribution de Dirac à 4 dimensions d'espace-temps (celle-ci est scalaire car l'élément de volume à 4 dimensions d^4p est scalaire).

Il existe un référentiel où $\vec{q} = 0$ car le quadrivecteur q^μ est de genre temps. Plus précisément : $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ et $|\vec{p}_{1,2}| < E_{1,2}$ donc $|\vec{q}| < E_1 + E_2 = q^0$. En faisant une transformation de Lorentz de vitesse \vec{q}/q^0 , on obtient un référentiel où $\vec{q} = \vec{0}$.

En intégrant sur \vec{p}_2 dans ce référentiel, la distribution de Dirac impose $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$, d'où $E_2 = E_1$. On obtient

$$I(q) \equiv \int \frac{d^3\vec{p}_1}{(2\pi)^2 4E_1^2} \delta(q^0 - 2E_1).$$

On écrit ensuite $d^3\vec{p}_1 = 4\pi p_1^2 dp_1 = 4\pi p_1 E_1 dE_1$. La distribution de Dirac impose ensuite $E_1 = q^0/2$, d'où $p_1 = \frac{1}{2}\sqrt{q_0^2 - 4m^2}$. D'autre part, il ne faut pas oublier que $\delta(2x) = \delta(x)/2$. On trouve ainsi le résultat cherché.

6. On part de la définition de $J^{\mu\nu}(q)$, équation (1) de l'énoncé, et on contracte par $g_{\mu\nu}$:

$$g_{\mu\nu}(p_1^\mu - p_2^\mu)(p_1^\nu - p_2^\nu) = (p_1 - p_2)^2.$$

On cherche ensuite à faire apparaître la somme $p_1 + p_2 = q$. En utilisant les relations $p_1^2 = p_2^2 = m^2$, on trouve

$$(p_1 - p_2)^2 = 4m^2 - (p_1 + p_2)^2 = 4m^2 - q^2,$$

d'où le résultat cherché.

D'autre part, l'équation (3) donne

$$g_{\mu\nu}J^{\mu\nu}(q) = 3q^2C(q)$$

(ne pas oublier que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$). On en déduit

$$C(q) = \frac{4m^2 - q^2}{3q^2}I(q)$$

En utilisant les résultats des questions 4 et 5, on en déduit le résultat final

$$\mathcal{N} = -\frac{e^2}{48\pi} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{F}^{\mu\nu}(q)\tilde{F}_{\mu\nu}^*(q) \left(1 - \frac{4m^2}{q^2}\right)^{3/2} \theta(q^2 - 4m^2) \theta(q^0).$$

10.2 Particule de spin $\frac{1}{2}$

10.2.1 Construction des matrices de Dirac

1. On vérifie immédiatement que α_N ainsi définie anticommute avec toutes les autres.

Reste à vérifier les deux propriétés $\alpha_N^2 = 1$ et $\alpha_N^\dagger = \alpha_N$.

En utilisant les propriétés de $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}$, on trouve

$$\alpha_N^2 = \lambda^2(-1)^{(N-1)+(N-2)+\dots+1} = \lambda^2(-1)^{N(N-1)/2}.$$

Si $\alpha_N^2 = 1$, alors $\alpha_N = \alpha_N^\dagger$ équivaut à $\alpha_N\alpha_N^\dagger = 1$. Cette dernière propriété est vérifiée dès que $|\lambda|^2 = 1$. Toutes les propriétés sont donc vérifiées si on a

$$\lambda^2 = \lambda/\lambda^\dagger = (-1)^{N(N-1)/2}.$$

Une solution est donnée par $\lambda = \pm i^{N(N-1)/2}$. Or N est pair donc $N-1$ est impair, et $N(N-1)/2$ a la parité de $N/2$. On peut donc écrire plus simplement $\lambda = \pm i^{N/2}$. Choisissons $\lambda = i^{N/2}$.

2. Il suffit de vérifier l'hermiticité, le carré 1, et les anticommutation de toutes ces matrices entre elles. C'est un jeu d'enfant.

3. Pour $N = 2$ et $N = 3$ on reconnaît les matrices de Pauli dans le désordre et à des signes près.
4. La généralisation à N pair quelconque est triviale. On construit 2^N matrices en multipliant les matrices α_j de toutes les façons possibles entre elles. Il suffit ensuite de refaire comme dans le cours. Le fait que N est pair intervient seulement à un endroit, pour montrer que quelle que soit la matrice Γ_i différente de l'identité, il y en a une autre qui anticommute avec. Dans le cas $N = 3$, par exemple, on a $\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i$ qui n'anticommute avec rien du tout.

10.2.2 Opérateur de vitesse ; Zitterbewegung

1. Vitesse de l'électron de Dirac

L'opérateur de position commute avec les matrices de Dirac, et $[x_j, p_k] = i\delta_{j,k}$, d'où le résultat.

2. Propriétés de l'opérateur de vitesse

L'espace des états pour la particule de Dirac est le produit tensoriel de l'espace des états orbitaux \mathcal{E}_r par l'espace des états de spin \mathcal{E}_s , de dimension 4. L'opérateur de position agit dans l'espace des états orbitaux, alors que l'opérateur de vitesse agit dans l'espace des états de spin. Donc ils commutent.

Les matrices α_i sont de carré 1, donc leurs valeurs propres sont ± 1 .

α_1 et α_2 anticommulent. Si elles commutaient entre elles, alors leur produit serait nul. Mais le produit de deux matrices inversibles est inversible donc ne peut être nul.

3. Matrice de l'opérateur de vitesse

a) H et \vec{P} commutent entre eux, donc ils sont diagonalisables dans une même base. D'où le résultat. On peut le redémontrer algébriquement :

$$0 = \langle \psi_1 | [\vec{P}, H] | \psi_2 \rangle = (E_2 - E_1) \langle \psi_1 | \vec{P} | \psi_2 \rangle$$

D'où le résultat si $E_1 \neq E_2$.

b) $\{\alpha_i, H\} = 2P_i$. En prenant l'élément de matrice de cette identité,

$$2 \langle \psi_1 | \vec{P} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \{\vec{\alpha}, H\} | \psi_2 \rangle = (E_1 + E_2) \langle \psi_1 | \vec{\alpha} | \psi_2 \rangle.$$

Supposons $E_1 + E_2 \neq 0$. Alors on peut diviser par $E_1 + E_2$. Comme le terme de gauche s'annule pour $E_1 \neq E_2$, on peut remplacer $E_1 + E_2$ par $2E_2$ et le faire rentrer dans l'élément de matrice, et on trouve le résultat cherché.

4. Non-conservation du moment orbital

Les relations de Ehrenfest possèdent les mêmes propriétés de distributivité que les dérivées ordinaires. En effet, $[AB, H] = [A, H]B + A[B, H]$, d'où $d(AB)/dt = AdB/dt + (dA/dt)B$. Par conséquent on peut écrire

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{P} + \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Puisque \vec{P} est une constante du mouvement (commute avec H), en utilisant le résultat de la question 1 on trouve le résultat cherché.

5. Moment cinétique total

En utilisant l'identité donnée dans l'énoncé, on a

$$\frac{dS_z}{dt} = -\frac{1}{2}[\alpha_x \alpha_y, H] = -\frac{1}{2}(\alpha_x \{\alpha_y, H\} - \{\alpha_x, H\} \alpha_y) = -(\alpha_x p_y - \alpha_y p_x) = -\frac{dL_z}{dt}.$$

6. Résolution des équations de Ehrenfest

$$[\vec{\alpha}, H] = 2\vec{\alpha}H - \{\vec{\alpha}, H\} = 2(\vec{\alpha}H - \vec{P}).$$

D'où le résultat cherché, en utilisant les équations de Ehrenfest pour $\vec{\alpha}$. Enfin, une intégration élémentaire donne

$$\vec{r}(t) = \vec{x}(0) + \frac{\vec{P}}{H}t + \frac{i}{2} \left(\vec{\alpha}(0) - \frac{\vec{P}}{H} \right) H^{-1} e^{-2iHt}.$$

10.2.3 Couplage spin-orbite

1. L'équation de Dirac s'écrit, pour un état stationnaire d'énergie $m + E$,

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{P} + \beta m \right] \psi = (m + E - eV)\psi.$$

Dans la représentation de Dirac, on obtient

$$\begin{aligned}(E - eV)\phi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{P}\chi \\ (2m + E - eV)\chi &= \vec{\sigma} \cdot \vec{P}\phi\end{aligned}$$

La deuxième équation donne

$$\chi(\vec{x}) = \frac{1}{2m + E - eV} \vec{\sigma} \cdot \vec{P}\phi(\vec{x}).$$

Dans la limite non relativiste, le terme $2m$ domine au dénominateur, et on obtient $\chi \sim v\phi$, donc $\chi \ll \phi$. En remplaçant χ par l'expression ci-dessus dans la première des équations obtenues, on obtient immédiatement le résultat cherché.

2. On développe en puissances de $(E - eV)/m$:

$$\frac{1}{2m + E - eV} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{4m^2}(E - eV) \dots$$

En utilisant l'équation (3.120), on montre que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{P})^2 = \vec{P}^2$. On retrouve donc le hamiltonien relativiste, plus la correction donnée par l'énoncé.

3. On a

$$[E - eV(\vec{x}), \vec{\sigma} \cdot \vec{P}] = -ie\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla}V.$$

On en déduit le résultat cherché. La première correction relativiste $-\vec{P}^4/8m^3$ est donnée par le développement de $\sqrt{\vec{P}^2 + m^2}$ en puissances de \vec{P} .

4. Le résultat est une application simple de l'équation (3.120), et de l'expression du spin $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$.

5. Le terme de Darwin s'écrit

$$\frac{1}{2} (\Delta H_D + \Delta H_D^\dagger) = \frac{ie}{8m^2} [\vec{P}, \vec{\nabla}V] = \frac{e}{8m^2} \Delta V.$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, $\Delta V = -\rho$ dans notre système d'unités où $\epsilon_0 = 1$. Pour l'atome d'hydrogène, la charge est concentrée à l'origine des coordonnées. Par conséquent, les seules orbitales affectées seront celles pour lesquelles la probabilité de présence à l'origine est non nulle, qui sont les orbitales $l = 0$ (voir le cours de mécanique quantique de première année).

6. Le gradient d'un potentiel central est radial : $\vec{\nabla}V = (\vec{x}/r)dV/dr$. On en déduit immédiatement le résultat cherché. Cette dernière correction relativiste est un couplage entre le moment orbital et le spin, qui peut être interprétée par le fait que l'électron en mouvement dans un champ électrostatique voit, dans son référentiel propre, un champ magnétique, qui interagit avec son moment magnétique, dont on a vu qu'il est proportionnel au spin.

10.3 Photons

10.3.1 Particule de spin 1 massive

1. L'équation a été proposée en 1936 par Alexandre Proca (1897-1955), physicien français d'origine roumaine. De l'équation on déduit

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu j^\nu = 0$$

Le premier terme est la contraction d'un tenseur antisymétrique et d'un tenseur symétrique, donc il s'annule en échangeant les indices. Pour $m \neq 0$, on en déduit $\partial_\nu A^\nu = 0$. En remplaçant $F^{\mu\nu}$ par son expression en fonction de A^ν , on en déduit ensuite

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)A^\nu = j^\nu.$$

En l'absence de courant, chaque composante A^ν vérifie donc une équation de Klein-Gordon.

2. Les solutions à ondes planes sont de la forme

$$A^\mu(x) = \epsilon^\mu e^{ip^\nu x_\nu}.$$

L'équation obtenue précédemment impose naturellement $p^\mu p_\mu = m^2$. Cette équation correspond donc à une particule de masse m et de spin 1 (car la transformation du champ est la même que pour le champ électromagnétique). D'autre part, la condition $\partial_\mu A^\mu = 0$ impose $\epsilon^\mu p_\mu = 0$. Il y a trois états de polarisation linéairement indépendants, ce qui est naturel pour une particule de spin 1. Dans le cas où $m = 0$, l'invariance de jauge (qui est perdue pour $m \neq 0$) réduit à deux le nombre de degrés de liberté.

10.3.2 Limite expérimentale sur la masse du photon

1. On remplace ρ par $\rho - m^2 A^0$, soit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - m^2 A^0. \quad (10.2)$$

2. Pour une configuration statique, on a simplement $\vec{E} = -\vec{\nabla} A^0$, par conséquent l'équation devient $\Delta A^0 = m^2 A^0$. D'après l'expression du laplacien donné dans l'énoncé, cette équation est de la forme $\mathcal{O}^2 A^0 = m^2 A^0$, où \mathcal{O} est l'opérateur défini par $\mathcal{O}A^0 \equiv (1/r)(d/dr)(rA^0)$. L'espace propre de \mathcal{O}^2 associé à la valeur propre m^2 est naturellement la somme directe des espaces propres de \mathcal{O} associés aux valeurs propres m et $-m$. Or l'équation $\mathcal{O}A^0 = \pm m A^0$ s'intègre facilement en $rA^0(r) = Ae^{\pm mr}$. La solution générale de l'équation est donc

$$A^0(r) = A \frac{e^{-mr}}{r} + B \frac{e^{mr}}{r}, \quad (3)$$

où A et B sont des constantes d'intégration.

Le potentiel créé par une charge ponctuelle q doit s'annuler à l'infini, donc seul reste le premier terme. On peut montrer que le facteur A est le même que pour $m = 0$, soit $A = q/4\pi$. Le terme de masse entraîne une décroissance exponentielle. On dit que le potentiel a une portée finie $1/m$, soit, en unités usuelles, \hbar/mc , qui est à un facteur 2π près la longueur d'onde de Compton associée à la particule.

Parenthèse historique : Yukawa a été, en 1935, le premier à suggérer que la très courte portée des forces nucléaires, de l'ordre du fermi (10^{-15} m) pouvait traduire l'existence d'une particule massive qu'il appela "méson". Cette particule, maintenant appelée pion, a été découverte en 1947 dans les rayons cosmiques. Son énergie de masse vaut environ 140 MeV, ce qui correspond bien à une portée de 1 fm.

Revenons au photon : en vérifiant que le potentiel décroît bien en $1/r$ sur une distance L , on peut donc montrer que m est beaucoup plus petit que \hbar/Lc . Pour une expérience de laboratoire, même rudimentaire, où L est de l'ordre du mètre, on en déduit une borne supérieure sur m de l'ordre de 10^{-42} kg. Pour abaisser cette borne, il faut soit imaginer une expérience qui mette en jeu des distances beaucoup plus grandes, soit effectuer une mesure de précision. L'expérience décrite dans les questions suivantes fait partie de la deuxième catégorie.

5. Intégrons l'équation (2) sur le volume compris dans une sphère de rayon $r < a$. En utilisant le théorème de Gauss, le membre de gauche donne un terme de surface. Par symétrie, le champ \vec{E} est radial. Dans le membre de droite, nous faisons l'approximation $A^0 \simeq V$: l'égalité étant strictement vérifiée pour $m = 0$, elle doit rester bonne si m est suffisamment petit. On obtient ainsi

$$4\pi r^2 E(r) \simeq -\frac{4}{3}\pi r^3 m^2 V.$$

Puisque $E(r) = -dA^0/dr$, en intégrant avec la condition aux limites $A^0(a) = V$, on en déduit

$$A^0(r) = V + \frac{r^2 - a^2}{6} m^2 V,$$

à l'ordre dominant en m . Le potentiel décroît au fur et à mesure qu'on s'éloigne de la sphère, ce qui est une conséquence de la décroissance exponentielle de la question précédente.

Remarque : l'équation (3) permet d'obtenir facilement le résultat exact. On veut que $A^0(r)$ reste fini en $r = 0$, et vale V en $r = a$, ce qui donne

$$A^0(r) = V \frac{a}{r} \frac{\sinh mr}{\sinh ma}.$$

En développant à l'ordre 2 en m , on retrouve immédiatement le résultat précédent.

6. En mettant une sphère non chargée à l'intérieur de la première sphère, on ne modifie pas les conditions aux limites, donc les résultats obtenus restent valables. On obtient donc immédiatement

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{a^2 - b^2}{6} m^2.$$

Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on obtient $m < 1,6 \times 10^{-50}$ kg.

Expérimentalement, on charge la première sphère sous une tension sinusoïdale de pulsation ω , et non sous une tension constante. On double cette première sphère par une deuxième, juste à l'intérieur (donc presque en $r = a$). Les deux sphères en $r = a$ et $r = b$ forment un condensateur de capacité C , auquel on branche une inductance L de telle sorte que la pulsation résonante $1/\sqrt{LC}$ coïncide avec ω . Si $m \neq 0$, alors il existe une différence de potentiel entre les deux armatures, qui est amplifiée par l'effet de résonance. C'est ce phénomène qui permet de mesurer une valeur si faible de $\Delta V/V$.

Autres expériences de mesure de la masse du photon :

Si $m \neq 0$, la vitesse de groupe est plus petite que c pour les plus grandes longueurs d'onde. Les mesures les plus précises basées sur cet effet exploitent des phénomènes explosifs se produisant dans des galaxies très éloignées, aux confins de l'univers observé. Ces explosions produisent des ondes électromagnétiques sur tout le spectre de longueurs d'onde. En observant que les ondes émises dans le domaine radio (grandes longueurs d'onde) et γ (petites longueurs d'onde) arrivent à peu près en même temps sur terre, on en déduit une borne supérieure sur la masse du photon, toutefois moins précise que celle obtenue par l'expérience précédente. (Schaefer, Physical Review Letters, vol.82, p.4964, 1999).

Il existe plusieurs autres catégories d'expériences. L'une teste les équations de Maxwell non plus dans le domaine de l'électrostatique, mais de la magnétostatique, en vérifiant que le champ d'un dipôle est bien celui prévu par les équations de Maxwell. Comme on l'a vu, les meilleures bornes sur la masse du photon sont celles qui mettent en jeu les distances les plus grandes. Or la Terre est un immense dipôle magnétique, et la faible précision des mesures du champ est amplement compensée par les longueurs mises en jeu. Cette idée est due à Schrödinger, qui obtint dès 1943 une borne aussi précise que celle obtenue par notre expérience de laboratoire. Des mesures du champ magnétique de Jupiter, plus gros que la Terre, ont abouti à une précision encore meilleure.

Mais les mesures les plus précises, qui donnent une borne supérieure environ dix mille fois plus petites que celle obtenue dans notre exercice, sont basées sur une idée nouvelle, encore différente : l'observation d'un champ magnétique dans la galaxie, faible, mais qui varie lentement sur de très grandes distances, implique un potentiel vecteur très grand sur terre. Lorsque $m \neq 0$, on perd l'invariance de jauge, et le potentiel vecteur devient une quantité physique observable : en particulier, il crée un couple sur un dipôle magnétique, qui peut être mesuré précisément au moyen de l'expérience de Cavendish, c'est à dire d'un pendule de torsion. (Lakes, Physical Review Letters, vol.80, p.1826, 1998).

10.4 Propagateurs

10.4.1 Propagation de l'onde à une dimension

Première partie : solution explicite

1. Les dérivées partielles se transforment comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_+} + \frac{\partial}{\partial x_-} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x_+} - \frac{\partial}{\partial x_-} \right). \end{aligned} \quad (10.3)$$

On en déduit rapidement l'équation dans le nouveau système de coordonnées.

2. En intégrant sur x^+ puis sur x^- , on trouve $S(x_+, x_-) = f(x_+) + g(x_-)$, où f et g sont deux fonctions arbitraires. Le premier terme correspond à une onde progressive se déplaçant vers les x décroissants, le deuxième à une onde progressive se déplaçant vers les x croissants.

3. Par changement de variables, la solution proposée se met sous la forme

$$S(x^+, x^-) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{x_+} dx_1 \int_{-\infty}^{x_-} dx_2 J(x_1, x_2). \quad (10.4)$$

En dérivant par rapport à x_+ et x_- , on voit que c'est évidemment une solution de l'équation cherchée. Posons $x_1 = (x' + t')/\sqrt{2}$, $x_2 = (t' - x')/\sqrt{2}$. Alors on voit que t' est positif, c'est à dire qu'on intègre sur des temps inférieurs à t : c'est bien la solution retardée.

4. On vérifie aisément que $dx_1 dx_2 = dx' dt'$ (le jacobien de la transformation vaut 1). Le domaine d'intégration est $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, ce qui équivaut à $t' > |x'|$. Le domaine d'intégration est la moitié "passé" du cône de genre temps issu de (t, x) .

Deuxième partie : fonction de Green

1. On a montré qu'il suffisait d'intégrer sur la région $t' > |x'|$. On peut aussi intégrer sur tout t' et x' avec un facteur $\theta(t' - |x'|)$ qui va sélectionner la région d'intégration voulue.

2. On peut choisir d'intégrer d'abord sur x ou d'abord sur t . Choisissons la première option. La condition $t > |x|$ se réécrit $-t < x < t$. Donc

$$\tilde{G}(\omega, k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx G(t, x) e^{-\epsilon t} e^{i\omega t - ikx}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt e^{i(\omega+i\epsilon)t} \int_{-t}^t dx e^{-ikx} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt e^{i(\omega+i\epsilon)t} \frac{e^{-ikt} - e^{ikt}}{-ik} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \frac{e^{i(\omega+i\epsilon-k)t} - e^{i(\omega+i\epsilon+k)t}}{-ik} \\
&= \frac{1}{-2ik} \left(\frac{-1}{i(\omega+i\epsilon-k)} - \frac{-1}{i(\omega+i\epsilon+k)} \right). \tag{10.5}
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat cherché. Les pôles sont en $\omega = \pm k - i\epsilon$, c'est à dire sous l'axe réel, ce qui est la condition de causalité (cf. cours).

3. Dans le cas particulier où $j(t, x) = \delta(t) \delta(x)$, on obtient $s(t, x) = G(t, x)$. En remplaçant dans l'équation d'onde, on obtient le résultat cherché.

D'autre part, en prenant la transformée de Fourier de cette équation, on obtient immédiatement

$$(-\omega^2 + k^2) \tilde{G}(\omega, k) = 1. \tag{10.6}$$

10.4.2 Effet Compton scalaire

Première partie : absorption et émission d'un photon

1. D'après le cours, on a

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2k^0 V} (\epsilon^\mu e^{-ik \cdot x} + \epsilon^{\mu*} e^{ik \cdot x}). \tag{10.7}$$

2. L'amplitude de diffusion d'une particule scalaire chargée par un champ électromagnétique est donnée par l'équation 2.64. Il ne reste qu'à calculer la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\mu(p_f - p_i) &= \int e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A_\mu(x) d^4x \\
&= \frac{1}{2k^0 V} (\epsilon_\mu (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - k) + \epsilon_\mu^* (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i + k)). \tag{10.8}
\end{aligned}$$

Les seules valeurs possibles de p_f sont $p_i + k$ et $p_i - k$, qui correspondent respectivement à l'absorption et l'émission d'un photon d'impulsion k^μ . C'est la partie de fréquence positive de $A^\mu(x)$ qui contribue à l'absorption, et la partie de fréquence négative qui contribue à l'émission.

3. Prenons le carré scalaire de l'équation $p_f = p_i \pm k$. En utilisant les relations $p_f^2 = p_i^2 = m^2$, $k^2 = 0$, on obtient $k \cdot p_i = 0$, soit $p_i^0 |\vec{k}| = \vec{p}_i \cdot \vec{k}$. Or $|\vec{p}_i \cdot \vec{k}| \leq |\vec{p}_i| |\vec{k}|$, et $|\vec{p}_i| < p_i^0$, donc c'est impossible. Physiquement, c'est très simple : en se plaçant dans le référentiel de repos de la particule chargée dans l'état initial (c'est à dire le référentiel où $\vec{p}_i = \vec{0}$), celle-ci est dans son état d'énergie la plus basse ($p_i^0 = m$) donc n'a pas d'énergie pour émettre un photon. Idem pour l'absorption, en se plaçant dans le référentiel où $\vec{p}_f = \vec{0}$.

Deuxième partie : amplitude de la diffusion Compton

1. $W_1(x)$ est la somme de deux termes. Le deuxième donne

$$ie \int e^{ip_1 \cdot x} A_\mu(x) \partial^\mu e^{-ip_2 \cdot x} d^4x = ep_2^\mu \int e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} A_\mu(x) d^4x. \tag{10.9}$$

Quant au premier terme, il s'intègre par parties :

$$\begin{aligned}
ie \int e^{ip_1 \cdot x} \partial^\mu (A_\mu(x) e^{-ip_2 \cdot x}) d^4x &= -ie \int \partial^\mu (e^{ip_1 \cdot x}) A_\mu(x) e^{-ip_2 \cdot x} d^4x \\
&= ep_1^\mu \int e^{i(p_1 - p_2) \cdot x} A_\mu(x) d^4x. \tag{10.10}
\end{aligned}$$

2. L'amplitude de transition au premier ordre de la théorie des perturbations est donnée par l'équation (2.54) du cours :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_{fi})_2 &= -i \int \phi_f^*(x) W_2(x) \phi_i(x) d^4x \\
&= ie^2 \frac{1}{\sqrt{2V p_i^0}} \frac{1}{\sqrt{2V p_f^0}} \int e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A^\mu(x) A_\mu(x) d^4x. \tag{10.11}
\end{aligned}$$

En remplaçant $A^\mu(x)$ par son expression, le développement du carré $A^\mu(x)A_\mu(x)$ produit trois termes proportionnels respectivement à $e^{-2ik \cdot x}$, $e^{2ik' \cdot x}$ et $e^{i(k' - k) \cdot x}$. Les deux premiers donnent respectivement $p_f = p_i + 2k$ et $p_f = p_i - 2k'$. Le processus cherché, $p_f = p_i + k - k'$, correspond au troisième terme. On obtient ainsi le résultat cherché.

Notons que si chaque terme de $A^\mu(x)$ correspond au champ d'un photon, alors $k^\mu k_\mu = k'^\mu k'_\mu = 0$, alors les deux processus éliminés (avec $p_f = p_i + 2k$ et $p_f = p_i - 2k'$) sont cinématiquement impossibles, pour les mêmes raisons qu'à la question 3 de la première partie.

On peut représenter l'amplitude $(\mathcal{A}_{fi})_2$ par un diagramme de Feynman : une ligne continue pour la particule chargée (on utilise souvent une ligne pointillée pour les particules scalaires), avec une interaction en un point x où arrivent deux lignes ondulées, l'une apportant l'impulsion k^μ et l'autre emportant l'impulsion k'^μ . Le point d'interaction est un "vertex à 4 pattes". Ce terme n'existe pas pour une particule chargée de spin $\frac{1}{2}$. La règle de Feynman pour ce vertex est de lui associer un facteur $2e^2 g_{\mu\nu}$ (avec, comme toujours, un facteur ϵ^μ pour le photon entrant et ϵ^ν pour le photon sortant, et 1 pour les particules scalaires entrant ou sortant).

3. D'après l'équation (5.23) du cours, l'amplitude de transition au deuxième ordre de la théorie des perturbations s'écrit

$$(\mathcal{A}_{fi})_1 = -i \int \phi_f^*(x) W_1(x) G(x - x') W_1(x') \phi_i(x') d^4x d^4x'. \quad (10.12)$$

En remplaçant $\phi_i(x')$ et $\phi_f^*(x)$ par leurs expressions, et en introduisant la transformée de Fourier du propagateur, on obtient

$$(\mathcal{A}_{fi})_1 = -i \frac{1}{\sqrt{2V p_i^0}} \frac{1}{\sqrt{2V p_f^0}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}(q) \int d^4x e^{ip_f \cdot x} W_1(x) e^{-iq \cdot x} \times \int d^4x' e^{iq \cdot x'} W_1(x') e^{-ip_i \cdot x'}. \quad (10.13)$$

Les intégrales sur x et x' se calculent au moyen de la formule démontrée dans la première question de cette partie :

$$(\mathcal{A}_{fi})_1 = -ie^2 \frac{1}{\sqrt{2V p_i^0}} \frac{1}{\sqrt{2V p_f^0}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \tilde{G}(q) (p_f^\mu + q^\mu) \int d^4x e^{i(p_f - q) \cdot x} A_\mu(x) \times (p_i^\nu + q^\nu) \int d^4x' e^{i(q - p_i) \cdot x'} A_\nu(x'). \quad (10.14)$$

En remplaçant $A^\mu(x)$ par son expression et en développant, quatre termes apparaissent. Pour les mêmes raisons qu'à la question précédente, seuls les deux termes croisés vont contribuer au processus cherché.

Premier terme croisé : le premier terme de A^μ intervient en x' et le second terme en x . Dans ce cas de figure, la particule commence par gagner l'impulsion k en x' puis perd l'impulsion k' en x . La contribution à l'amplitude est :

$$(\mathcal{A}_{fi})_1 = -ie^2 \frac{1}{\sqrt{2V p_i^0}} \frac{1}{\sqrt{2V p_f^0}} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} (p_f^\mu + q^\mu) \frac{1}{\sqrt{2k'^0 V}} \epsilon_\mu^* (2\pi)^4 \delta^4(p_f - q + k') \tilde{G}(q) \times (p_i^\nu + q^\nu) \frac{1}{\sqrt{2k^0 V}} \epsilon_\nu (2\pi)^4 \delta^4(q - p_i - k). \quad (10.15)$$

Les distributions de Dirac imposent la conservation de l'énergie et de l'impulsion à chaque vertex, en x et en x' . Elles permettent de remplacer, dans la première ligne, $p_f^\mu + q^\mu$ par $2p_f^\mu + k'^\mu$ et, dans la deuxième ligne, $p_i^\nu + q^\nu$ par $2p_i^\nu + k^\nu$. On peut ensuite intégrer sur q en utilisant la deuxième distribution de Dirac qui impose $q = p_i + k$, et remplacer q par cette valeur dans la première distribution de Dirac et dans l'expression du propagateur :

$$(\mathcal{A}_{fi})_1 = -ie^2 \frac{1}{\sqrt{2V p_i^0}} \frac{1}{\sqrt{2V p_f^0}} (2p_f^\mu + k'^\mu) \frac{1}{\sqrt{2k'^0 V}} \epsilon_\mu^* (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i - k + k') \tilde{G}(p_i + k) \times (2p_i^\nu + k^\nu) \frac{1}{\sqrt{2k^0 V}} \epsilon_\nu. \quad (10.16)$$

En remplaçant le propagateur de Klein-Gordon par son expression vue en cours, $\tilde{G}(q) = 1/(q^2 - m^2)$, on obtient le premier terme de l'expression donnée dans l'énoncé. Le deuxième terme croisé se calcule de même et donne le deuxième terme.

Les diagrammes de Feynman ont cette fois deux vertex, correspondant aux deux interactions en x et en x' . Entre ces deux vertex, il y a une ligne interne, à laquelle est associée un poids $\tilde{G}(q)$, c'est à dire

le propagateur. Le poids associé à chaque vertex est e multiplié par la somme des impulsions entrante et sortante, comme pour la diffusion Rutherford. Il y a un diagramme pour chaque terme : dans le premier terme, l'absorption a lieu avant l'émission (si on utilise un propagateur retardé), et dans le deuxième terme, c'est l'inverse.

On voit qu'aux deux termes $W_1(x)$ et $W_2(x)$ de l'interaction électromagnétique d'une particule scalaire sont associés deux types de vertex différents. On notera que les diagrammes que nous avons obtenus sont les seuls possibles pour ce processus, à l'ordre e^2 . C'est un résultat général, qu'on démontre en théorie des champs : l'amplitude d'un processus à un ordre donné est donnée par la somme de tous les diagrammes de Feynman contribuant à ce processus. Ainsi, les règles de Feynman que nous avons énoncées permettent de calculer n'importe quel processus élémentaire pour l'électrodynamique scalaire.

4. Simplifions tout d'abord les dénominateurs en utilisant les conditions dites de "couche de masse" $p_i^2 = p_f^2 = m^2$. On obtient ainsi $(p_i + k)^2 - m^2 = k \cdot (2p_i + k)$, $(p_f - k)^2 - m^2 = -k \cdot (2p_f - k)$. Pour vérifier que l'amplitude de transition est invariante dans la transformation de jauge $\epsilon^\mu \rightarrow \epsilon^\mu + \lambda k^\mu$, il suffit de vérifier qu'elle s'annule lorsqu'on remplace ϵ^μ par k^μ . On obtient alors

$$\begin{aligned} (\tau_{fi})_1 + (\tau_{fi})_2 &= e^2 (-\epsilon'^* \cdot (2p_f + k') + \epsilon'^* \cdot (2p_i - k') + 2k \cdot \epsilon'^*) \\ &= e^2 \epsilon'^* \cdot (-2p_f - 2k' + 2p_i + 2k) \end{aligned} \quad (10.17)$$

qui s'annule grâce à la conservation de l'impulsion $p_f + k' = p_i + k$.

5. Les résultats obtenus jusqu'ici s'appliquent sans restriction sur k^μ , k'^μ , ϵ^μ et ϵ'^μ . Le cas particulier d'un champ de photons correspond à $k^\mu k_\mu = \epsilon^\mu k_\mu = 0$ et $\epsilon^\mu \epsilon'_\mu = -1$, et idem pour k' et ϵ' . L'amplitude de transition se réduit alors à

$$\tau_{fi} = 2e^2 \left(-\frac{\epsilon \cdot p_i \epsilon'^* \cdot p_f}{p_i \cdot k} + \frac{\epsilon \cdot p_f \epsilon'^* \cdot p_i}{p_f \cdot k} + \epsilon \cdot \epsilon'^* \right). \quad (10.18)$$

6. Les dénominateurs $p_i \cdot k$ et $p_f \cdot k$ ne s'annulent jamais pour les raisons expliquées à la question 3 de la première partie : une particule qui absorbe ou émet un photon ne peut pas être sur "couche de masse". Par conséquent, il n'y a aucune ambiguïté liée au choix du propagateur. C'est un résultat général pour les diagrammes "en arbre", qui ne présentent pas de boucle interne.

Troisième partie : section efficace

1. La conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrit $p_f = p_i + k - k'$. En prenant le carré scalaire, en développant et en utilisant les relations $p_i^2 = p_f^2 = m^2$, $k^2 = k'^2 = 0$, on obtient $2p_i \cdot (k - k') - 2k \cdot k' = 0$. Dans le référentiel où $\vec{p}_i = \vec{0}$, ceci devient $m(|\vec{k}| - |\vec{k}'|) - |\vec{k}||\vec{k}'|(1 - \cos\theta) = 0$. On en déduit finalement

$$\frac{1}{|\vec{k}'|} = \frac{1}{|\vec{k}|} + \frac{1 - \cos\theta}{m}, \quad (10.19)$$

qui est la relation de Compton.

2. La jauge de Coulomb entraîne $\epsilon^0 = \epsilon'^0 = 0$ pour des photons physiques (voir cours). Comme on a de plus $\vec{p}_i = \vec{0}$, il en résulte $\epsilon \cdot p_i = \epsilon'^* \cdot p_i = 0$, et l'amplitude de transition se réduit au dernier terme

$$\tau_{fi} = 2e^2 \epsilon \cdot \epsilon'^*. \quad (10.20)$$

3. Dans un volume d'espace-temps fini, on écrit

$$\begin{aligned} [(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k)]^2 &= \left| \int e^{i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x} d^4x \right|^2 \\ &= \left(\int e^{i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x} d^4x \right) \left(\int e^{-i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x} d^4x \right) \\ &= \left(\int e^{-i(p_f + k' - p_i - k) \cdot x} d^4x \right) (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k) \\ &= VT(2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k). \end{aligned} \quad (10.21)$$

La probabilité de transition par unité de temps vers un état quantique donné vaut donc

$$\frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{T} = \frac{1}{4m|\vec{k}|V} \frac{1}{2|\vec{k}'|V} \frac{1}{2E_{\vec{p}_f}V} (2\pi)^4 \delta^4(p_f + k' - p_i - k) |\tau_{fi}|^2. \quad (10.22)$$

4. Le nombre d'états quantiques vaut $Vd^3\vec{p}_f/(2\pi)^3$ pour la particule chargée et $Vd^3\vec{k}'/(2\pi)^3$ pour le photon. En multipliant par l'expression précédente, on voit apparaître les éléments invariants d'espace des phases $d^3\vec{p}_f/[(2\pi)^3 2E_{\vec{p}_f}]$ et idem pour le photon.

5. Le flux incident pour une particule de vitesse v dans une boîte de volume V vaut v/V (voir cours). Ici, la particule incidente est un photon, de vitesse 1, donc le flux est simplement $1/V$. La section efficace est par définition le nombre de transitions par unité de temps, divisé par le flux incident. On en déduit le résultat donné dans l'énoncé, où le volume arbitraire de normalisation V n'intervient plus, comme il se doit.

6. En intégrant sur \vec{p}_f , le $\delta^3(\vec{p}_f + \vec{k}' - \vec{k})$ disparaît et on obtient

$$d\sigma = \frac{1}{16(2\pi)^2 m |\vec{k}| |\vec{k}'| E_{\vec{p}_f}} d^3\vec{k}' \delta(E_{\vec{p}_f} + |\vec{k}'| - |\vec{k}| - m) |\tau_{fi}|^2. \quad (10.23)$$

Dans cette expression, \vec{p}_f prend la valeur $\vec{p}_f = \vec{k} - \vec{k}'$.

La relation $E_{\vec{p}_f}^2 = \vec{p}_f^2 + m^2$ donne, en différentiant, $E_{\vec{p}_f} dE_{\vec{p}_f} = \vec{p}_f \cdot d\vec{p}_f$. Or $\vec{p}_f = \vec{k} - \vec{k}'$, donc pour une direction fixée de \vec{k}' , on peut écrire

$$\frac{d\vec{p}_f}{d|\vec{k}'|} = -\frac{d\vec{k}'}{d|\vec{k}'|} = -\frac{\vec{k}'}{|\vec{k}'|}. \quad (10.24)$$

On en déduit

$$\frac{dE_{\vec{p}_f}}{d|\vec{k}'|} = \frac{1}{E_{\vec{p}_f}} \frac{\vec{p}_f \cdot d\vec{p}_f}{d|\vec{k}'|} = -\frac{\vec{p}_f \cdot \vec{k}'}{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'|}, \quad (10.25)$$

qui est le résultat cherché.

Passons à la relation suivante.

$$\frac{d(|\vec{k}'| + E_{\vec{p}_f})}{d|\vec{k}'|} = 1 + \frac{dE_{\vec{p}_f}}{d|\vec{k}'|} = 1 - \frac{\vec{p}_f \cdot \vec{k}'}{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'|} = \frac{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'| - \vec{p}_f \cdot \vec{k}'}{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'|} = \frac{p_f \cdot k'}{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'|}, \quad (10.26)$$

où nous avons fait apparaître au numérateur un produit scalaire de quadrivecteurs. Celui-ci se simplifie en utilisant la conservation de l'impulsion $p_f + k' = p_i + k$. En élevant au carré et en simplifiant, on obtient ainsi $p_f \cdot k' = p_i \cdot k = m|\vec{k}|$. C'est le résultat cherché.

Il ne reste qu'à intégrer la section efficace sur $|\vec{k}'|$, ce qui va faire disparaître la distribution de Dirac sur l'énergie. On utilise pour cela la relation $\int dx \delta(f(x)) = 1/|f'(x_0)|$, où x_0 vérifie $f(x_0) = 0$. On en déduit

$$\int d|\vec{k}'| \delta(E_{\vec{p}_f} + |\vec{k}'| - |\vec{k}| - m) = \frac{1}{d(E_{\vec{p}_f} + |\vec{k}'|)/d|\vec{k}'|} = \frac{E_{\vec{p}_f} |\vec{k}'|}{m|\vec{k}|}. \quad (10.27)$$

On en déduit le résultat de l'énoncé.

7. D'après la première question de cette partie, pour $|\vec{k}'| \ll m$, on a environ $|\vec{k}'| \simeq |\vec{k}|$: physiquement, on peut négliger l'énergie de recul de l'électron. On retrouve la section efficace de l'effet Thomson (équation (4.51) du cours), qui se calcule aussi dans le cadre de l'électrodynamique classique.

Calculons maintenant la section efficace non polarisée : comme on l'a vu en cours, il faut moyennner sur les polarisations dans l'état initial, c'est à dire moyennner sur les deux valeurs possibles de $\vec{\epsilon}$, et sommer sur les polarisations dans l'état final, c'est à dire sur les deux valeurs de $\vec{\epsilon}'$. La somme sur les polarisations peut se calculer au moyen de l'équation (4.37) du cours. Nous allons la calculer directement. Tout d'abord, nous définissons une base orthonormée des états de polarisation, $(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2)$ pour \vec{k} , $(\vec{\epsilon}'_1, \vec{\epsilon}'_2)$ pour \vec{k}' . Choisissons $\vec{\epsilon}_1$ et $\vec{\epsilon}'_1$ perpendiculaires au plan formé par \vec{k} et \vec{k}' , et $\vec{\epsilon}_2$ et $\vec{\epsilon}'_2$ dans le plan (\vec{k}, \vec{k}') . Alors $\vec{\epsilon}_1$ et $\vec{\epsilon}'_1$ sont colinéaires, donc $|\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}'_1| = 1$. Quant à $\vec{\epsilon}_2$ et $\vec{\epsilon}'_2$, ils sont orthogonaux à \vec{k} et \vec{k}' respectivement, donc il font entre eux un angle θ , et $|\vec{\epsilon}_2 \cdot \vec{\epsilon}'_2| = \cos \theta$. On obtient finalement

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2m^2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (10.28)$$

En intégrant sur θ , avec $d\Omega = 2\pi d\cos \theta$, on en déduit finalement la section efficace totale

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \frac{\alpha^2}{m^2}. \quad (10.29)$$

Pour la remettre dans le système d'unités usuel, il suffit de remplacer $1/m$ par \hbar/mc , la longueur d'onde de Compton. On a par ailleurs $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$. Donc en définitive

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \right)^2. \quad (10.30)$$

Le résultat est bien homogène : $e^2/(4\pi\epsilon_0)$ est une énergie multipliée par une longueur, et mc^2 une énergie, donc le rapport est une longueur, qui donne une surface en élevant au carré. La quantité entre parenthèses est le rayon classique de l'électron, qui vaut environ 2.82×10^{-15} m. On en déduit $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-29}$ m².

10.5 Théorie classique des champs

10.5.1 Lagrangien du champ électromagnétique

1. Le tenseur $F_{\mu\nu}$ est donnée par l'équation (1.34) et sa forme contravariante est

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

On en déduit le résultat cherché.

2. Puisque $F_{\mu\nu}$ est antisymétrique, on peut écrire $(\partial^\nu A^\mu)F_{\mu\nu} = -(\partial^\mu A^\nu)F_{\mu\nu}$. On en déduit le résultat cherché.

3. La partie du lagrangien dépendant des dérivées de A^μ est

$$-\frac{1}{2}\partial^\alpha A^\beta(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = -\frac{1}{2}\partial^\alpha A^\beta\partial_\alpha A_\beta + \frac{1}{2}\partial^\alpha A^\beta\partial_\beta A_\alpha$$

Dérivons chacun de ces termes par rapport à $\partial^\mu A^\nu$. Dans le premier terme, seul contribuent les valeurs $\alpha = \mu$ et $\beta = \nu$. Comme on dérive un carré, il y a un facteur 2 :

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \left[-\frac{1}{2}\partial^\alpha A^\beta\partial_\alpha A_\beta \right] = -\partial_\mu A_\nu.$$

Dans le deuxième terme, le couple $\alpha = \nu$ et $\beta = \mu$ contribue aussi :

$$\frac{\partial}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} \left[\frac{1}{2}\partial^\alpha A^\beta\partial_\beta A_\alpha \right] = \partial_\mu A_\nu.$$

On en déduit le résultat cherché.

4. On a de plus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -j_\nu(x) \quad (10.32)$$

Les équations d'Euler-Lagrange donnent alors immédiatement

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (10.33)$$

5. En utilisant la conservation du courant $\partial_\mu j^\mu = 0$, on met la variation du lagrangien sous la forme :

$$\delta \mathcal{L} = j^\mu \partial_\mu \Lambda = \partial_\mu (j^\mu \Lambda) \quad (10.34)$$

Le terme additionnel est une divergence, donc il ne contribue pas aux équations du mouvement. C'était prévisible puisque les équations de Maxwell sont invariantes de jauge.

6. Le résultat découle immédiatement de la définition du tenseur d'énergie impulsion, en utilisant le résultat de la question 3.

7. Avec $\mu = \nu = 0$,

$$\begin{aligned} T^0_0 &= -F^{0i}\partial_0 A_i - \mathcal{L} \\ &= -\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) + \rho V - \vec{j} \cdot \vec{A}. \end{aligned} \quad (10.35)$$

En écrivant $-\partial \vec{A}/\partial t = \vec{E} + \vec{\nabla} V$, on obtient l'équation (6.79). Enfin, en utilisant l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$, on peut éliminer ρ :

$$T^0_0 = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V) - \vec{j} \cdot \vec{A}. \quad (10.36)$$

Le terme $\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} V)$ s'annule en utilisant le théorème de Gauss, pour des champs s'annulant à l'infini. Il ne contribue donc pas à l'énergie totale.

On voit que le tenseur d'énergie-impulsion canonique, déduit du théorème de Noether, donne correctement l'énergie totale, mais pas toujours la densité d'énergie. C'est parce qu'on n'a considéré qu'une transformation globale, où la variation du temps est en tout point la même. Pour obtenir la bonne expression de la densité d'énergie d'un champ, il est nécessaire de faire appel à des notions de géométrie différentielle plus

avancées (qui sont également à la base du formalisme de la relativité générale), qui permettent d'écrire les équations du mouvement sous une forme invariante par des transformations *locales* des coordonnées. Sans faire appel à ce formalisme, il existe néanmoins des méthodes générales permettant d'obtenir des formes plus satisfaisantes du tenseur d'énergie-impulsion, étudiées dans l'exercice 6.3.11 des notes de cours.

8. La densité d'énergie vaut

$$T^{0i} = -F^{0\rho}\partial^i A_\rho = E_j\partial_i A^j. \quad (10.37)$$

On peut la récrire en faisant apparaître le champ magnétique :

$$\begin{aligned} T^{0i} &= E_j(\partial_i A^j - \partial_j A^i) + E_j\partial_j A^i \\ &= E_j\epsilon_{ijk}B_k + E_j\partial_j A^i. \end{aligned} \quad (10.38)$$

C'est le résultat demandé. Le deuxième terme, en intégrant par parties, devient $-(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})A^i$. Or $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ dans une région vide de charge, donc ce terme supplémentaire ne contribue pas à l'impulsion totale.

10.5.2 Invariance de Lorentz

1. La loi de transformation correspond à la définition d'un champ scalaire de Lorentz. Le lagrangien de Klein-Gordon réel ou complexe (vu en cours ce matin) possède cette propriété.

2. L'élément de volume d'espace-temps d^4x est inchangé par transformation de Lorentz, donc l'invariance de l'action équivaut ici à celle du lagrangien, comme pour les translations (ce n'est pas le cas pour l'invariance par dilatation, par exemple).

3. D'après le théorème de Noether, le courant conservé est

$$j^\mu = T^\mu_\nu \delta x^\nu = T^\mu_\nu \omega^{\nu\rho} x_\rho \quad (10.39)$$

Ceci est vrai quel que soit $\omega^{\nu\rho}$ antisymétrique. On prend par exemple $\omega^{01} = \epsilon$, $\omega^{10} = -\epsilon$, et tous les autres nuls, et on obtient le courant

$$\frac{1}{\epsilon} j^\mu = T^\mu_0 x_1 - T^\mu_1 x_0, \quad (10.40)$$

et ainsi de suite pour toutes les valeurs de ν, ρ possibles, ce qui donne 6 courants conservés.

4. La charge associée au courant j^μ est définie par l'intégrale sur tout l'espace à t fixé, $Q = \int j^0 d^3x$. Distinguons deux cas : tout d'abord, ν et ρ non nuls, ce qui correspond à des transformations par rotation. La charge conservée est alors

$$Q = \int (x^j T^{0k} - x^k T^{0j}) d^3x. \quad (10.41)$$

Puisque T^{0k} représente la densité d'impulsion suivant l'axe k , on interprétera naturellement $x^j T^{0k} - x^k T^{0j}$ comme une densité de moment cinétique, et la quantité conservée est son intégrale sur tout l'espace, c'est à dire le moment cinétique du champ, comme on s'y attendait.

Considérons ensuite le cas des transformations spéciales d'axe k , qui correspond à $\nu = 0$, $\rho = k$. La charge conservée s'écrit alors

$$Q = t \int T^{0k} d^3x - \int x^k T^{00} d^3x = tP^k - \int x^k T^{00} d^3x, \quad (10.42)$$

où P^k désigne l'impulsion totale du champ. Si on interprète T^{00} comme une densité d'énergie, alors il est facile d'interpréter le deuxième terme en introduisant le barycentre du système défini par

$$x_G^k = \frac{\int x^k T^{00} d^3x}{\int T^{00} d^3x} = \frac{\int x^k T^{00} d^3x}{E}, \quad (10.43)$$

où E est l'énergie totale (rappelons qu'on est en relativité, donc c'est le barycentre de l'énergie qui est important, et non le centre de masse). L'équation (10.42) se réécrit alors

$$Q = tP^k - x_G E. \quad (10.44)$$

Ceci est une constante d'après le théorème de Noether. Dérivons par rapport au temps. E et P_k sont des constantes et il vient

$$\frac{dx_G^k}{dt} = \frac{P^k}{E}. \quad (10.45)$$

C'est à dire que le barycentre se déplace à la vitesse constante P^k/E , ce qui est la même loi que pour un point matériel.

On calcule

$$\partial_\mu M^{\mu,\nu\rho} = (\partial_\mu x^\nu) T^{\mu\rho} + x^\nu \partial_\mu T^{\mu\rho} - (\partial_\mu x^\rho) T^{\mu\nu} - x^\rho \partial_\mu T^{\mu\nu}. \quad (10.46)$$

Or $\partial_\mu x^\nu = \delta_\mu^\nu$, et $\partial_\mu T^{\mu\rho} = 0$ si le lagrangien est invariant par translation. Il reste

$$\partial_\mu M^{\mu,\nu\rho} = T^{\nu\rho} - T^{\rho\nu} = 0. \quad (10.47)$$

7. Pour le champ scalaire réel,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (10.48)$$

C'est manifestement symétrique.

8. Le champ électromagnétique se transforme comme un vecteur, c'est à dire qu'on n'a pas $A^\mu(x') = A^\mu(x)$. A la place, on a $\delta A^\mu = A^\mu(x') - A^\mu(x) = \omega^{\mu\nu} A_\nu$. Par conséquent, le courant conservé associé à l'invariance de Lorentz ne s'écrit plus simplement $M^{\mu,\nu\rho} = x^\nu T^{\mu\rho} - x^\rho T^{\mu\nu}$, il y a un terme supplémentaire proportionnel à δA^μ . Donc, en suivant la démarche de la question 4, le moment cinétique ne s'écrit plus sous la forme (10.41). Ceci implique qu'on ne peut plus considérer T^{0i} comme une densité d'impulsion. De même, \vec{x}_G défini par (10.43) n'aura plus une vitesse constante \vec{P}/E , donc il ne correspond pas au barycentre de l'énergie, donc T^{00} n'est pas une densité d'énergie. On voit bien d'après cet exercice que T^{00} ne représente en général la densité d'énergie que pour des champs scalaires.

10.6 Quantification du champ scalaire

10.6.1 Etats cohérents de l'oscillateur harmonique

1. Décomposition sur la base des états propres de l'énergie

a) $|n\rangle$ est défini par l'équation (7.108). Or $[a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$, donc $a(a^\dagger)^n|0\rangle = n(a^\dagger)^{n-1}|0\rangle$. On en déduit le résultat par récurrence.

b) En utilisant la définition de l'état cohérent, $a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, on obtient immédiatement l'équation (7.109). En insérant la relation de fermeture $\sum_{n=0}^{+\infty} |n\rangle\langle n| = 1$, on obtient le résultat demandé.

c) La condition de normalisation $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$ s'écrit

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = |\langle 0|\lambda\rangle|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\lambda\rangle|^2 e^{|\lambda|^2} = 1, \quad (10.49)$$

d'où on déduit l'équation (7.111). L'état (7.109) s'écrit donc

$$|\lambda\rangle = e^{i\alpha} e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (10.50)$$

d) La probabilité d'être dans l'état $|n\rangle$ s'écrit, en utilisant (10.50),

$$|\langle n|\lambda\rangle|^2 = \frac{|\lambda|^{2n}}{n!} e^{-|\lambda|^2}, \quad (10.51)$$

ce qui est la définition d'une loi de Poisson de moyenne $|\lambda|^2$.

e) En exprimant l'état $|n\rangle$ au moyen de la relation (7.108), la décomposition (10.50) se réécrit sous la forme

$$|\lambda\rangle = e^{i\alpha} e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle = e^{i\alpha} e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle. \quad (10.52)$$

2. Méthode algébrique

a) D'après la définition de S , on a

$$S^\dagger = \exp(\lambda^* a - \lambda a^\dagger) = S^{-1} \quad (10.53)$$

(l'exponentielle d'un opérateur antihermitique est unitaire).

b) Dérivons $C(\theta)$ par rapport à θ . Il vient

$$\frac{dC(\theta)}{d\theta} = e^{\theta A} [A, B] e^{-\theta A} = [A, B], \quad (10.54)$$

où nous avons utilisé, pour la deuxième égalité, l'hypothèse que $[A, B]$ commute avec A , donc avec $e^{\theta A}$. En intégrant cette relation entre $\theta = 0$ et $\theta = 1$, et en remarquant que $C(0) = B$ d'après la définition de $C(\theta)$, on prouve le lemme.

c) On utilise le lemme avec $B = a$ et $A = -\lambda a^\dagger + \lambda^* a$. On a alors $[A, B] = \lambda$, d'où le résultat cherché.

d) On réécrit le résultat de la question précédente sous la forme

$$a S = S (a + \lambda). \quad (10.55)$$

En appliquant cette relation à l'état fondamental $|0\rangle$, et en utilisant $a|0\rangle = 0$, on obtient

$$a S|0\rangle = \lambda S|0\rangle, \quad (10.56)$$

c'est à dire que $S|0\rangle$ vérifie la relation définissant un état cohérent. Il est par ailleurs normalisé puisque S est unitaire donc ne change pas la norme, et $|0\rangle$ est de norme 1 par hypothèse.

3. Equivalence entre les deux résultats

a) Posons

$$D(\theta) = e^{\theta A} e^{\theta B} e^{-\theta^2 [A, B]/2}. \quad (10.57)$$

Dérivons l'opérateur $D(\theta)$ par rapport à θ :

$$\frac{dD(\theta)}{d\theta} = A e^{\theta A} e^{\theta B} e^{-\theta^2 [A, B]/2} + e^{\theta A} B e^{\theta B} e^{-\theta^2 [A, B]/2} - e^{\theta A} e^{\theta B} \theta [A, B] e^{-\theta^2 [A, B]/2}. \quad (10.58)$$

Or le lemme démontré précédemment nous permet d'écrire

$$e^{\theta A} B = (B + \theta [A, B]) e^{\theta A}, \quad (10.59)$$

et l'équation précédente devient

$$\frac{dD(\theta)}{d\theta} = (A + B) D(\theta). \quad (10.60)$$

En intégrant cette équation à partir de $\theta = 0$, on obtient

$$D(\theta) = e^{\theta(A+B)}. \quad (10.61)$$

En posant $\theta = 1$ dans (10.57) et (10.61), on prouve le résultat cherché.

b) Appliquons ce résultat avec $A = \lambda a^\dagger$, $B = -\lambda^* a$. On a donc $[A, B] = \lambda \lambda^\dagger$. L'expression de S devient alors

$$S = e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a} = e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a} e^{-|\lambda|^2/2}. \quad (10.62)$$

Dans la question 2. d), l'état $|\lambda\rangle$ a été défini par $S|0\rangle$. Comme l'état fondamental $|0\rangle$ vérifie $e^{\lambda^* a}|0\rangle = |0\rangle$, on retrouve bien le résultat précédent (7.112), où le réel arbitraire α est choisi égal à 0.

4. Fonction d'onde de l'état cohérent

a) De la définition de l'état cohérent, on déduit $\langle \lambda | a | \lambda \rangle = \lambda$ et en prenant le complexe conjugué, $\langle \lambda | a^\dagger | \lambda \rangle = \lambda^*$. On en déduit immédiatement

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\lambda + \lambda^*) \\ \langle P \rangle &= -i \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} (\lambda - \lambda^*). \end{aligned} \quad (10.63)$$

b) Il suffit de vérifier que $(i\langle P \rangle X - i\langle X \rangle P)/\hbar = \lambda a^\dagger - \lambda^* a$.

c) Le lemme de la question 3 donne alors

$$S = e^{i\langle P \rangle X/\hbar} e^{-i\langle X \rangle P/\hbar} e^{i\theta}. \quad (10.64)$$

où nous avons posé $\theta = -\langle X \rangle \langle P \rangle / \hbar$. On en déduit

$$\langle x | \lambda \rangle = e^{i\theta} e^{i\langle P \rangle x/\hbar} \langle x | e^{-i\langle X \rangle P/\hbar} | 0 \rangle. \quad (10.65)$$

En remplaçant P par $-i\hbar d/dx$, on reconnaît l'opérateur de translation :

$$\exp\left(-\langle X \rangle \frac{d}{dx}\right) \psi(x) = \psi(x - \langle X \rangle). \quad (10.66)$$

(le plus simple est de le vérifier pour une translation infinitésimale). On en déduit le résultat cherché.

On a donc $|\psi_\lambda(x)|^2 = |\psi_0(x - \langle X \rangle)|^2$: le paquet d'ondes a la même forme que pour l'état fondamental, mais translaté de $\langle X \rangle$. Autrement dit, c'est une gaussienne centrée en $\langle X \rangle$.

d) L'équation (7.112) donne à une phase près

$$|\lambda e^{-i\omega t}\rangle = \exp(-|\lambda|^2/2) \exp(\lambda e^{-i\omega t} a^\dagger) |0\rangle. \quad (10.67)$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$i \frac{d}{dt} |\lambda e^{-i\omega t}\rangle = \omega \lambda e^{-i\omega t} a^\dagger |\lambda e^{-i\omega t}\rangle. \quad (10.68)$$

Et par définition de l'état cohérent,

$$\lambda e^{-i\omega t} |\lambda e^{-i\omega t}\rangle = a |\lambda e^{-i\omega t}\rangle. \quad (10.69)$$

En reportant dans l'équation précédente, on obtient

$$i \frac{d}{dt} |\lambda e^{-i\omega t}\rangle = \omega a^\dagger a |\lambda e^{-i\omega t}\rangle, \quad (10.70)$$

qui est bien l'équation de Schrödinger. Le centre du paquet d'ondes est proportionnel à $\lambda e^{-i\omega t} + \lambda^* e^{i\omega t}$, c'est à dire que la position oscille autour de 0 à la pulsation ω , comme pour l'oscillateur classique. Le paquet d'onde oscille donc autour de l'origine, sans se déformer.

10.7 Quantification du champ de Dirac

10.7.1 Systèmes à deux niveaux

1. On a généralement $[A, B]^\dagger = [B^\dagger, A^\dagger]$ quels que soient A et B . Donc $[a, a^\dagger]$ est hermitique quel que soit l'opérateur a .

D'autre part, en développant le commutateur, la propriété $a^2 = 0$ donne $a[a, a^\dagger] = -aa^\dagger a = -[a, a^\dagger]a$, et $a^\dagger^2 = 0$ donne $a^\dagger[a, a^\dagger] = a^\dagger aa^\dagger = -[a, a^\dagger]a^\dagger$.

Enfin, toujours en utilisant $a^2 = a^\dagger^2 = 0$, on obtient en développant

$$[a, a^\dagger]^2 = aa^\dagger aa^\dagger + a^\dagger aa^\dagger a.$$

En utilisant $aa^\dagger = 1 - a^\dagger a$, ceci donne

$$[a, a^\dagger]^2 = (1 - a^\dagger a)aa^\dagger + a^\dagger(1 - a^\dagger a)a = aa^\dagger + a^\dagger a = 1.$$

Dans le cas où

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$[a, a^\dagger] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Posons $S_j = [a_j, a_j^\dagger]$. Avec cette notation, $b_j = a_j \prod_{j < k} S_k$. Comme les S_j sont hermitiques et commutent entre eux, nous pouvons aussi écrire $b_j^\dagger = a_j^\dagger \prod_{k < j} S_k$. Enfin, puisqu'ils sont de carré 1, $\{b_j, b_j^\dagger\} = \{a_j, a_j^\dagger\} = 1$ et $b_k^2 = a_k^2 = 0$.

Il ne nous reste qu'à vérifier que b_j anticommute avec b_k et b_k^\dagger pour $j > k$. C'est une conséquence directe du fait que b_k et b_k^\dagger anticommulent avec S_k , et que les S_k commutent entre eux.

10.7.2 Théorie de Fermi de la radioactivité β

Quelques compléments historiques

La théorie de Fermi était une première tentative de théorie des interactions faibles. Elle a connu depuis des perfectionnements importants. L'étape essentielle a été la découverte de la violation de la parité dans les interactions faibles, postulée par Lee et Yang en 1956 et vérifiée quelques mois plus tard. La théorie actuelle date de 1958. Le hamiltonien d'interaction est très proche de celui de Fermi, en remplaçant γ^μ par $\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^5$ (à quelques détails près). Il fait intervenir, non plus un vecteur $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ comme dans la théorie de Fermi, mais

la différence d'un vecteur et d'un pseudovecteur ou *vecteur axial* $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, d'où son nom de "théorie V-A". Cependant, le spectre des électrons, que nous calculons ici, est le même dans la théorie V-A que dans la théorie de Fermi.

1. Cinématique

a) S'il n'y a pas de neutrino, il s'agit d'une désintégration à deux corps, dans laquelle l'énergie de l'électron est entièrement déterminée par la conservation de l'énergie et de l'impulsion : il y a six inconnues (les impulsions du proton et de l'électron) et quatre équations de conservation, donc deux degrés de liberté, qui correspondent à la direction de l'électron émis. Le spectre en énergie est un pic de Dirac. Si on veut un calcul plus explicite, $p_n = p_e + p_p$, soit $(p_n - p_e)^2 = p_p^2 = m_p^2$. Or $(p_n - p_e)^2 = p_n^2 + p_e^2 - 2p_n \cdot p_e = m_n^2 + m_e^2 - 2m_n E_e$ dans le référentiel de repos du neutron. On en déduit $E_e = (m_n^2 - m_p^2 - m_e^2)/(2m_n)$.

b) Avec un neutrino dans l'état final, il y a trois degrés de liberté de plus, soit cinq degrés de liberté en tout. Trois de ces degrés de liberté sont des angles d'Euler qui définissent l'orientation du système $(p, e, \bar{\nu})$ dans l'espace : deux pour la direction de l'électron, et un pour l'orientation du plan (\vec{p}_e, \vec{p}_ν) autour de cette direction. Par symétrie de rotation, la probabilité de transition ne peut pas en dépendre. Restent deux degrés de liberté, pour lesquels on peut choisir l'énergie de l'électron et l'angle entre l'électron et le neutrino. (ca peut paraître pas très logique physiquement de choisir un paramètre du neutrino, puisque le neutrino n'est jamais vu. Mais c'est cet angle qui intervient naturellement dans le calcul, comme on le verra. Expérimentalement, on le reconstruit à partir de la direction de recul du proton).

c) Physiquement, il est évident que la particule lourde encasse la quantité de mouvement sans prendre d'énergie : comme lorsqu'on fait rebondir une balle de caoutchouc sur le sol, la Terre encasse la quantité de mouvement mais ne prend pas d'énergie. Dans le cas qui nous intéresse, l'énergie cinétique disponible est $\Delta - m_e \simeq 0,781$ MeV, et elle est emportée pour l'essentiel par l'électron et le neutrino. Ils sont donc relativistes, et leurs impulsions sont du même ordre de grandeur. L'impulsion du proton est du même ordre puisque la somme des trois impulsions est nulle. Son énergie cinétique est $p^2/2m_p$, avec $p \simeq \Delta - m_e$, donc la fraction d'énergie cinétique emportée par le proton est typiquement d'ordre

$$\frac{\Delta - m_e}{2m_p} \simeq 4 \times 10^{-4}$$

qui est tout à fait négligeable.

2. Analyse qualitative

a) L'état initial est un neutron. L'opérateur Ψ_n détruit un neutron. $\bar{\Psi}_p$ crée un proton. $\bar{\Psi}_e$ crée un électron. Ψ_ν détruit un neutrino ou crée un antineutrino. Donc le hamiltonien permet bien le processus cherché, au premier ordre de la théorie des perturbations.

b) Calculons le terme hermitique adjoint. On se rappelle que $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$, donc

$$(\bar{\Psi}_p\gamma^\mu\Psi_n)^\dagger = (\Psi_p^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\Psi_n)^\dagger = \Psi_n^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger\gamma^0\Psi_p = \Psi_n^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\Psi_p = \bar{\Psi}_n\gamma^\mu\Psi_p =$$

De même pour l'autre terme, donc le terme hermitique conjugué s'obtient simplement en échangeant proton et neutron d'une part, neutrino et électron d'autre part :

$$G_F \int [\bar{\Psi}_n(t, \vec{x})\gamma^\mu\Psi_p(t, \vec{x})] [\bar{\Psi}_\nu(t, \vec{x})\gamma_\mu\Psi_e(t, \vec{x})] d^3\vec{x}$$

Ceci permet bien le processus $p \rightarrow ne^+\nu$. Cinématiquement, ce processus est interdit pour le proton libre, plus léger que le neutron, mais possible dans certains noyaux où l'énergie de liaison apporte l'énergie $\Delta + m_e$ nécessaire. La conversion interne $pe^- \rightarrow n\nu$ est équivalente à la radioactivité β^+ du point de vue du hamiltonien, puisqu'on sait qu'on peut toujours remplacer une antiparticule dans l'état final par une particule dans l'état initial. Mais la conversion interne est favorisée énergétiquement puisqu'il suffit d'apporter l'énergie $\Delta - m_e$, au lieu de $\Delta + m_e$. Si la différence d'énergie de liaison entre l'état final et l'état initial est comprise entre $\Delta - m_e$ et $\Delta + m_e$, seule la conversion interne est possible.

c) La densité de hamiltonien a pour dimension E^4 , donc $E^4 = [G_F][\Psi]^4$. Le champ de Dirac Ψ a la même dimension que la fonction d'onde de l'équation de Dirac, soit $L^{-3/2}$, soit $E^{3/2}$. Donc $[G_F] = E^{-2}$. Numériquement, on a $G_F \simeq 10^{-5}$ GeV $^{-2}$.

3. Probabilité de transition

a) L'état initial est un neutron $|i\rangle = b_n^\dagger|0\rangle$, où b_n^\dagger est un opérateur de création indépendant du temps. L'état final est de la forme $|f\rangle = d_\nu^\dagger b_p^\dagger b_e^\dagger|0\rangle$, donc $\langle f| = \langle 0|b_e b_p d_\nu$. Rappelons la décomposition du champ de Dirac

$$\Psi(t, \vec{x}) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}) e^{-iE_\alpha t} \begin{cases} b_\alpha & \text{si } E_\alpha > 0 \\ d_\alpha^\dagger & \text{si } E_\alpha < 0 \end{cases}$$

(dans le cours, on a utilisé des opérateurs dépendant du temps $b_\alpha(t) = b_\alpha e^{-iE_\alpha t}$). Les relations d'anticommutation canoniques donnent $\langle 0|b_\alpha b_i^\dagger|0\rangle = \delta_{\alpha,i}$. Pour détruire le neutron, nous utiliserons

$$\langle 0|\Psi(t, \vec{x})b_i^\dagger|0\rangle = \psi_i(\vec{x})e^{-iE_i t},$$

et pour créer l'électron et le proton, nous utiliserons

$$\langle 0|b_i \bar{\Psi}(x)|0\rangle = \bar{\psi}_i(\vec{x})e^{iE_i t}$$

Pour créer l'antineutrino, enfin, nous utilisons

$$\langle 0|d_i \Psi(x)|0\rangle = \psi_i(x)e^{-iE_i t}.$$

Mais il faut se rappeler que E_i est l'énergie de l'équation de Dirac, qui est négative, et que l'énergie de l'antineutrino E_ν est $-E_i$. En mettant bout à bout les divers éléments on obtient (à un signe près venant de l'anticommutation des opérateurs de champ entre eux)

$$\mathcal{A}_{\text{fi}} = -iG_F \int [\bar{\psi}_p(\vec{x})\gamma^\mu \psi_n(\vec{x})] [\bar{\psi}_e(\vec{x})\gamma_\mu \psi_\nu(\vec{x})] d^3\vec{x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(E_\nu + E_e + E_p - E_n)t} dt,$$

d'où le résultat demandé avec $\Delta = m_n - m_p \simeq E_n - E_p$.

b) On rappelle l'expression des matrices de la représentation de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices γ^i mélangent grandes et petites composantes donc leur élément de matrice est nul pour des solutions au repos. Seul γ^0 contribue :

$$\bar{\psi}_n(\vec{x})\gamma^0\psi_p(\vec{x}) = \psi_n^\dagger(\vec{x})\psi_p(\vec{x}) = \phi_n^\dagger(\vec{x})\phi_p(\vec{x}).$$

Les deux composantes de $\phi(\vec{x})$ correspondent aux deux états de polarisation. Donc cette amplitude de transition s'annule si les spins sont antiparallèles.

c) La fonction d'onde normalisée dans un volume V ($\int \psi^\dagger \psi d^3\vec{x} = 1$) s'écrit pour le neutron

$$\phi_n(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}_n \cdot \vec{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et idem pour le proton en remplaçant \vec{p}_n par \vec{p}_p . Pour l'électron, nous utilisons les solutions à ondes planes de l'équation de Dirac

$$\psi_e(\vec{x}) = \frac{u_e}{\sqrt{2E_e V}} e^{i\vec{p}_e \cdot \vec{x}}$$

et pour le neutrino

$$\psi_\nu(\vec{x}) = \frac{v_\nu}{\sqrt{2E_\nu V}} e^{-i\vec{p}_\nu \cdot \vec{x}}$$

où nous avons noté v le spineur de polarisation pour une solution d'énergie négative, conformément à la convention usuelle, et utilisé le fait que l'impulsion de l'antineutrino est opposée à l'impulsion de l'équation de Dirac. En intégrant sur \vec{x} , on en déduit le résultat cherché.

d) Le module au carré de l'amplitude de transition donne la probabilité de transition. Nous utilisons la règle de calcul usuelle pour élever au carré les distributions de Dirac

$$[(2\pi)^4 \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu)]^2 = VT(2\pi)^4 \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu).$$

où T est le temps sur lequel on effectue la mesure (c'est ainsi que se traduit, avec nos notations, la règle d'or de Fermi). La probabilité de transition par unité de temps est alors simplement $dp_{\text{fi}}/dt = |\mathcal{A}_{\text{fi}}|^2/T$. Reste à sommer sur les polarisations de l'électron et de l'antineutrino. On commence par exprimer le résultat sous forme d'une trace

$$|u_e^\dagger v_\nu|^2 = \text{tr}(v_\nu v_\nu^\dagger u_e u_e^\dagger)$$

On se rappelle ensuite que le projecteur sur les états d'énergie positive (respectivement négative) est $(1/2E_{\vec{p}}) \sum_{\text{spins}} uu^\dagger$ (respectivement $(1/2E_{\vec{p}}) \sum_{\text{spins}} vv^\dagger$). Ce projecteur vaut $(1+s)/2$ (respectivement $(1-s)/2$), où $s = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)/E_{\vec{p}}$ est le signe de l'énergie. On a donc pour l'électron

$$\frac{\sum_{\text{spins}} u_e u_e^\dagger}{2E_e} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{p}_e + \beta m_e}{E_e} \right)$$

et pour l'antineutrino

$$\frac{\sum_{\text{spins}} v_\nu v_\nu^\dagger}{2E_\nu} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vec{\alpha} \cdot (-\vec{p}_\nu) + \beta m_\nu}{E_\nu} \right)$$

où nous avons utilisé une fois de plus que l'impulsion de l'antineutrino est opposée à l'impulsion de l'équation de Dirac, mais que son énergie E_ν est bien l'énergie positive $E_{\vec{p}_\nu}$.

Le calcul de trace est élémentaire : le produit de deux matrices de Dirac différentes est de trace nulle, la trace de l'identité vaut 4, ce qui donne

$$\text{tr} \left(\frac{\sum_{\text{spins}} v_\nu v_\nu^\dagger}{2E_\nu} \frac{\sum_{\text{spins}} u_e u_e^\dagger}{2E_e} \right) = 1 + \frac{\vec{p}_\nu \cdot \vec{p}_e - m_\nu m_e}{E_\nu E_e}.$$

On en déduit le résultat cherché.

4. Spectre des électrons – temps de vie :

a) Le nombre de transitions par unité de temps s'obtient en sommant la probabilité par unité de temps sur les états finals, soit

$$d\Gamma = \frac{V d^3 \vec{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \vec{p}_\nu}{(2\pi)^3} \frac{V d^3 \vec{p}_p}{(2\pi)^3} \frac{G_F^2}{V^3} \left(1 + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu - m_e m_\nu}{E_e E_\nu} \right) (2\pi)^4 \delta(\Delta - E_e - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_p + \vec{p}_e + \vec{p}_\nu).$$

Le résultat est indépendant du volume de normalisation V , comme il se doit. En intégrant sur l'impulsion du proton, il vient

$$d\Gamma = \frac{d^3 \vec{p}_e}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \vec{p}_\nu}{(2\pi)^3} G_F^2 \left(1 + \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{p}_\nu - m_e m_\nu}{E_e E_\nu} \right) 2\pi \delta(\Delta - E_e - E_\nu).$$

On décompose ensuite l'impulsion du neutrino en coordonnées sphériques $d^3 \vec{p}_\nu = 2\pi p_\nu E_\nu dE_\nu d\cos\theta$, et on intègre sur E_ν . Le delta de conservation de l'énergie fixe alors $E_\nu = \Delta - E_e$, et on obtient le résultat cherché. où $E_\nu = \Delta - E_e$ et $p_\nu = \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2}$.

b) En intégrant sur θ ,

$$d\Gamma = d^3 \vec{p}_e \frac{G_F^2}{(2\pi)^4} p_\nu E_\nu \left(1 - \frac{m_e m_\nu}{E_e E_\nu} \right).$$

Si le neutrino est de masse nulle, $p_\nu = E_\nu$, et $d\Gamma/d^3 \vec{p}_e$ est proportionnel à $E_\nu^2 = (\Delta - E_e)^2$. Expérimentalement, on porte $(1/p_e)(dN/dp_e)^{1/2}$, où dN/dp_e désigne le nombre d'électrons par unité d'impulsion, en fonction de E_e : on doit observer une décroissance linéaire. C'est le diagramme suggéré par Kurie en 1936 pour vérifier la théorie de Fermi, et qui porte son nom (Kurie plot).

Si le neutrino a une masse non nulle, il y a deux corrections. D'une part un facteur $1 - m_e m_\nu / E_e E_\nu$, toujours très proche de 1. D'autre part, $(d\Gamma/d^3 \vec{p}_e)^{1/2}$ est proportionnel à $\sqrt{p_\nu E_\nu}$, avec

$$p_\nu = \sqrt{E_\nu^2 - m_\nu^2} = \sqrt{(\Delta - E_e)^2 - m_\nu^2} = \sqrt{(\Delta - m_\nu - E_e)(\Delta + m_\nu - E_e)}.$$

Au voisinage de l'énergie maximale des électrons, qui est maintenant $\Delta - m_\nu$, $(d\Gamma/d^3 \vec{p}_e)^{1/2}$ n'est plus linéaire mais présente une tangente verticale venant de $\sqrt{\Delta - E_e - m_\nu}$. Même si la masse du neutrino est petite, son effet est grand près de l'énergie maximale des électrons.

On a donc une information directe sur la masse du neutrino en regardant l'extrémité (end point) du spectre des électrons. On notera que le terme en $p_\nu E_\nu$ responsable de l'effet vient de l'espace des phases, de telle sorte que ceci est dans une large mesure indépendant du modèle choisi pour l'interaction.